Interacção Radiação-Matéria

João Seabra

Revisões

Mecânica Analítica

- **Equação de Lagrange**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial qk} = 0$$

- **Considera-se um Lagrangeano $\boldsymbol{L \equiv L(q_k, \dot{q}_k)}$:**

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial qk}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{dt}\right)$$

Revisões

- **Constante do movimento:**

$$L - \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

- **Momento conjugado:**

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

- **O Hamiltoniano $\mathcal{H}$ é então definido por:**

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k p_k - L}$$

Revisões

Electrodinâmica Clássica

- **Relação entre os campos e os potenciais electromagnéticos**

$$\boldsymbol{B} = [\nabla \times \boldsymbol{A}]$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

- **Força de Lorentz**

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}])$$

Usando as relações anteriores:

$$\boldsymbol{F} = q\left(-\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \left[\boldsymbol{v} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}]\right]\right)$$

Revisões

- **Potencial electromagnético**
$$U_{em} = q(V - (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{A}))$$

- $\boldsymbol{F} = -\nabla Uem + \frac{d}{dt}(\nabla_{\boldsymbol{v}} U_{em})$

- **Lagrangeano electromagnético:**
$$L = T - U_0 - Uem = \frac{1}{2}mv^2 - U_0 - qV + q(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{A})$$

- $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$

Revisões

- $$\mathcal{H} = (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{p}) - L = \mathrm{m}v^2 + q(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{A}) - L$$
  $$= \frac{1}{2}mv^2 + U_0 + qV$$
  $$= \frac{(p-qA)^2}{2m} + U_0 + qV$$

- **Regra da substituição mínima: Na presença de um campo electromagnético, devem ser feitas as seguintes substituições:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} \\ \mathcal{H} \to \mathcal{H} + qV \end{array}}$$

Eq. de Schrodinger: electrão num campo e.m.

- **Equação de Schrodinger:**

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi = \left(\frac{(-i\hbar\nabla + e\boldsymbol{A})^2}{2m} - eV\right)\psi$$

- **Considerando o campo magnético constante, pretende-se resolver a equação:**

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{ie\hbar}{m}(\boldsymbol{A}.\nabla\psi) + \frac{e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2\psi - eV\psi = E\psi}$$

Eq. de Schrodinger: electrão num campo e.m.

- $\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}]$
- **O campo magnético é alinhado na direcção de z**

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2me}\nabla^2\psi - \frac{e}{2m_e}B\hbar m\psi + \frac{e^2B^2}{8m_e}(x^2 + y^2)\psi - eV\psi = E\psi}$$

Eq. de Schrodinger: electrão num campo e.m.

- **Resolve-se o problema em coordenadas cilíndricas, com:**

$$x = \rho\cos(\phi)\,;\, \mathrm{y} = \rho\sin(\phi)$$

- $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- $\psi(\boldsymbol{r}) = u(\rho)e^{im\phi}e^{ikz}$

$$\frac{d^2u_m}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_m}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}u_m - \frac{e^2B^2}{4\hbar^2}\rho^2u_m + \left(\frac{2m_eE}{\hbar^2} - \frac{eB\hbar m}{\hbar^2} - k^2\right)u_m = 0$$

Eq. de Schrodinger: electrão num campo e.m.

- **Mudança de variável:** $x = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar}}\rho$

$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du_m}{dx} - \frac{m^2}{x^2}u_m - x^2 u_m + \lambda u_m = 0$$

- $u(x) = x^{|m|} e^{-\frac{x^2}{2}} G(x)$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left(\frac{2|m| + 1}{x} - 2x\right)\frac{dG}{dx} + (\lambda - 2 - 2|m|)\, G = 0$$

Eq. de Schrodinger: electrão num campo e.m.

- **Mudança de variável:** $y = x^2$

$$\frac{d^2G}{dy^2} + \left(\frac{|m| + 1}{y} - 1\right)\frac{dG}{dy} + \frac{\lambda - 2 - 2|m|}{4y} G = 0$$

- $G(x) = \sum_j c_j \, y^j$

$$\boxed{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = \frac{eB\hbar}{2m_e}(2n_r + 1 + |m| + m)}$$