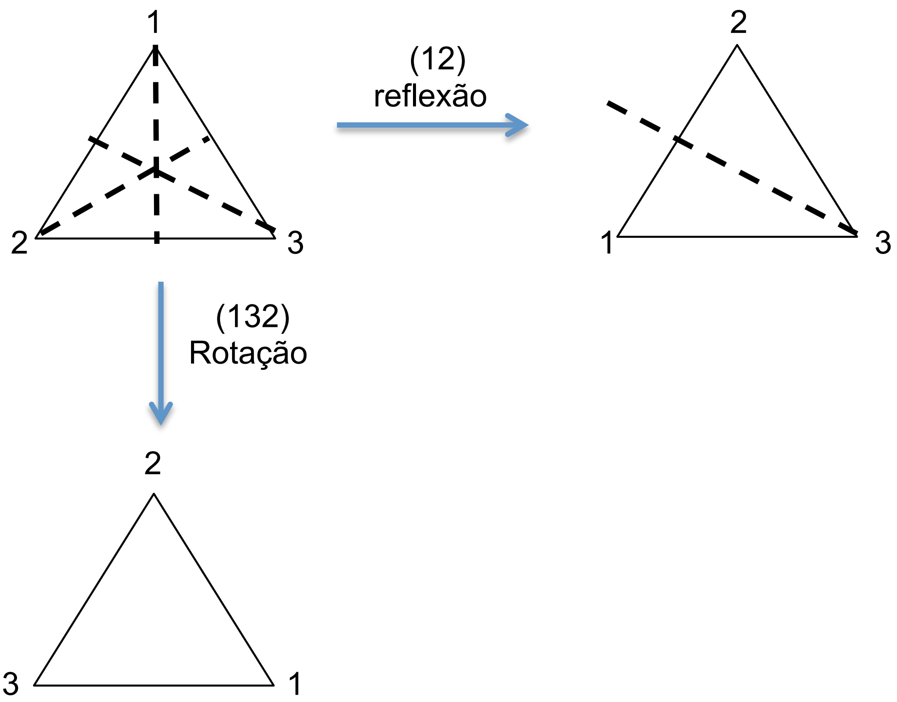
TEORIA DE GRUPOS – SÉRIES DE PROBLEMAS 1

PROBLEMA 1

O grupo D_3 (grupo de simetria de um triângulo equilátero) tem 6 elementos

$$\{e, (12),(13),(23),(123),(132)\}$$

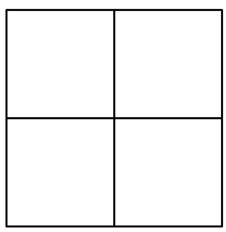
Alguns dos elementos estão representados na figura:



Determine a tabela de multiplicação de D_3 e diga se este é isomorfo a S_3.

PROBLEMA 2

Considere a figura geométrica:



a) Identifique as suas simetrias (grupo D_4).
b) Qual é o cardinal de D_4.
c) Tente identificar todos os subgrupos de D_4
d) Quantos geradores tem este grupo?
e) Será este grupo isomorfo a S_4.

Exercícios de Teoria de Grupos

Quaterniões

Os **quaterniões**, introduzidos pelo irlandês Sir William Rowan Hamilton em 1843, são uma extensão natural dos números complexos. Existem inúmeras aplicações dos quaterniões em diferentes áreas da física. Para além da unidade imaginária i, introduzem-se o j and k, que obedecem às seguintes relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\,,$$

assim um quaternião Z, em analogia aos números complexos, é definido por

$$Z = a + b\,i + c\,j + d\,k\,,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. O conjunto dos quaterniões $\mathbb{H}$ com a multiplicação definida em analogia aos complexos dá origem a um estrutura de grupo, quando o zero é retirado do conjunto $\mathbb{H}$. De facto, esta é a única extensão dos complexos com estrutura de grupos.

1. Mostre para a extensão ser possível, o produto ijk não podia ser nenhum dos elementos $\{\pm i,\, \pm j,\, \pm k\}$.

2. Baseando-se nas propriedades dos grupos, calcule os seguintes produtos:

$$(ijk)^{-1}\,; \quad ij\,; \quad ji\,; \quad ik\,; \quad ki\,; \quad jk\,; \quad kj\,.$$

3. Escreva a fórmula mais geral do produto de quaterniões e mostre que não é comutativo.

4. Verifique que o subconjunto $Q = \{\pm 1,\, \pm\, i,\, \pm\, j,\, \pm\, k\}$ com a multiplicação dos quaterniões é um subgrupo de $\mathbb{H}\backslash\{0\}$. É Q um grupo Abeliano?

5. Tendo em conta as matrizes de Pauli,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

construa uma representação fiel de Q no espaço-vectorial $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}, +, \cdot)$.