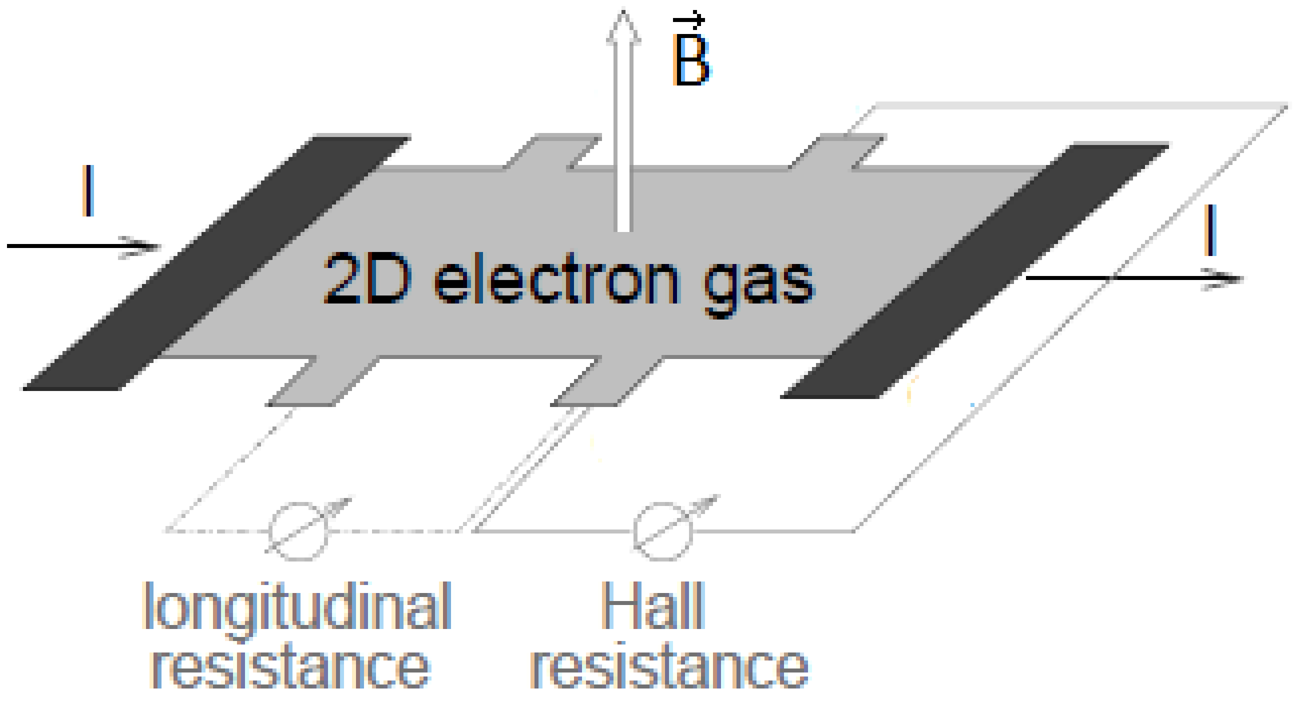
Efeito de Hall Quântico

Frederico Sousa

Gonçalo Catarina

Sistema físico



Resultados a reter

Na presença de um campo manético os níveis de energia ficam quantizados (Níveis de Landau):

