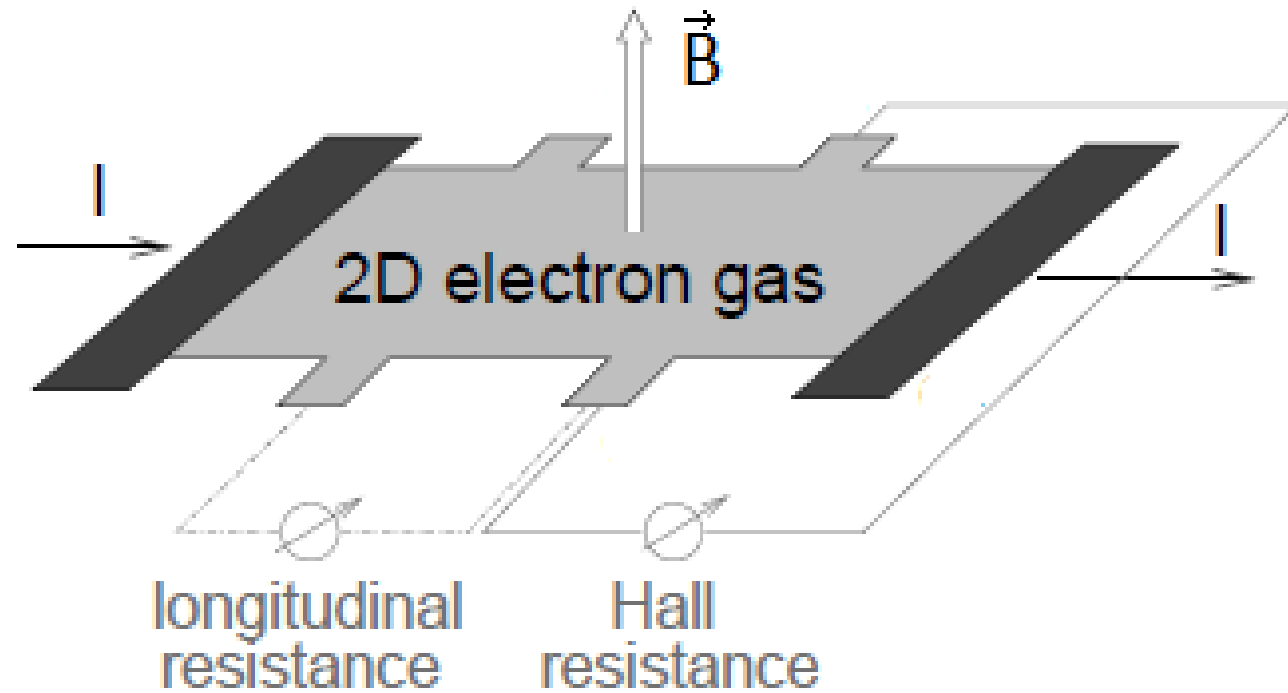


Efeito de Hall quântico

Frederico Sousa

Gonçalo Catarina

Sistema físico



Efeito de Hall clássico

Modelo de Drude:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m_b} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau},$$

τ -> tempo característico de relaxação (impurezas)

Solução estática ($d\mathbf{p}/dt = 0$) a 2D:

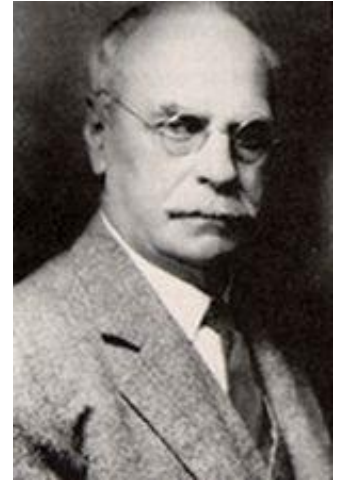
Usando $\mathbf{j} = -en_{el} \frac{\mathbf{p}}{m_b}$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} \mathbf{j} \quad (\text{forma matricial!})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \mu B \\ -\mu B & 1 \end{pmatrix} \quad \text{com}$$

$$\sigma_0 = \frac{n_{el} e^2 \tau}{m_b} \quad (\text{condutividade de Drude})$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m_b} \quad (\text{mobilidade})$$



Edwin Hall
1879

Efeito de Hall clássico

Limite sem impurezas ($\tau \rightarrow \infty$):

