TEACHING ENQUIRY
with MYSTERIES INCORPORATED

Introduzione al meccanismo di Brout-Englert-Higgs 1

Marco Giliberti

Università degli Studi di Milano

CERN Italian Teachers Program 6-11 September 2015

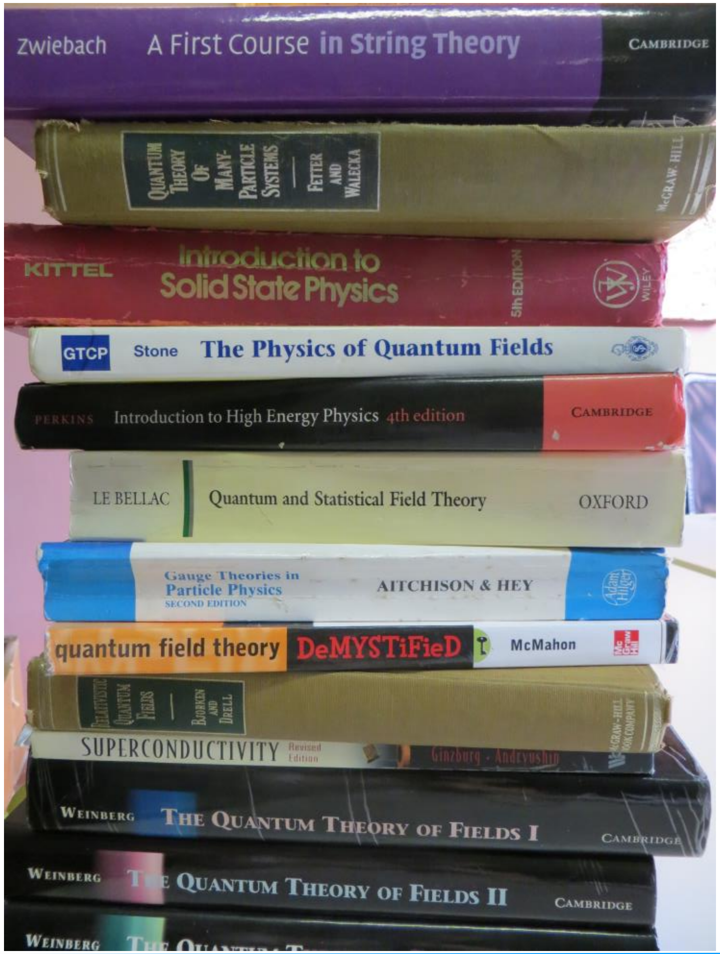
Co-funded by
the Seventh Framework Programme
of the European Union

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

FP7-Science-in-Society-2012-1, Grant Agreement N. 321403

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Punto 1: studiare



Simmetrie – Invarianze - Conservazioni
descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Il meccanismo di BEH (Brout-Englert-Higgs) fa parte del filone centrale portante di tutta la scienza fisica da Galileo ad oggi

La fisica “moderna” nasce con il brano “sulla nave” di Galileo

Dall’interno della stiva di una nave in moto rettilineo uniforme non posso fare esperimenti che mi permettano di capire se mi muovo o se sto fermo

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni
descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Dato un rifermiento inerziale, ogni riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a questo è ancora inerziale e le leggi fisiche per i due riferimenti sono le stesse

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = \underline{x} + \underline{v}t; \; t \mapsto t' = t$$

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{F} \rightarrow m\ddot{\underline{x}}' = \underline{F}$$

Trasformazioni globali nello spazio

Il brano "sulla nave" ci dice che non esiste lo spazio assoluto

La descrizione tramite le coordinate è ridondante

Eppure scriviamo lo stesso $\ddot{\underline{x}}$ perché non sappiamo farne a meno. Le leggi del moto non dipendono da x, eppure la x compare nelle equazioni anche in $\underline{F} = -\nabla U(x)$

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni
descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Controesempio: Il periodo del pendolo non dipende dalla massa. Eppure se scrivessimo

$$T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{m}{m_T}\right)^3 \left[\frac{d}{d\left(\frac{m}{m_T}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{m}{m_T}x^2}\right]$$

L'indipendenza dalla massa non sarebbe tanto trasparente

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni

descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Sono molti i casi nei quali utilizziamo descrizioni ridodondanti. In quei casi le variabili scelte non sono ottimali, ma non per questo hanno poco significato fisico o sono inappropriate, però

si deve correggere la ridondanza della descrizione con le opportune simmetrie

Esempio:

I potenziali scalare e vettore

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \mathrm{x} \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

i campi rimangono invarianti per

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{\nabla}\theta$$

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni
descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Esempi:
In meccanica quantistica la fisica è invariante per variazioni globali della fase della fuzione d'onda

$$\boldsymbol{\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi}$$

Infatti l'equazione di Schroedinger è lineare e le grandezze fisiche contengono prodotto del tipo $\boldsymbol{\psi\psi^*}$

Questa invarianza ha un nome famoso: invarianza sotto il gruppo U(1) globale

«la radice di tutti i principi di simmetria consiste nell'assunzione dell'impossibilità di osservare determinate grandezze fondamentali»,
Lee, T. D., Particle physics and introduction to field theory, Harwood, New York, 1988. p. 178

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni

descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Per l'invarianza sotto trasformazioni di Galileo è necessario costruire riferimenti cartesiani infinitamente estesi nello spazio e nel tempo

Per costruirli dovremmo concretamente spostarci o comunicare con qualcuno.

L'esistenza di una velocità limite impedisce questo modo di operare. Pertanto

le trasformazioni di Galileo possono essere controllate (e ritenute valide) soltanto localmente

La necessità di invarianza locale ci fa considerare trasformazioni di coordinate più generali. Per esempio, nei sistemi rotanti $\underline{v}$ dipende da $\underline{x}$

Noi ci chiediamo che forma abbiamo le leggi del moto perchè siano invarianti per queste trasformazioni più generali

Nascono così le forze: centrifuga, di Coriolis, ecc.

che **sono forze a lungo *range*** perché si percepiscono a qualsiasi distanza

$$\boldsymbol{troviamo}$$

$$\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{apparenti}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}} \to \ddot{\boldsymbol{x}}' = \ddot{\boldsymbol{x}} + \ddot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{apparente}}$$

$$m \to m' = m$$

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni

descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Esempi

Abbastanza in generale possiamo scrivere (caso monodimensionale)

$$\boxed{x \to x' = x + s}$$

$s = cost$

Trasformazione globale

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} = F$$

$$F \to F' = F + 0$$

Invarianza delle equazioni

$s = vt$

Trasformazione globale per *x*. «Locale» solo per *t*

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} = F$$

$$F \to F' = F + 0$$

Invarianza delle equazioni

Simmetrie – Invarianze - Conservazioni

descrizioni ridondanti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

$s = \frac{1}{2}at^2$

Trasformazione globale per *x*. «Locale» solo per *t*

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} = F + ma$$

$$F \rightarrow F' = F + F_{gauge}$$

Invarianza delle equazioni solo se si aggiunge una forza di *gauge* (principio di equivalenza)

$s = 2x$

Trasformazione locale per *x*

$$m\ddot{x}' = 3m\ddot{x} = F + 2F$$

$$F \rightarrow F' = F + F_{gauge}$$

Invarianza delle equazioni solo se si aggiunge una forza di *gauge*

Forze a lungo range

Dai principi alle leggi
lagrangiane

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Le equazioni del moto si basano sulla conoscenza delle forze. Le forze si “inducono” dagli esperimenti. Si “inventano” in maniera da dare la giuste equazioni del moto

Se le forze sono conservative possiamo introdurre l’Energia potenziale *U* e quindi la lagrangiana

$$L \equiv T - U$$

E le equazioni di Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Un grado di libertà

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Parte cinetica proporzionale $\dot{x}^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = mx \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F$$

Forza

$$m\ddot{x} - F = 0$$

Equivalenti alle equazioni di Newton

Dai principi alle leggi
lagrangiane

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Generalizzazioni:

$$L \equiv T - U$$ Sempre uguale

N gradi di libertà q_i

Parte cinetica $T \propto \sum \dot{q}_i^2$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Infiniti gradi di libertà $\varphi(x)$

$L \to \mathcal{L}$ densità lagrangiana

Parte cinetica $\propto \dot{\varphi}(x)^2$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = 0$$

Dai principi alle leggi
lagrangiane

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Esempio: Qual è la lagrangiana che dà l'equazione delle onde?