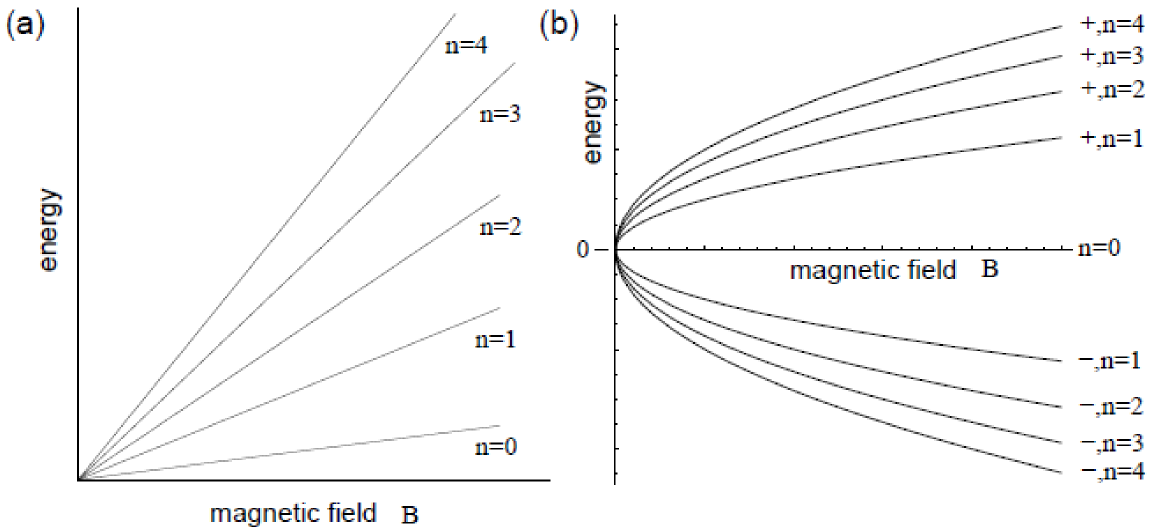
$$\epsilon_n = \hbar\omega_C\left(n+\frac{1}{2}\right)$$ com $$\omega_c = \hbar/m_b l_B^2 = \frac{eB}{m_b}$$

Caso relativista: $$\epsilon_{\lambda,n} = \lambda\frac{\hbar v}{l_B}\sqrt{2n}\ ,\quad \lambda = \pm$$

Degenerescência:

$$N_B = n_B \times \mathcal{A},\quad n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{B}{h/e},$$

$$\nu = \frac{N_{el}}{N_B} = \frac{n_{el}}{n_B} = \frac{h n_{el}}{eB}$$



LL's não relativistas – a)
LL's relativistas – b)

Efeito de um Potencial Electrostático

Potencial devido às impurezas varia suavemente $|\nabla V| \ll \frac{\hbar\omega_c}{l_B}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^B + \mathrm{V}(\boldsymbol{R})$$

$\boldsymbol{R}$ - centro guia da órbita ciclotrónica

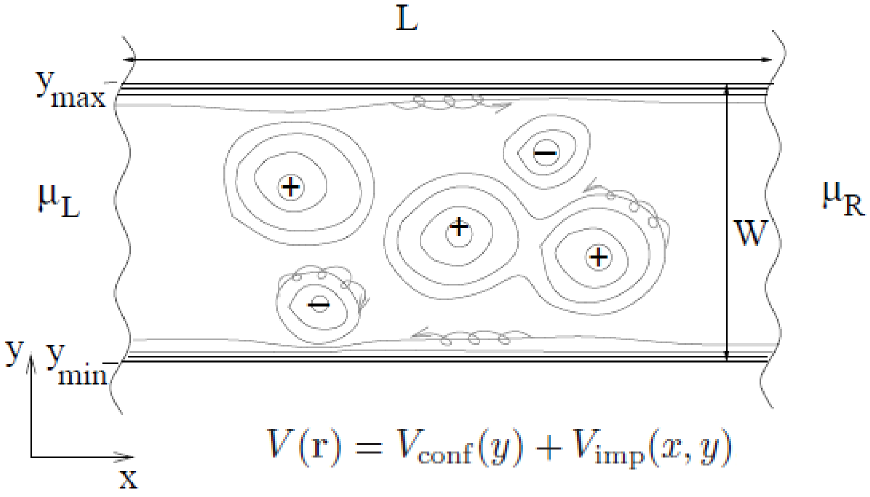
$$i\hbar\dot{X} = [X, \mathcal{H}] = [X, V(\boldsymbol{R})] = \frac{\partial V}{\partial Y}[X, Y] = i l_B^2 \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$i\hbar\dot{Y} = [Y, \mathcal{H}] = [Y, V(\boldsymbol{R})] = \frac{\partial V}{\partial X}[Y, X] = -i l_B^2 \frac{\partial V}{\partial X}$$

