

Introdução à energia de ponto-zero, as forças dispersivas e ao efeito Casimir

Carlos Farina
Instituto de Física - UFRJ

2^a Escola da Pós-Graduação em Física
UERJ - de 14 a 25 de agosto de 2017

Roteiro da Apresentação

1. **Introdução: efeitos do vácuo quântico**
2. **Breve história da energia de ponto-zero**
3. **Forças de van der Waals dispersivas**
4. **O efeito Casimir e as forças dispersivas**
5. **O método de Casimir e a energia de ponto-zero**
6. **Comentários finais**

Introdução: efeitos do vácuo quântico

- O vácuo já atormentava filósofos da Grécia antiga;



- De Aristóteles (384-322 a.C.) até \approx séc. XVII:
“Natura adhorret vacuum”
- **Problema** na construção das fontes de Florença:
“A natureza provavelmente não abomina o vácuo acima de 10 metros” (Galileu);

- A idéia de vácuo pode estar por trás dos mais bizarros mecanismos, **peelo menos na ficção ...**



FIÓDOR
DOSTOIÉVSKI

O CROCODILO

*“Qual a característica fundamental de um crocodilo? [...] engolir seres humanos. Ao construir um crocodilo, como alguém se assegura de que ele engula pessoas? [...] construa o crocodilo ôco. A física estabeleceu há muito tempo **que a Natureza abomina o vácuo.** Então, o interior do crocodilo deve ser ôco para que ele abomine o vácuo e, assim, engula e se encha de tudo à sua volta. ”*

*“Não ocorre o mesmo com o homem: **quanto mais vazia é a cabeça de um homem menos ele sente vontade de enchê-la** e esta é a única exceção a essa regra geral”*

- **Vácuo quântico**: longe de ser um “espaço vazio”;
Princípio de Heisenberg \implies **Energia de ponto-zero**.

Oscilador harmônico quântico:



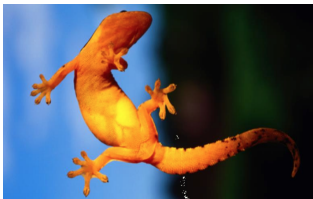
$$\begin{aligned}
 E = \langle H \rangle &= \frac{\langle P^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle X^2 \rangle \\
 &= \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2
 \end{aligned}$$

Usando $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$ e minimizando,

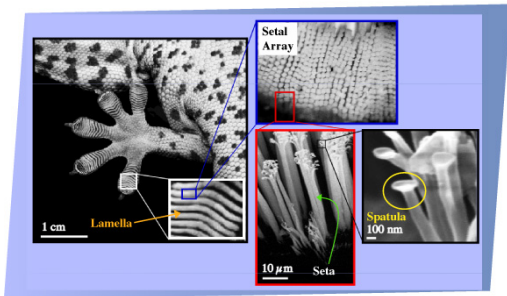
$$E(\Delta x) = \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2$$

$$\frac{dE(\Delta x)}{d(\Delta x)} = 0 \implies E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

- Forças de van der Waals dispersivas: adesão de **lagartixas!**



Patas com **milhões** de cerdas (minúsculos pelos) ($\approx 500.000/cm^2$), que se subdividem em (~ 5000) filamentos ainda menores.



$$\frac{F}{Area} \approx 1 atm$$

1 cerda: $F \approx 20 \mu N$

patas: $F \approx 10 N$

Não apenas lagartixas usam esse mecanismo, mas **também**

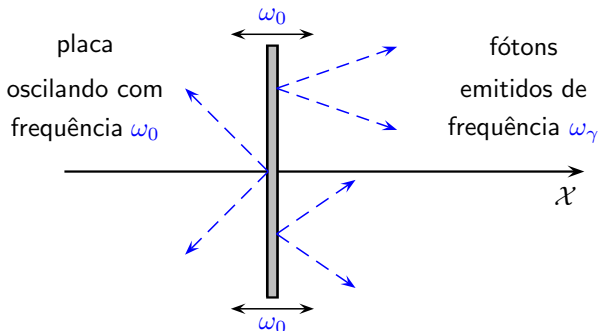
- Com esse material **uma pessoa suportaria o próprio peso!**



