TRATAMIENTO CANÓNICO DE LA ECUACIÓN DE PROCA

Alexis Javier Aguirre Narváez

Universidad de Nariño

Noviembre 28, 2016

Introducción

En teoría de Campos (TC) existen sistemas descritos por densidades Lagrangianas que se pueden clasificar en regulares ($det(W) \neq 0$) o singulares ($det(W) = 0$),en los sistemas singulares aparecen ligaduras(vínculos) las cuales reducen la dimensión del espacio, estudiamos la densidad Lagrangiana singular de la cual se obtiene la ecuación de Proca, realizando tratamiento de Dirac para:

- Campo de Proca Real
- Campo de Proca Complejo

Formulación Lagrangiana

A nivel Lagrangiano tenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1}$$

Así:

$$\sum_j W_{ij}(q_i, \dot{q}_i)\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i q_j}\dot{q}_j \tag{2}$$

donde W es la matriz Hessiana dada por:

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{3}$$

Formulación Hamiltoniana

En esta formulación se hace la transición desde el espacio de configuraciones$(q_i, \dot{q}_i)$ al espacio de fase (q_i, P_i), a través de:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4}$$

$$H = P_i q^i - L \tag{5}$$

Sin embargo esto no es del todo posible cuando detW=0, debido a que no todas las velociodades pueden ser dejadas en terminos de las coordenadas del espacio de fase.

LIGADURAS
Clásicamente tenemos dos tipos de Ligaduras
Ligaduras Mecánicas:(Rotor Rigido)
Ligaduras de la Teoría:(Campo Electromagnético).

- Vínculos Primarios
- Vínculos Secundarios
- Vínculos de Primera Clase
- Vínculos de Segunda Clase.

Campo de Proca Real

Para este caso la densidad Lagrangiana tiene la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{6}$$

Donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange seran:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu(x))} \right] = 0 \tag{8}$$

Donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)} = m^2 A^\mu(x) \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\mu(x))} = -F^{\nu\mu}(x) \tag{10}$$

Donde la ecuación de campo sera:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + m^2 A^\mu = 0 \tag{11}$$

Así:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) + m^2 A^\mu = 0 \tag{12}$$

Para $\Box = \partial_\nu \partial^\nu$

En TC la matriz Hessiana es dada por:

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x) \partial \dot{A}_\nu(y)} \tag{13}$$

Para nuestro caso tendra la forma:

$$W_{\mu\nu} = (\eta^{0\nu}\eta^{0\mu} - \eta^{\nu\mu})\delta^3(x-y) \tag{14}$$

Que en componentes será:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \tag{15}$$

De este modo se comprueba que el sistema presenta una Lagrangiana singular. Se definen ahora los momentos canónicos conjugados:

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} \tag{16}$$

De este modo:

$$\Pi^\mu(x) = F^{\mu 0}(x) \tag{17}$$

Aparece un vínculo cuando $\mu = 0$

$$\Pi^0(x) = F^{00}(x) = 0 \tag{18}$$

Clásicamente tratamos estos vínculos como igualdades debiles.

$$\Phi_1(x) \equiv \Pi^0(x) \approx 0 \tag{19}$$

Definimos los Corchetes de Poisson(CP) entre dos variables dinámicas F(x) y G(X) como:

$$\{F(x), G(y)\}_{x^o=y^0} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta \Pi^\nu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \Pi^\nu(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)}\right] \tag{20}$$

Los CP fundamentales son:

$$\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{21}$$

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = 0 \tag{22}$$

$$\{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\} = 0 \tag{23}$$

Tenemos una inconsistencia de los CP para $A_0(x)$ y $\Pi^0(x)$

$$\left\{A_0(x), \Pi^0(y)\right\} \stackrel{?}{=} \delta_0^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{24}$$

Los PP no son consistentes con la teoría.
Se analiza la consistencia de vínculos en el tiempo es decir :

$$\dot{\phi}_1 \approx \{\phi_1, H_p\} \approx 0 \tag{25}$$

Donde

$$H_p = Hc + \lambda_i \phi_i \tag{26}$$

Para nuestra teoría

$$H_p = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\pi^k)^2 - A_0 \partial_k \pi^k - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} + \lambda_0 \pi^0 \right] \tag{27}$$

En el análisis de la consitencia para los vinculos se puede tener tres resultados:

- $0 \approx 0$
- Se fijan condiciones para los multiplicadores de Lagrange.
- Se generan mas vínculos.