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B}{en_{el}} \\ -\frac{B}{en_{el}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_H = \frac{B}{en_{el}}$$

Resistência (o que se mede experimentalmente) \neq resistividade:

$$R = (L/A)\rho \Rightarrow R \sim \rho L^{2-d} \Rightarrow d=2 \text{ é especial (carácter topológico)}$$

Aplicação: Sonda de Hall



Efeito de Hall quântico inteiro (IQHE)

Previsto por Ando, Matsumoto, e Uemura em 1975

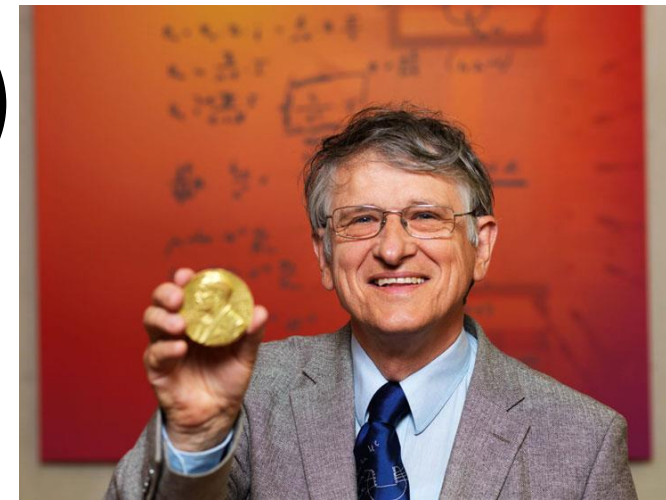
Descoberto experimentalmente por Klaus von Klitzing em 1980

Sistemas bidimensionais a baixas temperaturas e sujeitos a fortes campos magnéticos transversos.

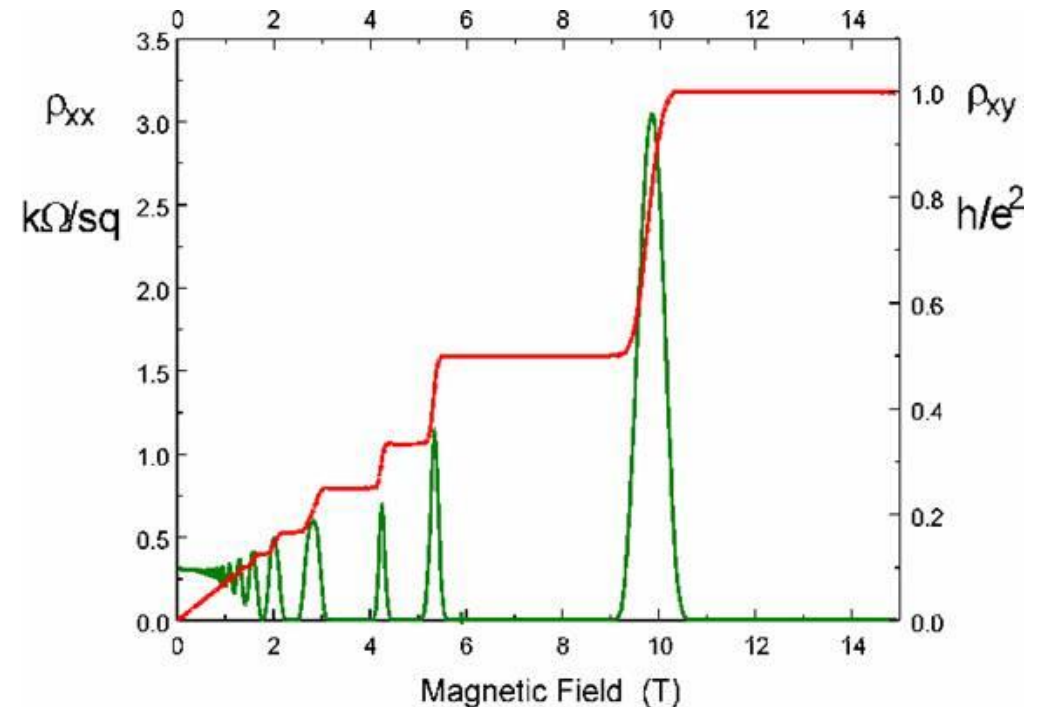
Quantização exata da condutividade de Hall:

$$\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h}$$

Não depende das propriedades do material !!!!



