Yang-Mills topologique dans le superespace : symétries et observables

Matthieu LEFRANÇOIS

lefrancois@ipnl.in2p3.fr

Institut de Physique Nucléaire, Lyon, France

Qu'est-ce qu'une théorie des champs topologique ?

Une théorie des champs topologique est caractérisée par une action classique nulle ou qui est un invariant topologique de la variété étudiée.

Qu'est-ce qu'une théorie des champs topologique ?

Une théorie des champs topologique est caractérisée par une action classique nulle ou qui est un invariant topologique de la variété étudiée.

Yang-Mills ordinaire

$$
\begin{aligned}
S_{YM\,cl} &= \int_M \mathrm{d}^4x \; \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\
&= \int_M \mathrm{d}^4x \; g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})
\end{aligned}
$$

Qu'est-ce qu'une théorie des champs topologique ?

Une théorie des champs topologique est caractérisée par une action classique nulle ou qui est un invariant topologique de la variété étudiée.

Yang-Mills topologique

$$
\begin{aligned}
S_{YM\,top\,cl} &= \int_M \mathrm{d}^4x \ \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) \\
&= \int_M \mathrm{d}^4x \ \mathrm{Tr}(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})
\end{aligned}
$$

Quel est l'intérêt de s'intéresser à une telle théorie ?

- Toutes les observables de cette théorie sont globales

Quel est l’intérêt de s’intéresser à une telle théorie ?

- Toutes les observables de cette théorie sont globales
- Une telle théorie est une représentation physique d’invariants topologiques mathématiques.

Quel est l'intérêt de s'intéresser à une telle théorie ?

- Toutes les observables de cette théorie sont globales
- Une telle théorie est une représentation physique d'invariants topologiques mathématiques.
- Etude d'une brisure de symétrie topologique (par exemple, gravité topologique)

Qu'est-ce que l'opérateur BRST $\mathcal{S}$?

Invariance de jauge de la théorie classique :

$\delta_{(\omega)} a_\mu = D_\mu \omega = \partial_\mu \omega + [a_\mu, \omega]$

Qu'est-ce que l'opérateur BRST $\mathcal{S}$?

Invariance de jauge de la théorie classique :

$\delta_{(\omega)} a_\mu = D_\mu \omega = \partial_\mu \omega + [a_\mu, \omega]$

$\Longrightarrow$ Propagateur possède des modes zéro et n'est pas inversible.

Qu'est-ce que l'opérateur BRST $\mathcal{S}$?

Invariance de jauge de la théorie classique :

$\delta_{(\omega)} a_\mu = D_\mu \omega = \partial_\mu \omega + [a_\mu, \omega]$

$\Longrightarrow$ Propagateur possède des modes zéro et n'est pas inversible.

Solution : fixation de jauge

Qu'est-ce que l'opérateur BRST $\mathcal{S}$?

Invariance de jauge de la théorie classique :

$\delta_{(\omega)} a_\mu = D_\mu \omega = \partial_\mu \omega + [a_\mu, \omega]$

$\Longrightarrow$ Propagateur possède des modes zéro et n'est pas inversible.

Solution : fixation de jauge

$\Longrightarrow$ Invariance résiduelle : transformations BRST (Becchi Rouet Stora Tyutin) décrites par $\mathcal{S}$

Méthode de quantification

Ansatz de Fadeev-Popov, on remplace les paramètres infinitésimaux de jauge par des champs "fantômes" : $\omega \to c$.

Formalisme des formes différentielles :
1-forme $a = a_\mu(x)dx^\mu$ et 0-forme $c = c(x)$

$$\mathcal{S}a = -Dc = -dc - [a, c]$$
$$\mathcal{S}c = -c^2 = -\frac{1}{2}[c, c]$$

$\mathcal{S}$ est un opérateur nilpotent : $\mathcal{S}^2 = 0$

Qu'est-ce que la cohomologie de $\mathcal{S}$?

Cohomologie d'un opérateur nilpotent $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{S})/\mathrm{Im}(\mathcal{S})$$

Qu'est-ce que la cohomologie de $\mathcal{S}$?

Cohomologie d'un opérateur nilpotent $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{H}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{S})/\mathrm{Im}(\mathcal{S})$$

Autrement dit

$$\Gamma \in \mathcal{H}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \mathcal{S}\Gamma = 0 \text{ tel que } \Gamma \neq \mathcal{S}\Gamma'$$

$\Longrightarrow$ On cherche les fonctionnelles invariantes sous $\mathcal{S}$ qui ne soient pas triviales.

