Exemplo 2) um grupo com 3 elementos

$$G = \{e, a, b\} = \{e, a^2, a\}$$

R: só existe uma possibilidade:

$$b = a^2 \quad , \quad ba = e \quad , \quad a^3 = b^3 = e$$

$T q_1 = q_2$ $\qquad q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T q_2 = q_3$

$T q_3 = q_1 \qquad T \to M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{aligned} T^2 q_1 &= T q_2 = q_3 \\ T^2 q_2 &= T q_3 = q_1 \\ T^2 q_3 &= T q_1 = q_2 \end{aligned}$

$a \Leftrightarrow T \Leftrightarrow M$ é um isomorfismo

representação (T) — representação matricial (M)

$$M(a) \cdot M(a) \cdot M(a) = M(a^3) = M(e) = \mathbb{1}$$

Exemplo 3) Grupo cíclico $C_4 = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$

$a^4 = e$ é semelhante a $i^4 = 1$

$a \cdot a \to -1$

$a \cdot a \cdot a \to -i$

$C_4 \simeq \{1, -1, i, -i\} \qquad \{1, -1\} \in C_2 \Rightarrow C_2 \subset C_4$

$|\psi'\rangle = U(g)|\psi\rangle \underset{C_4}{\Rightarrow} |\psi'\rangle = U(a)|\psi\rangle = i|\psi\rangle$

$|\psi''\rangle = U(a^3)|\psi\rangle = -i|\psi\rangle$

Podemos ter uma representação real?

sim

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow i$$

uma representação complexa

$$\downarrow$$

$$C_n = \{a, a^2, \dots, a^n = e\}$$

$$\downarrow$$

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2, \dots, \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = 1$$

$$z = a + ib \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$iz = -b + ai \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ representação bidimensional.

Noção de sub-espaço invariante

$\forall_{g \in G}: U(g)|\psi\rangle \in V'$

$|\psi\rangle \in V' \subset V$

$\dim(V) = n \longrightarrow$ uma base $\{|i\rangle\}$ $\quad \langle i|i'\rangle = \delta_{ii'}$

Seja $\{|j\rangle\}$ a base de V' $\quad \#\{|j\rangle\} = m$

$$U(g)|\psi\rangle \in V'$$
$$\notin V''$$

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & U_2(g) \\ 0 & U_3(g) \end{pmatrix}$$

$$U(g)U(g') = \begin{pmatrix} U_1(g)U_1(g') & U_1(g)U_2(g') + U_2(g)U_3(g') \\ & U_3(g)U_3(g') \end{pmatrix}$$

Concluímos que

$$U_1(gg') = U_1(g)U(g')$$

$$U_3(gg') = U_3(g)U_3(g')$$

e o que se passa com $U_2(g)$?

R: Resposta: quando $U(g)$ é unitário $U_2(g) = 0$!

$|\psi\rangle \in V'$, $|\chi\rangle \in V''$

$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + \dots + c_m|m\rangle$

$|\chi\rangle = c_{m+1}|m+1\rangle + \dots + c_n|n\rangle$

$$\langle\psi|\chi\rangle = 0, \text{ why?}$$

$U(g)|\chi\rangle$ e $U(g)|\psi\rangle$ são também ortogonais

Logo se $U(g)$ é reducível, é o completamente reducível

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & U_p(g) \end{pmatrix}$$

De facto $U(g)$ pode ñ parecer reducível mas, se o for existe uma <u>Base</u> tal

$$S^{-1} U(g) S = \mathrm{diag}\{U_1(g), \dots, U_p(g)\}, \quad \forall g \in G$$

Por outro lado duas representações são equivalentes

existir um S tal

$$S^{-1} U(g) S = U'(g) \quad \forall g \in G.$$

Pergunta será que tendo ~~U~~$M(g)$ não unitário se pode ter $\forall g \in G$, $S^{-1} M(g) S = U(g)$ onde

$U(g)$ seja unitário?

Resposta: Para grupos discretos e de Lie Sempre

Segredo:
$$\sum_g f(g_1 g) = \sum_g f(g)$$

$$\int_S f(g_1 g)\, dg = \int_S f(g) \mu(g)\, dg$$

ou $\mu(g_1 g)\, dg = \mu(g)\, dg$ = medida invariante

Permutações

$n \in \mathbb{N}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad p_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

e $p_i = p_j \Rightarrow i = j$!

Significa $p(1) = p_1$.

Exemplo: $n = 7$ $\qquad \# S_n = n!$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = (1\,3\,4\,7)(5\,2)\,7 = (1\,3\,4\,7)(5\,2)$$

Ciclos $\qquad (2\,3)(4\,5) = (4\,5)(2\,3)$ $\qquad S_n$?

$(1\,2\,3)(4\,3\,5) = (1\,2\,3\,5\,4)$

$(1\,2)(2\,3) = (1\,2\,3)$

Representação:

$$\hat{e}_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_3 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Em $S_3 = \{ e, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

$(12)\,\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$(12)\,\hat{e}_3 = \hat{e}_3$

$$P_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

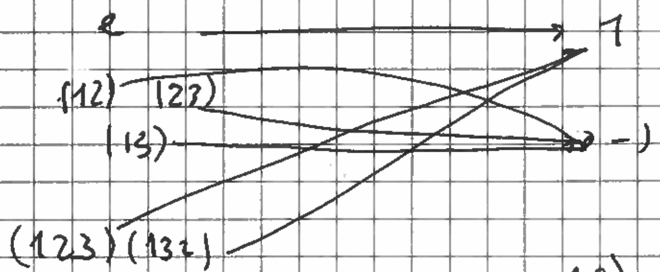
$$P_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, P_{(12)} = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tr}\, P_{(123)} = 0$

$|P_{(12)}| = -1$ $\qquad$ $|P_{(123)}| = |P_{(132)}| = 1$

$|P_g \cdot P_{g'}| = |P_g|\,|P_{g'}| = |P_{gg'}|$

homomorfismo



representação unidimensional 1' não trivial

$\forall g \in S_3 \quad g \to 1$ rep. trivial!

O que acontece se escolher $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$

$P_g|S\rangle = |S\rangle \quad \forall g \in G$, logo temos um sub-espaço invariante.

S_3 só tem 3 ireps $1, 1', 2$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$P_{(123)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P_{(12)} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$