Surrounded by other team members, Achim Oesert from the University of Kiel hangs from the ceiling using bioinspired polymer tape (Image: University of Kiel) alongside an image of a gecko (Image: Wahj via [Flickr](#))

- Efeito Casimir dinâmico:

- Fonteiras em movimento no vácuo quântico dão origem à criação de partículas e sofrem a ação de forças dissipativas;
- nome cunhado por **Yablonovitch (1989)** e popularizado por **Schwinger (1992-1994)** quando estudava sonoluminescência;
- Já se manifesta mesmo com **uma placa** em movimento;



Para movimentos não-relativísticos, mostra-se que $\omega_\gamma \leq \omega_0$.

- Emissão espontânea:
 - Um átomo excitado no vácuo e longe de todos os outros corpos do universo decai inexoravelmente para seu estado fundamental
 - Átomo excitado + zero fóton \rightarrow : **não é estado estacionário** do **hamiltoniano do sistema átomo-campo**
 - Exemplos de emissão espontânea são mais frequentes do que se imagina (bioluminescência, fluorescência, etc.):



1916 → Em carta a seu amigo **Besso**, em 1916, **Einstein** escreveu:



“ A splendid light has dawned on me about the absorption and emission of radiation ”

1917 → Coeficientes de **Einstein** A_{21} e B_{21}

- Moléculas em equilíbrio térmico com a radiação.
- **Novos conceitos:** emissão espontânea e emissão estimulada, mas a taxa A_{21} não foi calculada (apenas A_{21}/B_{21}).
- Razão entre as taxas de emissão espontânea e estimulada para luz a temperatura ambiente ($T = 300K$)

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\omega_0)} = e^{h\nu/K_B T} - 1 \approx 10^{39}$$

1927 → **Dirac** calculou via EDQ a taxa de emissão espontânea:

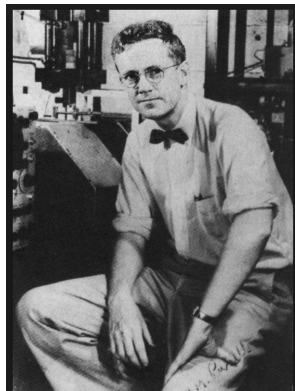
“The quantum theory of the emission and absorption of radiation”

$$\Gamma_{21}^{(0)} = \frac{4}{3} \frac{|\mathbf{d}_{21}|^2 \omega_{21}^3}{\hbar}$$



1946 → **Purcell**: vizinhança do sistema altera a sua taxa de EE

“... However, for a system coupled to a resonant electrical circuit, the factor $8\pi\nu^2/c^3$ no longer gives correctly the number of radiation oscillators per unit volume, in unit frequency range, ... The spontaneous emission probability is thereby increased, and the relaxation time reduced, by a factor $f = 3Q\lambda^3/4\pi^2V$, where V is the volume of the resonator.”



- **Deslocamento Lamb;**

- Espectro **não-relativístico** do átomo de hidrogênio:

$$\text{Eq. Schrödinger} \implies E_n = -\frac{C}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Note que a degenerescência é maior do que a esperada,

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2$$

- Espectro **relativístico** do átomo de hidrogênio (Eq. **Dirac**):

$$E_{nj} = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n - (j + \frac{1}{2}) + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e $j + 1/2 \leq n$.

- **Degenerescência residual:** por ex., níveis $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$

- Experimentos anteriores à 2ª guerra mundial já sugeriam que:

$$E(2s_{1/2}) \neq E(2p_{1/2})$$

- **Lamb e Retherford (1947)** verificaram experimentalmente que

$$E(2s_{1/2}) - E(2p_{1/2}) \approx 1 \text{ GHz}.$$

- Solução de **Bethe 1947**: **elétron acoplado ao campo de radiação** (sugestão de **Oppenheimer e Schwinger**).