Klaus von Klitzing
Nobel da Física 1985



Efeito de Hall quântico fraccionário (FQHE)

Observação de novos patamares da condutividade de Hall: $\nu \frac{e^2}{h}$ com ν fracionário

Temperaturas extremamente baixas ($\sim 1K$), em sistemas muito “limpos” (elevada mobilidade)

Nobel da Física de 1998 para Robert Laughlin, Horst Störmer e Daniel Tsui pela explicação dos plateaus $\nu = \frac{1}{m}$, com m ímpar



Interações entre os electrões são a essência deste fenómeno.

Níveis de Landau (LL's)

↳ quantização da energia cinética de uma partícula livre a 2D num campo magnético transverso

Acoplamento mínimo: $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$

Hamiltonianos:

Não-relativista: $H_S^B = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m_b}$

Relativista: $H_D^B = v[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot \boldsymbol{\sigma}$ (Aplicação: tight-binding no grafeno nos vértices da 1ªBZ)

Comutador:

Propriedade matemática: $[\mathcal{O}_0, f(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_J)] = \sum_{j=1}^J \frac{\partial f}{\partial \mathcal{O}_j} [\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j]$ \Rightarrow
se $[[\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j], \mathcal{O}_0] = [[\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_j], \mathcal{O}_j] = 0$ para todo $j=1,2,\dots,J$

$\Rightarrow [\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{\hbar^2}{l_B^2}$ com $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ (comprimento magnético)

Níveis de Landau (LL's)

Tratamento quântico:

Não-relativista:

Algo familiar: $H_S^B = \frac{1}{2m_b} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2)$ $[\Pi_x, \Pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l_B^2}$ Hamiltoniano com a mesma estrutura do oscilador harmónico! \Rightarrow

\Rightarrow Introduzimos operadores de escada (subida e descida):
 $a = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\Pi_x - i\Pi_y)$ $[a, a^\dagger] = 1$
 $a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\Pi_x + i\Pi_y)$ que respeitam $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ \Rightarrow
 $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

\Rightarrow $H_S^B = \hbar\omega_C \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$ com $\omega_C = \hbar/m_b l_B^2 = \frac{eB}{m_b}$ (frequência ciclotrónica)

$\epsilon_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right)$ (LL's)

Níveis de Landau (LL's)

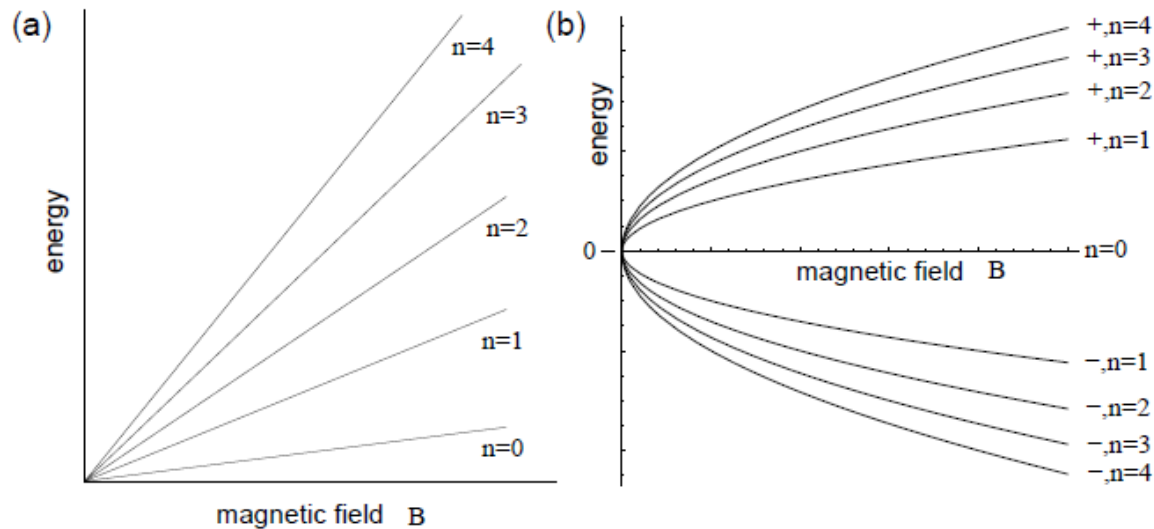
Tratamento quântico:

Relativista:

$$H_D^B = \sqrt{2} \frac{\hbar v}{l_B} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon_{\lambda,n} = \lambda \frac{\hbar v}{l_B} \sqrt{2n}$$

(valores próprios)

Comparação:



LL's não relativistas – a)
LL's relativistas – b)

Degenerescência dos LL's

Os Hamiltonianos escritos inicialmente dependem de 2 pares de operadores conjugados: x e p_x , y e p_y

$$H_S^B = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2}{2m_b} \quad H_D^B = v[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})] \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

No entanto, quando escritos em termos dos operadores de escada, dependem apenas de 1: a e a^\dagger

$$H_S^B = \hbar\omega_C \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad H_D^B = \sqrt{2} \frac{\hbar v}{l_B} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

Devemos portanto procurar um 2º par de operadores conjugados (que tem necessariamente de comutar com o Hamiltoniano!)

$$\mathbf{K} = \mathbf{p} + e(\mathbf{A} + \mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{K}, H] = \mathbf{0}$$

Mas $[K_x, K_y] = i \frac{\hbar^2}{l_B^2} \neq 0$ (fase de Aharonov-Bohm)

Em analogia ao caso clássico:

$$\mathbf{r} = \left(X + \frac{l^2}{\hbar} \Pi_y, Y - \frac{l^2}{\hbar} \Pi_x \right)$$

Notação:

$$l \equiv l_B$$

X e Y são as coordenadas do centro guia e obedecem a: $[X, Y] = il^2$

Comutam com o Hamiltoniano pois: $K_x = eBY$; $K_y = -eBX$. Podemos usá-los para distinguir diferentes níveis de energia.

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}l} (X + iY)$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l} (X - iY)$$

$$L_z = \hbar(a^\dagger a - b^\dagger b) \implies L_z |n, m\rangle = \hbar(n - m) |n, m\rangle$$

Na gauge simétrica $A = \left(-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0 \right)$

Função de onda

Vamos escrever estes operadores na base das posições:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}l} \left[-\frac{i}{2}(x - iy) - il^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}l} \left[\frac{1}{2}(x + iy) + l^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]$$

Usando $z = \frac{x-iy}{l}$:

$$a = -i\sqrt{2}e^{-|z|^2/4} \frac{\partial}{\partial z^*} e^{|z|^2/4}$$

$$b = \sqrt{2}e^{-|z|^2/4} \frac{\partial}{\partial z} e^{|z|^2/4}$$

$$a^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-|z|^2/4} \left(z^* - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{|z|^2/4}$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|z|^2/4} \left(z - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) e^{|z|^2/4}$$

Função de onda: $\phi_{nm}(\mathbf{r}) = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \phi_{00}(\mathbf{r})$

$$\phi_{00}(\mathbf{r}) = ?$$

A determinação de ϕ_{00} faz-se resolvendo as equações diferenciais: $a|00\rangle = b|00\rangle = 0$ e normalizando.

$$\phi_{00}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} e^{-\frac{|z|^2}{4}}$$

A função de onda geral é (depois de “alguma” álgebra):

$$\phi_{nm}(\mathbf{r}) = C_{nm} \exp\left(i(n-m)\theta - \frac{r^2}{4l_B^2}\right) \left(\frac{r}{l_B}\right)^{|n-m|} L_{(n+m-|n-m|)/2}^{|n-m|}\left(\frac{r^2}{2l_B^2}\right)$$

$L_b^a(x)$ são os polinómios generalizados de Laguerre e C_{nm} constantes de normalização.

Estado fundamental

É o estado com mais peso e aquele no qual estaremos mais interessados:

$$\varphi_{0,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^m m!} l} z^m e^{-|z|^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^m m!} l} \left(\frac{x - iy}{l} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{4l^2}\right)$$

Máximo de probabilidade para $r = \sqrt{2ml}$

O estado $|0m\rangle$ é visto como uma combinação de várias órbitas ciclotrônicas de raio l contidas numa circunferência de raio $r = \sqrt{2ml}$

$$\langle r^2 \rangle = 2(m+1)l^2$$

Degenerescência

Numa área de raio R temos para o estado de maior $m \equiv M$

$$\pi R^2 = S = \pi 2(M + 1)l^2$$

$$M \gg 1 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{S}{2\pi l^2}$$

