Instituto Superior Técnico

Short course on Group Theory in Quantum Mechanics

DAVID EMMANUEL-COSTA

- 20/07/2015 às 14h30
- 22/07/2015 às 14h30
- 24/07/2015 às 10h
- 27/07/2015 às 14h30

1) INTRODUÇÃO

$$|\psi(t)\rangle \xrightarrow[U(\Delta t)]{} |\psi(t+\Delta t)\rangle$$ → operador evolução

$$\underbrace{U(t,t_0) = e^{-i(t-t_0)\hat{H}} = 1 - i(t-t_0)\hat{H} + O(\hat{H}^2)}_{\text{Schrödinger Picture.}}$$

Lei de simetria

1) Existe um conjunto de transformações S_α

- α pode ser finito (discreto) ou contínuo

$$|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_0'\rangle = S_\alpha |\psi_0\rangle$$

2) comuta com o operador evolução

$\boxed{t_0 = 0}$

$$\begin{array}{ccc} |\psi_0\rangle & \xrightarrow[U(t)]{} & |\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle \\ \downarrow S_\alpha & & \downarrow S_\alpha \\ |\psi_0'\rangle & \xrightarrow[U(t)]{} & |\psi'(t)\rangle = U(t)|\psi_0'\rangle \end{array}$$

$\Rightarrow [U(t), S_\alpha] = 0$ i.e., a simetria não interfere na evolução

- sistema completo $\{|i\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \alpha_i |i\rangle \quad \text{and} \quad \sum_i |i\rangle\langle i| = \mathbb{1}$$

$$|i'\rangle = S_\alpha |i\rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_{i'} |i'\rangle\langle i'| = S_\alpha |i\rangle\langle i| S_\alpha^\dagger$$

$$\langle i'| = \langle i| S_\alpha^\dagger \quad \Rightarrow \qquad = S_\alpha S_\alpha^\dagger = 1$$

se exigirmos que o sistema resultante é

S_α must be unitary!

- Manter o princípio de sobreposição

$$\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \longrightarrow \alpha|\psi_1'\rangle + \beta|\psi_2'\rangle$$

$\Rightarrow$ S_α tem de ser um operador linear unitário

$$S_\alpha^\dagger S_\alpha = S_\alpha S_\alpha^\dagger = \mathbb{1}$$

$\mathbb{1}$ = operador identidade $\left(|\psi'\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = |\psi\rangle \right)$
e é um operador de simetria (unitário).

$\mathbb{1} \in \{S_\alpha\}$ $\quad$ S_α tem então uma estrutura com elemento neutro e elemento inverso.

$$S_\alpha S_\beta\,? \quad \Rightarrow \quad (S_\alpha S_\beta)|\psi\rangle \equiv S_\alpha \underbrace{(S_\beta|\psi\rangle)}_{\in \text{ espaço vectorial}}$$

$$(S_\alpha S_\beta) S_\gamma = S_\alpha (S_\beta S_\gamma)$$

propriedade associativa
(toda a composição tem essa propriedade)

outra pergunta?

Será o producto $S_\alpha S_\beta$ uma transformação de simetria?

$$[U(t), S_\alpha S_\beta] = [U(t), S_\alpha] S_\beta + S_\alpha [U(t), S_\beta] = 0!$$

qualquer polinómio $P(S_\alpha)$ obedece a

$$[U(t), P(S_\alpha)] = 0$$

Façamos todos os produtos $\underbrace{S_\alpha S_\beta \cdots S_\gamma}_{m \text{ elementos}}$ e construímos assim um conjunto de operadores lineares unitários (porquê?)

$$\mathcal{V} \equiv \{ S_\alpha, \ldots, S_\alpha S_\beta \ldots S_\gamma, \ldots \}$$

o par $(\mathcal{V}, \cdot)$ ↳ produto de operadores lineares (composição)

temos as seguintes propriedades:

i) $S_\alpha S_\beta \in \mathcal{V}$ (fecho)

ii) $S_\alpha (S_\beta S_\gamma) = (S_\alpha S_\beta) S_\gamma$ (associatividade)

iii) $\mathbb{1} \in \mathcal{V}$: $\mathbb{1} \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot \mathbb{1} = S_\alpha$ (elemento neutro)

iv) $\forall S_\alpha \; \exists S_\alpha^\dagger$ $S_\alpha^\dagger S_\alpha = S_\alpha S_\alpha^\dagger = \mathbb{1}$ (elemento inverso)

$\Longrightarrow$ $(\mathcal{V}, \cdot)$ é um grupo!