- **Interpretação**: **renormalização da massa do elétron**.

- A explicação do **desvio Lamb** marcou o início da moderna EDQ.

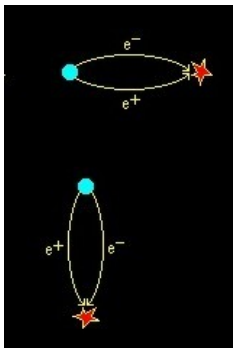
“Nenhum progresso foi feito por 20 anos. Então veio um avanço, iniciado pela descoberta de Lamb e explicação do desvio Lamb, que fundamentalmente mudou o caráter da física teórica. Isso envolveu o estabelecimento de regras para descartar ... infinitos ...” (Dirac - 1989)



- **TQC:** Mec. Quânt. + Relatividade
 $(\Delta E \Delta t \geq \hbar/2)$ + $(E = mc^2)$

vácuo quântico: contínua criação e aniquilação de partículas e antipartículas virtuais (tempos de vida $\implies \tau \sim \frac{\hbar}{2\Delta E}$);

Exemplo: pares e^+e^- , em suas efêmeras existências **são afetados**, em princípio, **por qualquer agente externo** (campos elétricos ou magnéticos, fronteiras, dim. compactificadas, ..);



Criação de pares por campo externo

Campo crítico: energia fornecida pelo campo \approx massa de repouso do par e^+e^-

$$eE_c(c\Delta t) \approx 2m_e c^2$$

$$eE_c(\hbar/2m_e c^2) \approx 2m_e c^2$$

$$\implies E_c \approx \frac{4m_e^2 c^3}{e\hbar} \approx 10^{18} \text{ V/m.}$$

Breve história da energia de ponto-zero (EPZ)

- Surgiu pela 1ª vez na 2ª teoria de Planck sobre radiação de corpo negro (1911/12)(derivação quântica apenas em 1925);
- **Modelo de Planck:** absorção contínua, mas emissão discreta; cada vez que o átomo atingia uma energia múltipla inteira de $h\nu$ havia uma probabilidade p de emití-la integralmente:

$$\langle U \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/K_B T} - 1} + \frac{1}{2}h\nu.$$

- Embora os osciladores de Planck tivessem EPZ, o mesmo não ocorria com o campo eletromagnético:

$$\rho_{em}(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/K_B T} - 1}; \quad \rho_{em}(\nu) \longrightarrow 0 \text{ para } T \longrightarrow 0.$$

- **Debye (1914)**: difração por redes cristalinas
 - **efeitos térmicos** reduzem a difração de **raios-X** por cristais;
 - também a **EPZ** deveria ter esse efeito, mesmo para $T \rightarrow 0$:

$$e^{-\kappa^2 K_B T / 2m\omega_0^2} \quad \text{—} \quad \text{para altas temperaturas}$$

$$e^{-\hbar\kappa^2 / 2m\omega_0^2} \quad \text{—} \quad \text{para } T \rightarrow 0$$

onde $\vec{\kappa} := \vec{k}_{esp} - \vec{k}_0$ (ordem de grandeza correta).

- **Mulliken (1924)**: analisou os espectros de duas moléculas diatômicas com **isótopos diferentes** ($B^{10}O^{16}$ e $B^{11}O^{16}$):

*“if one assumes that the true values of the vibrational quantum numbers are not n and n' but each $1/2$ unit greater ... It is then probable that **the minimum vibrational energy of BO** (and doubtless of other) **molecules is $1/2$ quantum**”.*

- **Nernst (1916)**: 1º a sugerir que cada modo do campo eletromagnético livre também tivesse **EPZ**.
- **Jordan (1926)**: 1º a obter, formalmente, a **EPZ** em TQC, ao quantizar o campo escalar livre: $E_0 = \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$

Mas nem todos aceitavam a EPZ,

“A esta altura deve ser mencionado que é mais consistente não introduzir aqui a EPZ de $1/2 h\nu$ por grau de liberdade, em contraste com o oscilador material. Porque, por um lado, isto levaria a uma energia infinitamente grande por volume devido aos infinitos graus de liberdade; por outro lado esta energia não seria observável já que não pode ser emitida, absorvida ou difratada - logo não pode ser presa por paredes - e não produz nenhum efeito gravitacional, como é evidente pela experiência.”