Travaux originaux de Witten

Symétrie de *shift* locale définie par un opérateur $\tilde{Q}$:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}a &= \psi \\ \tilde{Q}\psi &= -D\phi = -d\phi - [a,\phi] \\ \tilde{Q}\phi &= 0\end{aligned}$$

$\tilde{Q}$ est nilpotent à des transformations de jauge près : $\tilde{Q}^2 = \delta_{(\phi)}$.

Travaux originaux de Witten

Observables de Witten appartiennent à la cohomologie équivariante : cohomologie de $\tilde{Q}$ dans l'espace des fonctionnelles invariantes de jauge.

$$\tilde{Q}\Delta = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \neq \tilde{Q}\Delta'$$

avec les conditions supplémentaires :

$$\delta_{(\omega)}\Delta = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{(\omega)}\Delta' = 0$$

Qu'est-ce que le superespace ?

- Théorie topologique $\simeq$ théorie supersymétrique étendue

Qu'est-ce que le superespace ?

- Théorie topologique $\simeq$ théorie supersymétrique étendue

- Superespace = extension de l'espace-temps usuel au moyen d'une composante anticommutante θ

Qu'est-ce que le superespace ?

- Théorie topologique $\simeq$ théorie supersymétrique étendue
- Superespace = extension de l'espace-temps usuel au moyen d'une composante anticommutante θ
- Superchamp = fonction de (x, θ) : $F(x, \theta) = f(x) + \theta f'_{\theta}(x)$

Qu'est-ce que le superespace ?

- Théorie topologique $\simeq$ théorie supersymétrique étendue
- Superespace = extension de l'espace-temps usuel au moyen d'une composante anticommutante θ
- Superchamp = fonction de (x, θ) : $F(x,\theta) = f(x) + \theta f'_\theta(x)$
- Superforme différentielle : $\hat{F}(x,\theta) = \sum_{k=0}^{p} F_{p-k}(x,\theta)(d\theta)^k$

Intérêt de ce formalisme : l'opérateur de supersymétrie prend une forme très simple : $Q = \partial_\theta$.

Yang-Mills topologique dans le super-espace

- Superdérivée extérieure $\hat{d} = d + d\theta\partial_\theta = dx^\mu \partial_\mu + d\theta\partial_\theta$
- Superconnection $\hat{A} = A + d\theta A_\theta = (a + \theta\psi) + d\theta(\chi + \theta\phi)$
- Superfantôme $C = c + \theta c'$
- Transformations BRST :

$$\mathcal{S}\hat{A} = -(\hat{d}C + [\hat{A}, C])$$
$$\mathcal{S}C = -C^2$$

Yang-Mills topologique dans le super-espace

- Superdérivée extérieure $\hat{d} = d + d\theta\partial_\theta = dx^\mu\partial_\mu + d\theta\partial_\theta$
- Superconnection $\hat{A} = A + d\theta A_\theta = (a + \theta\psi) + d\theta(\chi + \theta\phi)$
- Superfantôme $C = c + \theta c'$
- Transformations BRST :

$$\mathcal{S}\hat{A} = -(\hat{d}C + [\hat{A}, C])$$
$$\mathcal{S}C = -C^2$$

$\Longrightarrow$ on retrouve la même algèbre BRST que Witten.

Observables dans le formalisme superespace

Cohomologie de $\mathcal{S}$ est triviale

Observables dans le formalisme superespace

Cohomologie de $\mathcal{S}$ est triviale

$\Longrightarrow$ Cohomologie restreinte : cohomologie de $\mathcal{S}$ dans l'espace des fonctionnelles supersymétriques.

Observables dans le formalisme superespace

Cohomologie de $\mathcal{S}$ est triviale
$\Longrightarrow$ Cohomologie restreinte : cohomologie de $\mathcal{S}$ dans l'espace des fonctionnelles supersymétriques.
On recherche les fonctionnelles Δ_d telles que :

$$\mathcal{S}\Delta_d = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_d \neq \mathcal{S}\Delta'_d \quad \text{et} \quad Q\Delta_d = 0$$

où les Δ_d sont des intégrales d-dimensionnelles :

$$\Delta_d = \int_{M_d} \omega_d(x) \quad \text{avec} \quad \omega_d = Q\hat{\Omega}_d$$

Solution générale

2 types de solution possibles :

Solution générale

2 types de solution possibles :

- Solutions équivariantement triviales

Les solutions triviales au sens de la cohomologie équivariante prennent la forme générale :

$$\Delta_d = \int_{M_d} Q\, \mathcal{H}_d(F_A, \Psi, \Phi, D\Psi, D\Phi)$$

où $\hat{F} = \hat{d}\hat{A} + \hat{A}^2 = F_A + \Psi d\theta + \Phi(d\theta)^2$ est la supercourbure et $\mathcal{H}$ est invariant de jauge.