Claro que temos mais operações:

$$S_\alpha + S_\beta \quad e \quad a S_\alpha$$

$$(aS_\alpha + bS_\beta)|\psi\rangle = \underbrace{a(S_\alpha|\psi\rangle) + b(S_\beta|\psi\rangle)}_{\in \mathcal{V}}$$

G conjunto de todos os operadores lineares não singulares $\mathcal{G}$ com a composição e/ou a adição forma um grupo

$$(\mathcal{G}, \cdot) \; ; \; (\mathcal{G}, +)$$

ou seja $(G, \cdot)$ é um grupo se

i) $g_1, g_2 \in G$; $g_1 g_2 \in G$

ii) $g_1, g_2, g_3 \in G$; $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$

iii) $\exists e \in G$: $ge = eg = g \quad \forall g \in G$

iiii) $\forall g \; \exists g^{-1}$ $\quad gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Heisenberg Picture

$$S_\alpha = \exp(i \underbrace{x_i G_i}_{\hat{G}})$$

$$\hat{G} = x_i \hat{G}_i$$

Hermíticos

$$[\hat{H}, \hat{G}] = 0$$

O que na picture de $\dfrac{d\hat{G}}{dt} = 0$

$\hat{G}$ é uma espécie de Carga!

$(\mathcal{U}, \cdot)$ grupo de simetria

$(G, \cdot)$ grupo genérico (abstracto)

Que relação?

se conseguirmos uma relação tal:

$$g \in G \longrightarrow U(g) \in \mathcal{U} \quad \text{(homomorfismo)}$$

e $$\underbrace{U(g.g')}_{\text{em } G} = \underbrace{U(g).U(g')}_{\text{em}}$$

Dizemos que temos uma representação.
a dimensão é igual à dimensão do espaço-vectorial

$$|\psi\rangle \in V \Rightarrow U(g)|\psi\rangle \in V$$

$$\left.g \in \mathcal{U} \xleftrightarrow[\text{bijectiva}]{} U(g) \in \mathcal{U}\right] \quad \underline{\text{isomorfismo}}$$

$$\Downarrow$$

$$G \simeq \mathcal{U}$$

Exemplo mais simples

$$\forall g \in G : \quad U(g) = \mathbb{1} \quad \text{representação trivial}$$

E se tivermos uma base completa em V

$$|\psi\rangle = c_i |i\rangle \qquad \boxed{\langle i|j\rangle = \delta_{ij}}$$

$$|\psi\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$U(g) \longleftrightarrow M(g)_{mn}$ matriz

$S|i\rangle = M_{ji}|j\rangle$

$\langle i|S|j\rangle = \langle i|M_{kj}|k\rangle = M_{ij}$

$M(g)M(g') = ?$

$M(g)M(g')|i\rangle = M(g)\left(M(g')_{ji}|j\rangle\right)$

$= M_{ji}(g')\, M_{kj}(g)|k\rangle = M(g)_{kj}M(g')_{ji}\,|k\rangle$

$= \left(M(g)M(g')\right)_{ki}|k\rangle = \left[M(g)M(g')\right]|i\rangle$

$$\boxed{M(g)M(g') = M(gg')}$$

Representação matricial

Exemplo

$G = \{e, a\}$ a única possibilidade é

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

Assim qualquer paridade

$P|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ e $P|\psi'\rangle = |\psi\rangle$

$\Longrightarrow P^2 = \mathbb{1}$

$P(a)P(a) = \mathbb{1} = P(a^2)$

$U(e) = \mathbb{1}$, $U(g^{-1}) = U(g)^{-1}$