W. Pauli (1933)

- A história da **EPZ** é longa e o número de personagens, grande: (Planck, Einstein, Heisenberg, Jordan, Pauli, Welton, Casimir, Zeldovich, Feynman, Power, Weinberg, ...)
- Mesmo após 100 anos de existência, a **EPZ** ainda é motivo de **controvérsias**: há, por ex., incompatibilidade entre as energias do vácuo previstas pela **TQC** e pela **Relatividade Geral**.
 - Com **corte** apropriado, a **TQC** prevê a densidade de energia

$$\rho_{EPZ} = \int_0^{\nu_{max}} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{2} d\nu = \frac{\pi h\nu_{max}^4}{c^3} \approx 10^{94} kg/m^3$$

- Dados observacionais relativos à **cte cosmológica** sugerem

$$\rho_{RG} = \leq 10^{-26} kg/m^3$$

“**Apenas**” uma discrepância de **120 ordens de grandeza!!**

Forças Dispersivas

- Forças entre dois **corpos neutros** sem momentos de multipolo permanentes são denominadas **forças dispersivas**
- **Princípio de Heisenberg:** permite a existência de flutuações quânticas \implies multipolos flutuantes
- A **contribuição dominante** para a interação de dois corpos neutros mas polarizáveis é dada pela interação **dipolo-dipolo**
- **Regimes de distância** (determinados pelo λ_{mn} dominante):
 - **não-retardado:** pequenas distâncias; interação instantânea
 - **retardado:** grandes distâncias, efeitos de retardamento fazem com que a força caia mais rapidamente
- **1ª evidência:** estudo de gases, **J D van der Waals (1873)**
- **Explicação correta:** somente após o advento da **Mecânica Quântica** (London 1930)

Forças de van der Waals dispersivas

- **Johannes Diederik van der Waals (1837 - 1923):** tamanho das moléculas e as forças intermoleculares.
- Eq. de estado para gases reais: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$;
"Sobre a continuidade do gás e do estado líquido" (1873)



Prêmio Nobel de Física de 1910.

"that there can be no doubt that the name of Van der Waals will soon be among the foremost in molecular science"

James Clerk Maxwell

- Seus trabalhos guiaram experimentos que levaram à liquefação do hidrogênio (**J.Dewar 1898**) e do hélio (**K. Onnes 1908**)

Tipos de forças de van der Waals

1. Força de van der Waals de orientação: moléculas polares.

- No cálculo da força entre moléculas polares (de água, por ex) os **efeitos térmicos** devem ser considerados (**Keesom1921**):

$$U = -\frac{2p_1^2 p_2^2}{3(4\pi\epsilon_0)^2 K_B T} \frac{1}{r^6}; \quad K_B T \gg \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Força atrativa cuja magnitude diminui quando T cresce

2. Força de van der Waals de indução: entre uma molécula polar e outra apolar.

- Seja p_1 o dipolo permanente da molécula 1 e p_2 o induzido na molécula 2. Como $\mathbf{p}_2 = \alpha_2 \mathbf{E}_1$, temos

$$U_{21} \sim -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \sim -\alpha_2 \mathbf{E}_1^2 \sim -\frac{\alpha_2 p_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}.$$

3. Força de van der Waals de dispersão: moléculas apolares!

- explicadas somente com a Mecânica Quântica (**London 1930**).
- Origem nas **flutuações das distribuições de carga** das moléculas