$\Rightarrow$

Hall Drift

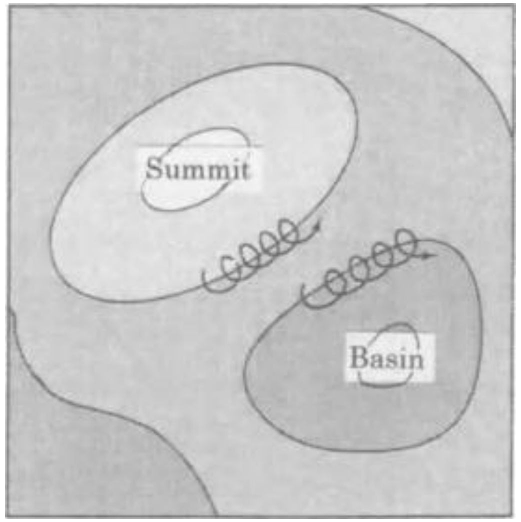
$$\langle\dot{\boldsymbol{R}}\rangle = \boldsymbol{v}_D = \frac{-\nabla V \times \boldsymbol{B}}{eB^2} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2}$$



$V(\mathrm{r}) = V_{\mathrm{conf}}(y) + V_{\mathrm{imp}}(x, y)$

Os electrões movem-se ao longo das
linhas equipotenciais criadas pelas impurezas

Localização dos Electrões

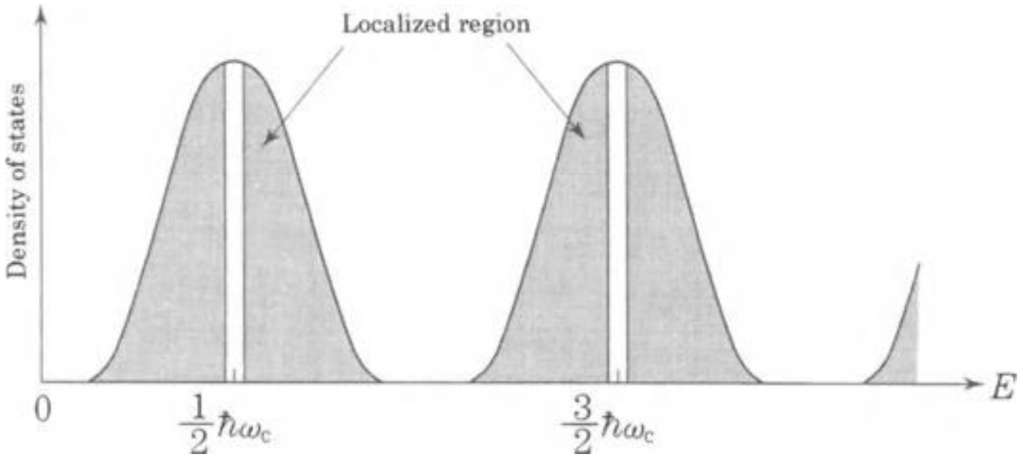


As linhas equipotenciais são, na grande maioria, fechadas, em torno de máximos e mínimos criados pelas impurezas. Os electrões descrevem então órbitas fechadas, ficando localizados numa pequena região do material, não contribuindo para os processos de transporte.

A única hipótese para a não localização é uma energia intermédia entre máximos e mínimos.