Solution générale

2 types de solution possibles :

- Solutions non-équivariantement triviales

$\hat{\Omega}_d$ est solution d'un système d'équations de superdescente :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\hat{\Omega}_d + \hat{d}\hat{\Omega}'_{d-1} &= 0 \\ \mathcal{S}\hat{\Omega}'_{d-1} + \hat{d}\hat{\Omega}''_{d-2} &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ équations similaires au Yang-Mills ordinaire, on utilise les résultats connus.

$\Longrightarrow$ on retrouve les résultats de Witten.

Conclusion et perspectives

- Formalisme de superespace systématique, contient intrinsèquement la supersymétrie.

Conclusion et perspectives

- Formalisme de superespace systématique, contient intrinsèquement la supersymétrie.
- Obtention des observables = extension supersymétrique des résultats standards sur les équations de descente. Preuve qu'il n'existe aucune autre solution au problème cohomologique.

Conclusion et perspectives

- Formalisme de superespace systématique, contient intrinsèquement la supersymétrie.
- Obtention des observables = extension supersymétrique des résultats standards sur les équations de descente. Preuve qu'il n'existe aucune autre solution au problème cohomologique.
- Théories plus complexes : gravité topologique, Yang-Mills avec plusieurs générateurs.

Bibliographie sélective

- E. Witten, "Topological quantum field theory", *Commun. Math. Phys* **117** (1988) 353
- D.Birmigham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, "Topological Field Theory", *Phys. Rep* **209** (1991) 129
- S. Ouvry, R. Stora and P. Van Baal, "On the algebraic characterization of Witten's topological Yang-Mills theory", *Phys. Lett.* **B220** (1989) 159
- J.H. Horne, "Superspace version of topological theories", *Nucl. Phys.* **B318** (1989) 22
- J.L.Boldo, C.P. Constantinidis, F. Gieres, M. Lefrancois and O. Piguet, "Observables in topological Yang-Mills theories", *Int. J. Mod. Phys.* **A** (2003) to appear, `[ hep-th/0303053]`

Formes différentielles

Les formes différentielles sont très utiles pour deux raisons principalement : d'une part, la notation est indépendante du système de coordonnées choisi et d'autre part, le formalisme mathématique s'écrit de manière plus simple.

- Produit antisymmétrique : $dx^\mu \wedge dx^\nu := dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$
- Formes différentielles :
  - 0-forme : $\omega = \omega(x)$
  - 1-forme : $\omega = \omega_\mu(x) dx^\mu$
  - 2-forme : $\omega = \frac{1}{2!}\omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \ \ldots$

➥

Yang-Mills topologique dans le super-espace

Ecriture en composantes :

$$\mathcal{S}a = -Dc \qquad \mathcal{S}\psi = -[c,\psi] - Dc'$$
$$\mathcal{S}\chi = -[c,\chi] - c' \qquad \mathcal{S}\phi = -[c,\phi] - [\chi, c']$$
$$\mathcal{S}c = -c^2 \qquad \mathcal{S}c' = -[c,c']$$

Yang-Mills topologique dans le super-espace

Ecriture en composantes :

$$\mathcal{S}a = -Dc \qquad \mathcal{S}\psi = -[c,\psi] - Dc'$$
$$\mathcal{S}\chi = -[c,\chi] - c' \qquad \mathcal{S}\phi = -[c,\phi] - [\chi, c']$$
$$\mathcal{S}c = -c^2 \qquad \mathcal{S}c' = -[c,c']$$

Jauge de Wess-Zumino : $\chi = 0$
$\Longrightarrow$ on retrouve la formulation originale de Witten.

Solution générale

Equations de bi-descente satisfaites par les formes différentielles Ω_d :

$$\mathcal{S}^{D-p-g}\Omega_p^g + d^{D-p-g}\Omega_{p-1}^{g+1} + Q^{D-p-g-1}\Omega_p^{g+1} = 0$$

Les observables recherchées de dimension d et de nombre de SUSY s sont les ${}^s\Omega_d^0$, c'est-à-dire les formes de degré de fantôme 0.