- Aplicando a **2^a lei de Newton** aos 2 osciladores, obtemos

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_2(\mathbf{R}_1, t) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1(\mathbf{R}_2, t) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2, \quad (2)$$

onde \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 são as posições (fixas) dos centros de massa dos átomos 1 e 2, (campos uniformes nas dimensões atômicas)

- **Campo completo de um dipolo flutuante:**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{3 [\mathbf{p}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3 [\dot{\mathbf{p}}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c r^2} - \frac{[\ddot{\mathbf{p}}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}(t_r)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (3)$$

onde $t_r = t - r/c$ é o tempo retardado.

- **Curtas distâncias:** o 1^o termo (em **vermelho**) é dominante e $t_r \approx t$ (efeitos de retardamento desprezíveis)

Com isso, as equações anteriores tomam a forma

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = K_{12} x_2(t)$$

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = K_{21} x_1(t)$$

onde definimos

$$K_{12} = K_{21} = \frac{Q_{12}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{e^2}{m} \right)$$
$$Q_{12} = 3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) - \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2$$

- Temos um sistema de **Eq(s) diferenciais ordinárias acopladas**
- Desacoplando as equações \Rightarrow modos normais de vibração:

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} ; \quad x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$$

Pode-se mostrar que as frequências dos modos são dadas por

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{K_{12}}{\omega_0^2} \right)^{1/2}$$
$$\approx \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\pm \frac{K_{12}}{\omega_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\pm \frac{K_{12}}{\omega_0^2} \right)^2 \right]$$

- **Quantizar** o sistema significa quantizar 2 osciladores desacoplados. Para o **estado fundamental**, temos

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_+ + \frac{1}{2}\hbar\omega_- = \hbar\omega_0 - \frac{\hbar K_{12}}{8\omega_0^3}$$

A energia U_{vdw} é dada pela **variação na energia do estado fundamental** do sistema causada pelas flutuações dos dipolos,

$$U_{vdw} = \frac{1}{2}\hbar(\omega_+ + \omega_-) - 2 \times \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = -\frac{\hbar}{8\omega_0^3} \left(\frac{Q_{12}e^2}{mr^3} \right)^2 .$$

Por conveniência, reescrevemos U_{vdw} na forma

$$U_{vdw} = -\frac{Q_{12}^2\hbar\omega_0}{8r^6} \left(\frac{e^2}{m\omega_0^2} \right)^2 = -\frac{Q_{12}^2\hbar\omega_0\alpha_{cl}^2}{8r^6}$$

- **London (1930)**: obteve via **Mecânica Quântica** perturbativa a força entre 2 átomos neutros mas **polarizáveis**:

$$U_{\text{Lon}}(r) \approx -\frac{3\hbar\omega_0\alpha^2}{4r^6} \implies \vec{f}_{\text{Lon}} \approx -\frac{9\hbar\omega_0\alpha^2}{2r^7} \hat{r},$$

onde

- α \longrightarrow polarizabilidade estática
- ω_0 \longrightarrow frequência de transição dominante.

- Presença de \hbar : carater **genuinamente quântico** da força
- Sinal negativo \implies força atrativa
- **OBS**: as forças dispersivas são **não-aditivas**: para 3 átomos

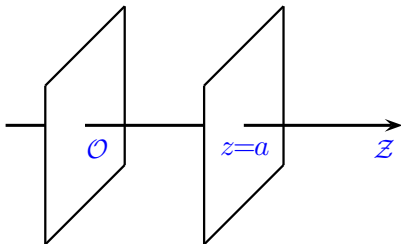
$$U_{\text{sistema}} = U_{12} + U_{23} + U_{13} + U_{123}$$

onde

$$U_{123} \sim \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{r_{12}^3 r_{23}^3 r_{13}^3}$$

O efeito Casimir e as forças dispersivas

- O **efeito Casimir** consiste na atração entre duas placas paralelas, neutras e perfeitamente condutoras no vácuo (previsto por **H.B.G. Casimir** em 1948).



