$$U(g)|\psi\rangle \in V'$$
$$\notin V''$$

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & U_2(g) \\ 0 & U_3(g) \end{pmatrix}$$

$$U(g)U(g') = \begin{pmatrix} U_1(g)U_1(g') & U_1(g)U_2(g') + U_2(g)U_3(g') \\ & U_3(g)U_3(g') \end{pmatrix}$$

Concluimos que

$$U_1(gg') = U_1(g)U(g')$$

$$U_3(gg') = U_3(g)U_3(g')$$

e o que se passa com $U_2(g)$?
R: Resposta: quando $U(g)$ é unitário $U_2(g) = 0$!

$|\psi\rangle \in V'$, $|\chi\rangle \in V''$

$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + \cdots + c_m|m\rangle$
$|\chi\rangle = c_{m+1}|m+1\rangle + \cdots + c_n|n\rangle$

$\langle\psi|\chi\rangle = 0$, why?

$U(g)|\chi\rangle$ e $U(g)|\psi\rangle$ são também ortogonais

Logo se $U(g)$ é reducível, e o completamente reducível

$$U(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & & \\ & \ddots & \\ & & U_p(g) \end{pmatrix}$$

De facto $U(g)$ pode não parecer reducível mas, se o for existe uma ~~Base~~ tal

$$S^{-1} U(g) S = \text{diag}\{U_1(g), \dots, U_p(g)\}, \ \forall g \in G$$

Por outro lado duas representações são equivalentes

existir um S tal

$$S^{-1} U(g) S = U'(g) \quad \forall g \in G$$

Pergunta será que tendo $M(g)$ não unitário se pode ter $\forall g \in G$, $S^{-1} M(g) S = U(g)$ onde

$U(g)$ seja unitário?

Resposta: Para grupos discretos e de Lie sempre

Segredo:
$$\sum_g f(g_1 g) = \sum_g f(g)$$

$$\int_S f(g_1 g)\, \mu(g)\, dg = \int_S f(g)\, \mu(g)\, dg$$

ou $\mu(g_1 g)\, dg = \mu(g)\, dg$ = medida invariante

Permutações

$n \in \mathbb{N}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad p_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

e $p_i = p_j \Rightarrow i = j$!

Significa $p(1) = p_1$.

Exemplo: $n = 7$ $\qquad \# S_n = n!$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = (1347)(52)7 = (1347)(52)$$

Ciclos

$(23)(45) = (45)(23)$ $\qquad S_n$?

$(123)(435) = (12354)$

$(12)(23) = (123)$

Representação:

$$\hat{e}_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_3 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Em $S_3 = \{ e, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

$(12)\,\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$(12)\,\hat{e}_3 = \hat{e}_3$

$$P_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{(132)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, P_{(12)} = 1 \qquad \mathrm{tr}\, P_{(123)} = 0$

$|P_{(12)}| = -1 \qquad |P_{(123)}| = |P_{(132)}| = 1$

$$|P_g \cdot P_{g'}| = |P_g|\,|P_{g'}| = |P_{gg'}|$$

homomorfismo

$e \to 1$

$(12),\ (23),\ (13) \to -1$

$(123)\ (132) \to 1$

representação unidimensional $1'$
não trivial

$\forall g \in S_3 \quad g \to 1$ rep. trivial!

O que acontece se escolher $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle)$

$P_g|S\rangle = |S\rangle \quad \forall g \in G$, logo temos um sub-espaço invariante.

S_3 só tem 3 irreps $1, 1', 2$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

$$P_{(123)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P_{(12)} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{ e, (12), (13), (23), (12)(13), (13)(12) \}$

Vamos supor que $U(g)$ é irreducível e existe um operador linear tal $\hat{A}$ tal que

$$\hat{A}U(g) = U(g)\hat{A} \quad \forall g \in G$$

E vamos então demonstrar que $\hat{A} = \lambda \mathbb{1}$.

Supomos que $\hat{A}$ é hermítico (em geral $\hat{A}$ pode ser q̄ operador linear)

$$\hat{A}|\lambda, m\rangle = \lambda|\lambda, m\rangle$$

$$\hat{A}\,U(g)|\lambda, m\rangle = U(g)\hat{A}|\lambda, m\rangle = \lambda U(g)|\lambda, m\rangle$$

$U(g)|\lambda, m\rangle \in \{\{|\lambda, m\rangle\}\}$ espaço gerado por vector próprio

i.e. $|\psi\rangle \in \{\{|\lambda, m\rangle\}\} \Rightarrow |\psi\rangle = c_m|\lambda, m\rangle$

ou seja para os diferentes eigenvalues $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$

Temos $\underbrace{\{\{\lambda_1, m_1\}\}}_{\mathcal{A}_1}, \underbrace{\{\{\lambda_2, m_2\}\}}_{\mathcal{A}_2}, \ldots \underbrace{\{\{\lambda_k, m_k\}\}}_{\mathcal{A}_3}$

e $U(g)|\psi_i\rangle \in \mathcal{A}_i$, com $|\psi_i\rangle \in \mathcal{A}_i$

Temos k espaços invariantes!

Mas $U(g)$ é irredutível $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$

logo $\hat{A} = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\mathrm{tr}\hat{A}}{\dim(R)}$