Exercícios de Teoria de Grupos

---

1 Demonstrações

Seja G um grupo, verifique que:

1. Se um subconjunto H de G tiver a seguinte propriedade

$$\forall h_1, h_2 \in H \; : \quad h_1\, h_2^{-1} \in H \,,$$

   então H é subgrupo de G.

2. Se G for finito existe sempre um inteiro n tal que

$$\forall g \in G \; \exists n \in \mathbb{N} \; : \quad g^n = e \,.$$

   Ao menor n dá-se o nome de ordem de um elmento.

2 Grupos de ordem 4

Mostre que só existem dois grupos com cardinalidade 4. Escreva as suas tabelas de multiplicação e descubra os seus geradores. Quais sãos os subgrupos deste dois grupos encontrados. Determine a ordem de todos os seus elementos.

3 Isomorfismo de Caley

Seja G um grupo finito de n elementos, i.e., $G = \{g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n\}$. Para um dado elemento $a \in G$, mostre que o conjunto $aG \equiv \{a\, g_1,\, a\, g_2,\, \ldots,\, a\, g_n\}$ é necessariamente igual a G, i.e, $G = aG$. Mostre então que para cada elemento $a \in G$ se define uma permutação p_a da seguinte forma:

$$p_a \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \,,$$

onde se fez a seguinte identificação: $g_{a_i} = a\, g_i$. Mostre que $p_a\, p_b = p_{a\, b}$ [Facultativo].

Para os dois grupos de 4 elementos encontrados na alínea anterior, descubra todas as permutações, escritas em forma de ciclos, associadas aos elementos de cada grupo. Investigue as diferenças das permutações encontradas. Tendo em contas as permutações obtidas, tente escrever representações dos dois grupos de 4 elementos.

Será possível encontrar um padrão de permutações que não são correspondidas por elementos de um grupo G finito em geral?