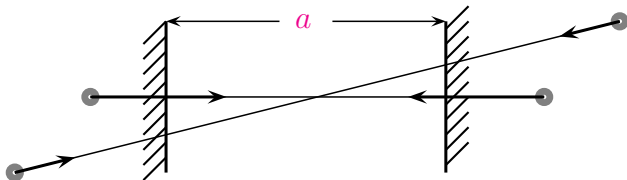
- Valor numérico previsto por Casimir:

$$\frac{F(a)}{L^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \approx -0,013 \frac{1}{(a/\mu\text{m})^4} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$$

Para $a = 1 \mu\text{m}$ temos: $P_{Cas} \approx 10^{-8} P_{atm}$

- Nessa situação **idealizada** e com $L^2 = 1 \text{ cm}^2$, a força de Casimir seria $\approx 10^{-7} \text{ N}$.

- **Condutividade finita**: as forças observadas têm valores menores (**metais reais aprisionam menos o campo**).
- Esse efeito tem sua origem relacionada às forças de van der Waals **dispersivas** (experimentos com **colóides**).
- Forças entre corpos macroscópicos **rarefeitos**:
 - nesse caso, os efeitos da **não-aditividade são desprezíveis**;
 - resultado obtido por integração das forças interatômicas (**London** $\rightarrow \gamma = 7$; **Casimir/Polder** $\rightarrow \gamma = 8$)



$$\vec{f} = -\frac{C}{r^\gamma} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{slabs}}{Area} = -\frac{C'}{a^{\gamma-4}}$$

- **Estabilidade de colóides:** $F. \text{elétrica} \times F. \text{de van der Waals}$; anos 40: Teoria DLVO (Derjagin, Landau, Verwey e Overbeek)
- **Desacordo teoria-experimento:** para explicar a estabilidade a força dispersiva deveria cair **mais rapidamente** que $1/r^7$ para **grandes distâncias** (**Verwey/Overbeek**, anos 40).
- **Conjectura de Overbeek:** **efeitos de retardamento**.
- **Obs:** tais efeitos são relevantes a partir de $r/c \sim 1/\omega_{mn}$.
- **Casimir e Polder 1948:**

“The Influence of Retardation on the London-vdW Forces”

Após cálculos **muito longos** em teoria de perturbação de **4ª ordem em EDQ**, obtiveram a interação **retardada**

$$U_{\text{Ret}}(r) = -\frac{23\hbar c}{4\pi} \frac{\alpha_A \alpha_B}{r^7} \implies f_{\text{Ret}} \sim \frac{1}{r^8}$$

- Comentário de **Casimir** e **Polder** ao final do artigo de 1948:
*“The very simple form of Eq. (56) and the analogous formula (25) suggest that **it might be possible to derive these expressions, perhaps apart from the numerical factors, by more elementary considerations.** This would be desirable since it would also give a more physical background to our result, a result which in our opinion is rather remarkable. So far we have not been able to find such a simple argument.”*
- **A conversa com Niels Bohr e a energia de ponto-zero**
*‘In the summer or autumn 1947 ... (but I am not absolutely certain that it was not somewhat earlier or later) I mentioned my results to Niels Bohr, during a walk. “**That is nice**”, he said, “**That is something new.**” I told him that I was puzzled by the extremely simple form of the expressions for the interaction at very large distance and he mumbled something about **zero-point energy.** That was all, but it put me on a new track.’*

- 'I found that calculating *changes of zero-point energy* really leads to the same results as the calculations of Polder and myself...' (Colloque sur la théorie de la liaison chimique, Paris, abril de 1948).

publicado em : J.Chim.Phys. 46, 407 1949

- '... *if there were two isotopes of empty space* you could really easy confirm the existence of the zero point energy. Unfortunately, or perhaps fortunately, there is only one copy of empty space and if you cannot change the atomic distance than you might change the shape and *that was the idea of the attracting plates.*'(Leipzig, 1998)
- 'On 29 May, 1948, I presented my paper *On the attraction between two perfectly conducting ..* at ... It was published in the course of the year..'

publicado em : Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948)

O método de Casimir

- **Novidade:** não estava no fato de 2 corpos neutros e sem multipolos permanentes se atraírem, mas sim no **método** utilizado (**Energia de Ponto Zero**).
- A **energia do vácuo** (do campo eletromagnético) dada por

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

expressão **divergente**, ainda sem utilidade.