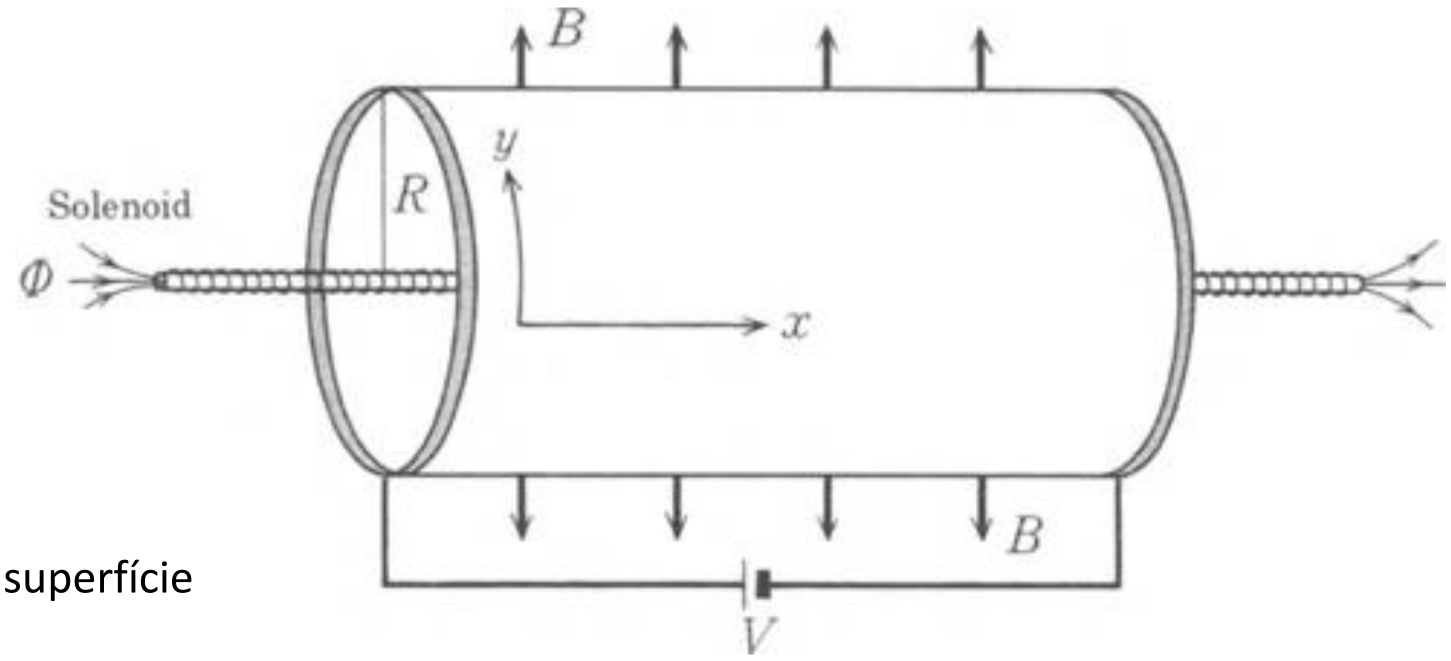
Apenas uma pequena fração dos estados não está localizada.

De resultados numéricos temos um estado não localizado por cada nível de Landau.



Laughlin's Gedankenexperiment

Experiência pensamento para explicar a quantização da resistividade de Hall



Potencial vector na superfície do cilindro:

Devido ao campo magnético B $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$

Devido ao fluxo Φ $\boldsymbol{A}_\Phi = \left(0, -\frac{\Phi}{2\pi R}, 0\right)$

O que acontece se mudarmos o fluxo Φ?

Ora, como o campo magnético não depende do fluxo, mudá-lo corresponde a uma transformação de gauge:

$$\Phi \to \Phi + \Delta\Phi \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\Theta \quad , \quad \Theta(y) = \frac{\Delta\Phi}{2\pi R}y \qquad \varphi(x,y) \to \varphi(x,y)exp\left(-ie\frac{\Theta(y)}{\hbar}\right)$$

Consideremos então dois casos distintos:

1) Os estados electrónicos estão não localizados. Neste caso, temos que assegurar que $\varphi(x,y) = \varphi(x, y + 2\pi R)$