Resulta que:

$$\dot{\phi}_1 \approx \{\phi_1, H_p\} \approx \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0(x) \approx 0 \tag{28}$$

Defina:

$$\phi_2 \equiv \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0(x) \approx 0 \tag{29}$$

Si analizamos la consistencia de ϕ_2

$$\dot{\phi}_2 \approx \{\phi_2, H_p\} \approx -m^2 \partial_k^x A_k(x) + \lambda_0 \approx 0 \tag{30}$$

Esto garantiza que mas vínculos no sean generados.
De la teoría tenemos 2 vínculos(P y S)
Clasificar en Vínculos de Primera y segunda clase.

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = 0 \tag{31}$$

$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = 0 \tag{32}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = -m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{33}$$

Se tienen vínculos de segunda clase, que eliminamos con la ayuda de los Corchetes de Dirac definidos como:

$$\{E(x), F(y)\}_{CD} = \{E(x), F(y)\} - \int d^3u d^3v \, \{E(x), \phi_i(u)\} \left[C^{ij}(u, v)\right]^{-1} \left\{\phi_j(v), F(y)\right\} \tag{34}$$

Donde $[C(u, v)]^{-1}$ es la inversa de la matriz de los PP de los vínculos secundarios la cual se define como:

$$C_{ij} = \left\{\phi_i(u), \phi_j(v)\right\} \tag{35}$$

Empleando (26),(27) y (28):

$$C(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

De esta manera:

$$[C(u,v)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ -\frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Por otro lado si trabajamos bajo el formalismo de Dirac los vínculos:

$$\phi_1 = \pi^0(x) = 0 \tag{38}$$

$$\phi_2 = \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0(x) = 0 \tag{39}$$

Por lo tanto escogemos como grados de libertad a $A_k(x)$ y $\pi^k(x)$ de esta manera si calculamos:

$$\{A_k(x), \phi_1(y)\} = \delta_k^0 \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0 \tag{40}$$

$$\{A_k(x), \phi_2(y)\} = \left\{A_k(x), \partial_n^y \pi^n(y) + m^2 A_0(y)\right\} = \delta_k^n \partial_n^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (41)$$

$$\{\pi_k(x), \phi_1(y)\} = 0 \quad (42)$$

$$\{\pi_k(x), \phi_2(y)\} = \left\{\pi_k(x), \partial_n^y \pi^n(y) + m^2 A_0(y)\right\} = 0 \quad (43)$$

Usando la definición (29) de los CD del campo $A_k(x)$ con una variable dináminca F(y) seran:

$$\{A_k(x), F(y)\}_{CD} = \{A_k(x), F(y)\} - \frac{\partial_k^x}{m^2} \{\phi_1(x), F(y)\} \quad (44)$$

Con este resultado:

$$\{A_k(x), A_n(y)\}_{CD} = \{A_k(x), A_n(y)\} - \frac{\partial_k^x}{m^2} \{\phi_1(x), A_n(y)\} = 0 \quad (45)$$

$$\{A_k(x), \pi^n(y)\}_{CD} = \{A_k(x), \pi^n(y)\} - \frac{\partial_k^x}{m^2}\{\phi_1(x), \pi^n(y)\} = \delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{46}$$

Por otro lado los CD para $\pi^k(x)$ son:

$$\left\{\pi^k(x), \pi^n(y)\right\}_{CD} = \left\{\pi^k(x), \pi^n(y)\right\} = 0 \tag{47}$$

Campo de Proca Complejo

En este caso tenemos que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{*}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^{*}_{\mu}A^{\mu} \tag{48}$$

Donde

$$F*_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{*}_{\nu} - \partial_\nu A^{*}_{\mu} \tag{49}$$

Aqui tenemos los campos $A_\mu(x)$ y $A^{*}_{\mu}(x)$ por lo tanto podemos asignar dos momentos canónicos:

$$\pi^{\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}(x)} = F^{*\ \mu 0} \tag{50}$$

$$\pi^{*\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{*}_{\mu}(x)} = F^{\mu 0} \tag{51}$$

Donde de (45) y (46) tenemos dos vinculos de la teoría:

$$\phi_1(x) \approx \pi^0(x) \approx 0 \tag{52}$$

$$\phi_2(x) \approx \pi^{*0}(x) \approx 0 \tag{53}$$

Su evolución temporal esta dada por:

$$\dot{\phi}_i \approx \{\phi_i, H_p\} \approx 0 \tag{54}$$

De esta forma definimos en Hamiltoniano primario como:

$$\begin{aligned} H_p &= \int d^3x(\pi_k^*(x)\pi^k(x) + \partial_k^x \pi^k(x) A_0(x) \\ &+ \partial_k^x \pi^{*k}(x) A_0^*(x) + \frac{1}{2} F^{ki} F_{ki}^* - m^2 A_\mu^*(x) A^\mu(x) \\ &+ \lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_2 \phi_2(x)) \end{aligned} \tag{55}$$