- No entanto, corpos no vácuo alteram a **EPZ** do campo. **Em 1^a aproximação**, a presença dos corpos é simulada por condições de contorno **bem idealizadas**.
- Para placas **perfeitamente condutoras**, temos

$$\vec{E} \times \hat{n}|_{placas} = \vec{0}; \quad \vec{B} \cdot \hat{n}|_{placas} = 0.$$

- a **diferença entre as EPZ** na **ausência** e na **presença** dos corpos (**ambas divergentes**) que importa no cálculo da força.
- Para dar sentido às manipulações algébricas, é necessário trabalhar com **quantidades finitas**.
- **Regularização**: modifica-se a expressão introduzindo um parâmetro contínuo que **controle a divergência**.
- **Expressão regularizada = expressão finita**. Mas, no final dos cálculos, devemos retirar o “**parâmetro regularizador**”.
- A **energia de Casimir** é definida, então, por

$$\mathcal{E}_{Cas} := \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_I - \left(\sum_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \right)_{II} \right] :$$

I – regularizada e **com** condições de contorno.

II – regularizada mas **sem** condições de contorno.

s – **parâmetro regularizador**

Exemplo: 2 placas perfeitamente condutoras (versão unidimensional, por simplicidade!)

- “Placas” em $x = 0$ e $x = a$ (o campo se anula nesses pontos)
- As frequências dos modos do campo fora das placas não são alteradas, mas as frequências entre as placas ficam discretizadas: $\omega_n = |k_x|c = n\pi c/a$, com $n = 1, 2, \dots$
- EPZ entre as placas, **com CC** e não regularizada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_n = \frac{\hbar \pi c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\hbar \pi c}{2a} (1 + 2 + 3 + \dots)$$

- EPZ entre as placas, **sem CC** e não regularizada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2\pi} dk_x \frac{1}{2} \hbar |k_x| c = \frac{a \hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa$$

- **Regularizando**, subtraindo e fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos a \mathcal{E}_c :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_c(a) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} e^{-\epsilon n\pi/a} - \frac{a\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \kappa e^{-\epsilon \kappa} \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n\pi/a} + \frac{a\hbar c}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \int_0^{\infty} d\kappa e^{-\epsilon \kappa} \right\} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\hbar c}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{e^{\epsilon\pi/a} - 1} \right) + \frac{a\hbar c}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right\} \\
 &= \frac{\hbar c\pi}{8a} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sinh^2(\epsilon\pi/2a)} - \left(\frac{2a}{\pi\epsilon} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

- Os 2 termos dentro dos colchetes divergem para $\epsilon \rightarrow 0$.
Mas o mesmo no ocorre com a diferença entre eles!
- Não é difícil mostrar que

$$\frac{1}{\sinh^2(\epsilon\pi/2a)} = \left(\frac{2a}{\pi\epsilon} \right)^2 - \frac{1}{3} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies \mathcal{E}_c(a) = -\frac{\hbar\pi c}{24a}$$

Solução alternativa (intrigante)

- **Leonhard Euler (1707-1783)** e séries divergentes: Euler abriu o caminho para extensões analíticas, etc.