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t) = 0$$

Risposta (c=1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_\mu\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\mu\right)^2 \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2$$

Il campo elettromagnetico libero ha soltanto la parte cinetica (quella con le derivate)
Non c'è potenziale

Basta usare

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$$

Dai principi alle leggi
lagrangiane

Qui φ può rappresentare il campo elettrico o il campo magnetico o il potenziale ecc.
Nel caso 3D in cui φ = V e consideriamo situazioni indipendenti dal tempo

$$\cancel{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)} - \nabla^2\varphi = 0$$

Da cui

$$\nabla^2 V = 0$$

Per r>0 ritroviamo il caso ben noto del potenziale coulombiano a lungo *range*

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Una lagrangiana puramente cinetica descrive forze a lungo *range*

Dai principi alle leggi
lagrangiane

Vogliamo adesso trovare l'equazione delle onde per un potenziale a breve *range*

$$V\left(r\right)=\frac{g_0}{4\pi}\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{r}}$$

Esso soddisfa l'equazione per r>0

$$\nabla^2 V\left(r\right)=\frac{1}{\lambda^2}V\left(r\right)$$

Per cui possiamo ipotizzare, in generale, l'equazione (detta di Klein Gordon)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+\frac{1}{\lambda^2}\right)\varphi=0$$

Qual è la sua lagrangiana?

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\right)^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}\varphi^2$$

Solita parte cinetica con le derivate

Potenziale armonico

Dai principi alle leggi
lagrangiane-aspetti quantistici

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

D'altra parte l'equazione di Klein Gordon rappresenta l'equazione di una particella massiva. Infatti (ripristinando per un momento c e $\hbar$) dalla relatività si ha

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

E, dalla meccanica quantistica

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \ (-i\hbar\nabla)$$

Perciò sostituendo si ha

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$$

Tornando a porre $c = \hbar = 0$ si trova l'equazione precedente con ***m=1/λ***

Dai principi alle leggi
lagrangiane-aspetti quantistici

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

D'altra parte l'equazione di Klein Gordon rappresenta l'equazione di una particella massiva. Infatti (ripristinando per un momento c e $\hbar$) dalla relatività si ha

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

E, dalla meccanica quantistica

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}; \quad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad (-i\hbar\nabla)$$

La massa della particella scambiata è l'inverso del *range* di interazione

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$$

Tornando a porre $c = \hbar = 0$ si trova l'equazione precedente con $m=1/\lambda$

Dai principi alle leggi

lagrangiane-aspetti quantistici

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Riscriviamo la lagrangiana precedente con $m=1/\lambda$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

Altri termini non cinetici, in φ o con altri campi rappresenteranno interazioni

Dai principi alle leggi
lagrangiane-aspetti quantistici

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Riscriviamo la lagrangiana precedente con *m=1/λ*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

Termine cinetico

Termine di massa: è sempre un potenziale armonico «intrinseco»

Altri termini non cinetici, in φ o con altri campi rappresenteranno interazioni

Dai principi alle leggi
lagrangiane-aspetti quantistici

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Ricapitolando e generalizzando

Se abbiamo due campi massivi φ e A la lagrangiana che fornisce le equazioni del moto per questi due campi sarà data in generale da

$$\mathcal{L} = (cin.\,\varphi\,(derivate)) + (cin.\,A\,(derivate)) - \frac{1}{2}m_{\varphi}^{2}\varphi^{2} - \frac{1}{2}m_{A}^{2}A^{2} + [\varphi^{3},\ \varphi^{4}, \ldots A^{3},\ A^{4}, \ldots \varphi^{n}A^{m}, \ldots]$$

Termini di interazione

Termini di massa

Dai principi alle leggi
lagrangiane-leggi di conservazione

Nella fisica newtoniana si cercano le forze che determinino le equazioni del moto che descrivono i fenomeni

La stessa determinazione delle equazioni del moto «giuste» può essere fatta anche senza conoscere le forze, ma cercando direttamente la lagrangiana appropriata, come sempre con un operazione di induzione dai risultati sperimentali

Da cosa ci facciamo guidare?

Teorema di Noether:

Lagrangiana invariante sotto un gruppo continuo di trasformazioni

$\downarrow$

Esiste una grandezza conservata localmente

Dai principi alle leggi

lagrangiane-leggi di conservazione

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Noi partiremo dalle quantità conservate e cercheremo euristicamente lagrangiane con simmetrie che portino a quelle conservazioni

Poi si metteremo alla prova le lagrangiane (come Newton ha messo alla prova la sua formula per la forza di gravitazione)