Analizando la consistencia de los vínculos tenemos que:

$$\dot{\phi}_1 \approx \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0^*(x) \approx 0 \tag{56}$$

$$\dot{\phi}_2 \approx \partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A_0(x) \approx 0 \tag{57}$$

Con estos resultados definimos:

$$\phi_3 \equiv \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0^*(x) \approx 0 \tag{58}$$

$$\phi_4 \equiv \partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A_0(x) \approx 0 \tag{59}$$

Se examina la consistencia de $\phi_3(x)$ $\phi_4(x)$

$$\dot{\phi_3}(x) \approx \partial_k^x A^{*k}(x) + m^2 \lambda_2 \approx 0 \tag{60}$$

$$\dot{\phi_4}(x) \approx \partial_k^x A^k(x) + m^2 \lambda_1 \approx 0 \tag{61}$$

Tenemos el siguiete conjunto de vinculos que bajo el Formalismo de Dirac seran:

$$\phi_1(x) = \pi^0(x) = 0 \tag{62}$$

$$\phi_2 = \pi^{*0} = 0 \tag{63}$$

$$\phi_3 = \partial_k^x \pi^k(x) + m^2 A_0^*(x) = 0 \tag{64}$$

$$\phi_3 = \partial_k^x \pi^{*k}(x) + m^2 A_0(x) = 0 \tag{65}$$

Para clasificar los vínculos calculamos:

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = 0 \tag{66}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = 0 \tag{67}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_3\} = 0 \tag{68}$$

$$\{\phi_1(x), \phi_4\} = -m^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{69}$$

$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = 0 \tag{70}$$

$$\{\phi_2(x), \phi_3(y)\} = -m^2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{71}$$

$$\{\phi_2(x), \phi_4(y)\} = 0 \tag{72}$$

$$\{\phi_3(x), \phi_3(y)\} = 0 \tag{73}$$

$$\{\phi_3(x), \phi_4(y)\} = 0 \tag{74}$$

$$\{\phi_4(x), \phi_4(y)\} = 0 \tag{75}$$

Se clasifican en vinculos de segunda clase

Con estos calculos contruimos la matriz C(u.v)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ 0 & 0 & -m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 & 0 \\ m^2\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Y su inversa $[C(u,v)]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{u}-\mathbf{v}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Ya que existen cuatro vínculos el espacio de fase se reduce de 16 a 12, donde escojemos como grados de libertad a $A_k(x)$,$A_k^*(x)$, $\pi^k(x)$ y $\pi^{*k}(x)$ de esta forma tenemos que:

$$\{A_k(x), \phi_1(y)\} = 0 \tag{78}$$

$$\{A_k(x), \phi_2(y)\} = 0 \tag{79}$$

$$\{A_k(x), \phi_3(y)\} = \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{80}$$

$$\{A_k(x), \phi_4(y)\} = 0 \tag{81}$$

$$\{A_k^*(x), \phi_1(y)\} = 0 \tag{82}$$

$$\{A_k^*(x), \phi_2(y)\} = 0 \tag{83}$$

$$\{A_k^*(x), \phi_3(y)\} = 0 \tag{84}$$

$$\{A_k^*(x), \phi_4(y)\} = \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{85}$$

$$\left\{\pi^{k}(x), \phi_1(y)\right\} = 0 \tag{86}$$

$$\left\{\pi^{k}(x), \phi_2(y)\right\} = 0 \tag{87}$$

$$\left\{\pi^{k}(x), \phi_3(y)\right\} = 0 \tag{88}$$

$$\left\{\pi^{k}(x), \phi_4(y)\right\} = 0 \tag{89}$$

$$\left\{\pi^{*k}(x), \phi_1(y)\right\} = 0 \tag{90}$$

$$\left\{\pi^{*k}(x), \phi_2(y)\right\} = 0 \tag{91}$$

$$\left\{\pi^{*k}(x), \phi_3(y)\right\} = 0 \tag{92}$$

$$\left\{\pi^{*k}(x), \phi_4(y)\right\} = 0 \tag{93}$$

Finalmente tenemos que los CD de la teoría de Campo complejo de Proca bajo el tratamiento de Dirac tiene los siguientes corchetes:

$$\{A_k(x), A_n^*(y)\}_{CD} = 0 \tag{94}$$

$$\{A_k(x), \pi^n(y)\}_{CD} = \delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{95}$$

$$\{A_k^*(x), \pi^{*n}(y)\}_{CD} = \delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{96}$$

$$\left\{\pi^k(x), \pi^{*n}(y)\right\}_{CD} = 0 \tag{97}$$

Conclusiones

- Para campo de Proca real y complejo, se obtienen vínculos de segunda clase los cuales pueden ser eliminados con los Corchetes de Dirac.
- Los vínculos reducen el espacio de fase.
- Los multiplicadores de Lagrange son determinados en la teoría de Proca.