- Ensaio com uma **série elementar**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=2}$$

Mas, para $|x| < 1$ (x real ou complexo):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = h(x)$$

- Para $x = 2$ a **série à esquerda é divergente**, mas a **função h à direita é bem definida** (h não é definida apenas em $x = 1$).
- Tomamos $h(2) = -1$ como o valor a ser usado no cálculo de interesse. Provocativamente, escrevemos

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1.$$

- Voltemos, então, à série divergente para $\mathcal{E}_C(a)$ em $1 + 1$,
 $(1 + 2 + 3 + \dots) = \left(\frac{1}{1^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Big|_{s=-1}$

Para $\Re(s) > 1$ (x real ou complexo), essa série coincide com a função **zeta de Riemann**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta_R(s)$$

- Para $s = -1$ a série à esquerda é divergente, mas a função ζ_R à direita é bem definida e nos fornece $\zeta_R(-1) = -1/12$.
- Fazemos, então,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta_R(-1) = -\frac{1}{12} \implies \mathcal{E}_c(a) = -\frac{\hbar\pi c}{24a}.$$

O Ministério da Educação adverte: o uso prolongado dessa explicação para o valor finito de série divergente pode causar danos à sua saúde matemática; aprenda logo extensão analítica em Métodos Matemáticos. (M V Cougo-Pinto)

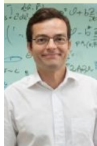


- *“Based on this understanding, we propose a new model for the end state of small, **rapidly rotating asteroids** which allows them to be comprised of relatively fine regolith grains held together by **van der Waals cohesive forces.**”
(Scheeres et al - [2010](#))*

Efeito Casimir: elaborações

- **Experimentos:** 1^a observação feita por Sparnaay em 1958 (apenas compatibilidade); a partir de 1997 há inúmeros experimentos de alta precisão desse efeito;
- **qualquer campo relativístico** sob CC exhibe efeito Casimir;
- **outras geometrias** (esfera e uma plano, dois cilindros,..);
- **outras CC:** condutividade finita dos metais, rugosidade, efeitos térmicos, ..., dimensões extras compactificadas;
- **Outras técnicas:** globais (função ζ generalizada, método de Schwinger, fórmula de Lifshitz, método do espalhamento.. ; locais (tensor energia-momento,..)
- influência de **campos externos:** por ex., folhas de grafeno sob campo magnético (campos fortes \implies força quantizada)
- **Pinças óticas** e forças de Casimir (**LPO da UFRJ**).

O Grupo de Flutuações Quânticas (GFQ)



Prof. Paulo Américo



Prof. Felipe Rosa



Prof. Marcus Venícus

+ Prof. Felipe Pinheiro
+ Prof. Nathan Viana (LPO)
+ Prof. François Impens
+ Prof. Moysés Nussenzveig (LPO)

+ Reinaldo Souza, Wilton Kort-Kamp,
Thiago Hartz, Guilherme Bastos, Mateus
Lima, Diney Ether (LPO), Luis Pires (LPO),
Vinicius Henning, Renan Nunes,
Daniela Szilard, Anna Batista, Marcius
Vinicius, Patricia Abrantes, Bruno
Oliveira, Yuri Muniz...

+Prof. Carlos Farina



ARTIGOS

- S K Lamoreaux, *Physics Today*, **February (2007)** 40-45.
- C F, *Braz. J. Phys.* **36 (2006)** 1137-1149.
- R F Melo e Souza, W J M Kort-Kamp, C Sigaud and C F, *Am. J. Phys.* **81**, 366 (2013).
- C F, F C Santos and A C Tort, *Am. J. Phys.* **67 (1999)** 344-349.

LIVROS

- Verwey and Overbeek 1948; Edwin Power 1964
- Margenau and Kestner 1969; Dieter Langbein 1974
- Mahanty and Ninham 1977; Milonni 1994
- Craig and Thirunamachandran 1998; Milton 2001
- Rowlinson 2002; Adrian Parsegian 2006
- Bordag, Klimchitskaya, Mohideen and Mostepanenko 2009
- Dalvit-Milonni-Roberts-Rosa (eds. 2010)
- Akbar Salam, 2010; Israelashivili 2011; Buhmann 2012

MUITO OBRIGADO!