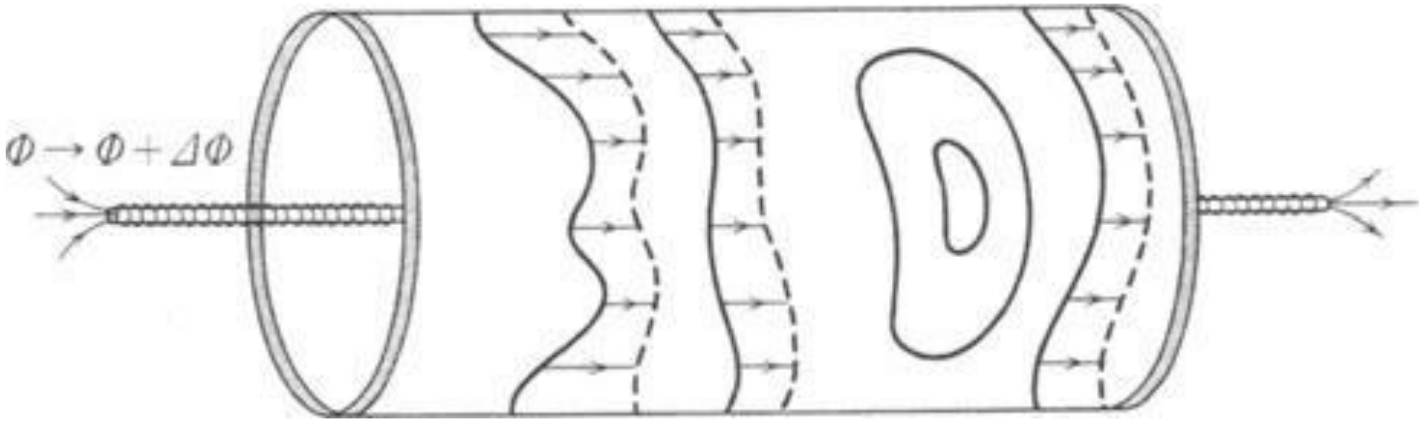
Neste caso, a transformação de gauge implica $e\Delta\Phi = 2\pi\hbar\, n \Longrightarrow \ \Delta\Phi = n\frac{h}{e}$

E assim, uma transformação de gauge continua não é permitida. Ao aplicarmos uma mudança continua ao fluxo vemos pelo potencial vector $\boldsymbol{A} = \left(0, B\left(x - \frac{\Phi}{2\pi RB}\right), 0\right)$, que isso corresponde a um shift da função de onda segundo a direção x.

2) Os estados localizados. Estes não obedecem à condição de continuidade anterior, pelo que uma mudança no fluxo continua é permitida e o resultado é apenas as funções de onde ganharem uma fase.

Em suma o efeito da mudança de fluxo é transportar as funções de onda não localizadas ao longo do cilindro.

As funções de onda têm uma forma segundo x e estão centradas num centro de coordenadas X separados por uma distância constante.



À medida que variamos o fluxo os electrões vão sendo "transportados". Uma mudança de h/e corresponde a passar o centro de órbita para onde estava o da próxima. Chega uma altura que os electrões do final do cilindro passam para o eléctrodo e entram electrões para o cilindro para preencher os estados livres.

Este transporte custa uma energia $\Delta E = -eVN$, sendo V a diferença de potencial entre os eléctrodos e N é o número de estados não localizados, que, como já vimos, é igual ao número de níveis de Landau ocupados.

Assim, desde que o nível de Fermi se encontre entre os mesmos níveis da Landau, esta energia não muda.

Podemos então calcular a corrente:

$$j_y = \left\langle \sum_i -\frac{e}{m}\left[p_{i_y} + eA_y\right] \right\rangle \frac{1}{2\pi RL} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \Phi} \sum_i \left(\frac{1}{2m}\left[{p_{i_x}}^2 + \left(p_{i_y} + eB\left(x - \frac{\Phi}{2\pi RB} \right) \right)^2 \right] + V_{imp} \right) \right\rangle \frac{1}{L}$$

$$= \frac{1}{L}\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} \right\rangle$$

$$j_y = \frac{1}{L}\frac{\partial E}{\partial \Phi}$$

Calculamos esta derivada com diferenças finitas: $$j_y = -\frac{1}{L}\frac{eVN}{h/e} = -N\frac{e^2}{h}\frac{V}{L} = N\frac{e^2}{h}E_x$$

E obtemos finalmente: $$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}$$

IQHE - alternativa

Nível de Landau ‘n’ totalmente preenchido

$$I_n^x = -\frac{e}{L}\sum_k \langle n,k|v_x|n,k\rangle$$

$$\langle n,k|v_x|n,k\rangle = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \epsilon_{n,k}}{\partial k} = \frac{L}{h}(\epsilon_{n,m+1}-\epsilon_{n,m})$$

$$I_n = -\frac{e}{L}\sum_m \frac{L}{h}(\epsilon_{n,m+1}-\epsilon_{n,m}) = -\frac{e}{h}(\mu_{max}-\mu_{min}) = \frac{e^2}{h}V.$$

$$\Rightarrow \quad G = \sum_{n'=0}^{n-1} G_{n'} = n\frac{e^2}{h}$$

Nível não totalmente preenchido: