

Introdução ao Fabry-Pérot

LASER-IF-UFRJ (Julia Veloso & Gabriel Madruga)

1. Teoria:

O Fabry-Pérot corresponde a um tipo de *interferômetro*, isto é, um instrumento ou uma montagem que desvia feixes a fim de causar interferência. Basicamente, os interferômetros utilizam o princípio da superposição de ondas para amplificá-las (interferência construtiva) ou atenuá-las (interferência destrutiva). A imagem 1A ilustra alguns exemplos.

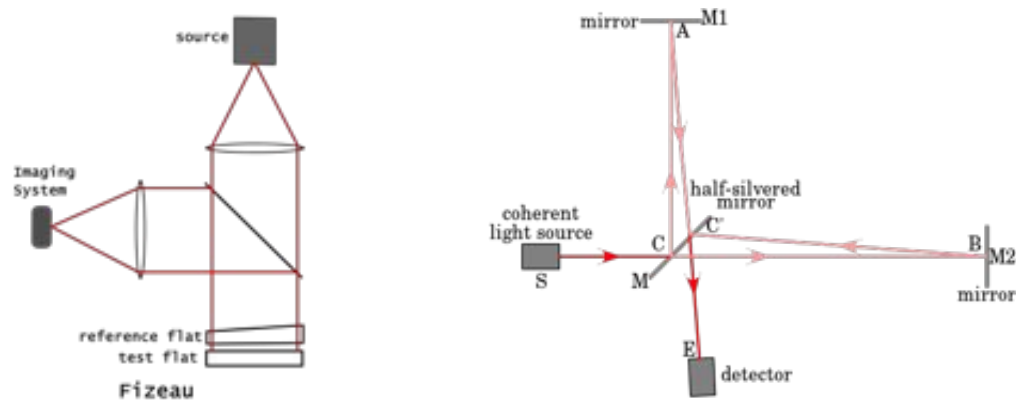


Imagem 1A: Interferômetro de Fizeau e Interferômetro de Michelson. Fonte: Wikipedia.

Dependendo da aparelhagem, pode-se causar a interferência de dois - como no Interferômetro de Michelson (vide imagem 1B) - ou mais feixes de luz; no caso do Fabry-Pérot, ocorre a interferência de múltiplos feixes (*multiple beam interference*, em inglês). Seus componentes básicos são uma cavidade, que pode de alguns milímetros a alguns centímetros de comprimento, e dois espelhos paralelos, um em cada extremidade, como pode ser visto no esquema da imagem 1B.

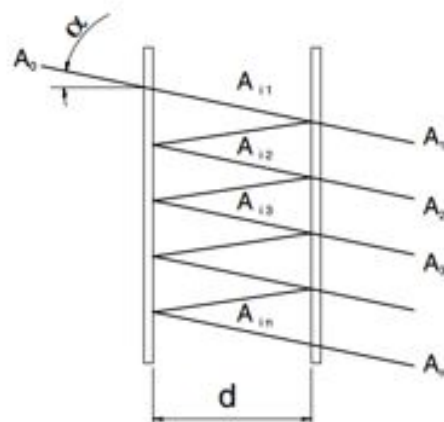


Imagem 1B: Fabry-Pérot com cavidade de comprimento d e feixe incidente a um ângulo α .

A luz incidente atinge o primeiro espelho com um ângulo α , de modo que parte do feixe é transmitido e parte é refletido. A fração transmitida, por sua vez, incide no segundo espelho e também é parcialmente refletida e parcialmente transmitida, e assim sucessivamente. No LASER, o ângulo de incidência é $\alpha=0$, portanto as múltiplas ondas que ficam contidas se superpõem construtiva ou destrutivamente, dependendo do λ , no interior da cavidade (imagem 1C).

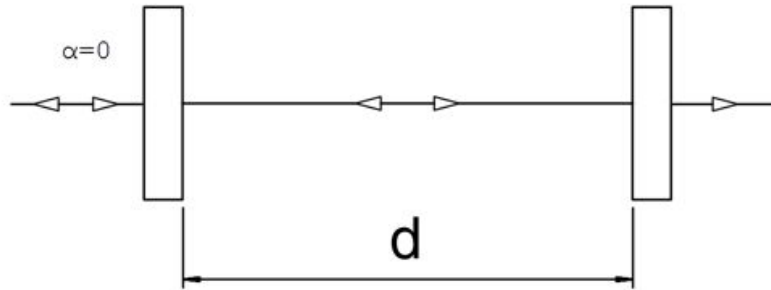


Imagem 1C: Ângulo de incidência igual a 0. Adaptado de uni-duisburg-essen.de.

Dependendo da diferença de fase das ondas transmitidas e refletidas dentro da cavidade, o grau de interferência será maior ou menor. Dessa forma, é coerente afirmar que, ao incidir um feixe de laser cuja fase varia em função do tempo, haverá determinados λ para os quais a interferência será inteiramente construtiva, isto é, no comprimento d caberão múltiplos inteiros de $\lambda/2$.

2. Análise matemática:

Ao analisar geometricamente os raios refletidos e transmitidos, pode-se concluir que a diferença de fase δ entre dois raios sucessivos de comprimento λ é dada por:

$$\delta = \frac{4\pi n d \cos \theta}{\lambda}, \begin{cases} n = \text{índice de refração do meio} \\ d = \text{comprimento da cavidade} \\ \theta = \text{ângulo de incidência} \end{cases}$$

A demonstração desta fórmula pode ser encontrada no Apêndice (5.). As demais não serão demonstradas, pois isto foge do objetivo da introdução; no entanto, elas podem ser encontradas em livros de ótica como Eugene Hecht e Grant R. Fowles.

No nosso caso, como $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$.

Além disso, após análise mais aprofundada, chega-se à equação:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R \cos \delta}$$

sendo $\frac{I_t}{I_0}$ a fração transmitida da incidência inicial e R o índice de reflexão do espelho ($R + T = 1$). Para que a transmitância seja máxima, precisamos que:

$$\cos \delta = 1 \rightarrow \delta = 2\pi m, m \in \mathbb{N}$$

Combinando as equações, chega-se a:

$$\begin{cases} \delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} \\ \delta = 2\pi m \\ c = v\lambda \end{cases} \rightarrow v = \frac{mc}{2nd}$$

Definiremos Δv como Free Spectral Range (FSR).

$$\Delta v \equiv v_{m+1} - v_m = \frac{c}{2nd}$$

Em suma, o FSR representa a diferença de fase entre dois λ para os quais a intensidade transmitida é máxima. Sua importância ficará mais clara na Análise Gráfica (4.) desta introdução.

Por fim, definiremos também o conceito de Finesse (\mathcal{F}), a qual é uma medida da nitidez das franjas de interferência. Ela é descrita matematicamente por:

$$\mathcal{F} \equiv \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Sendo assim, podemos reescrever a função $\frac{I_t}{I_0}$ e δ como:

$$\begin{cases} \delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} \\ c = v\lambda \\ \Delta v = \frac{c}{2nd} \end{cases} \rightarrow \delta = \frac{2\pi v}{\Delta v}$$

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Contudo, no LASER v varia senoidalmente no tempo; por isso, a fórmula mais adequada é:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\Delta v} A \cos(2\pi vt + \phi') + \phi \right)}$$

3. Análise Gráfica:

A imagem 3A corresponde ao gráfico da transmitância em função de δ .

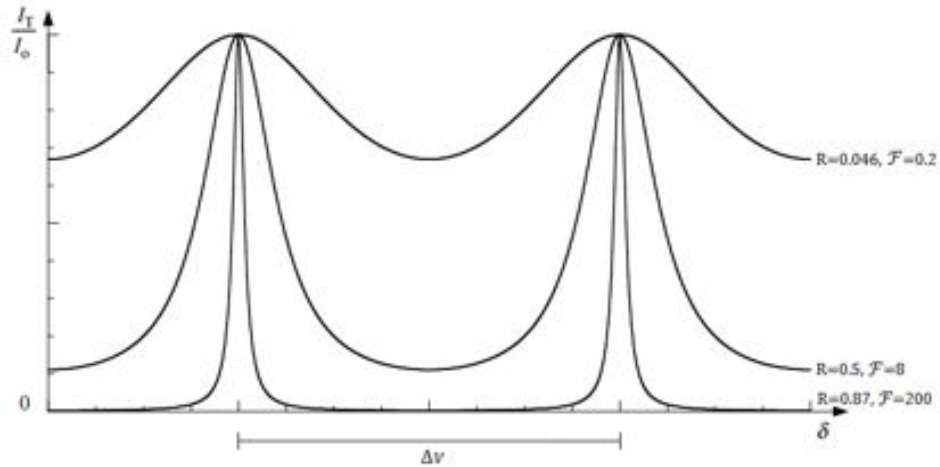


Imagem 3A: Gráfico da transmitância. Adaptado de physics.uark.edu.

É evidente que, quanto maior a Finesse, menor será a intensidade transmitida em todos os pontos, com exceção dos máximos da função. Se R for muito pequeno, de modo que \mathcal{F} também seja, as franjas de interferência serão vagas e indistinguíveis; por outro lado, se R for próximo de 1, o que torna \mathcal{F} grande, as franjas serão mais definidas.

No estudo do Fabry-Pérot, também é possível analisar o gráfico da refletividade se deduzirmos:

$$I_t + I_r = I_0 \rightarrow \frac{I_r}{I_0} = 1 - \frac{I_t}{I_0}$$

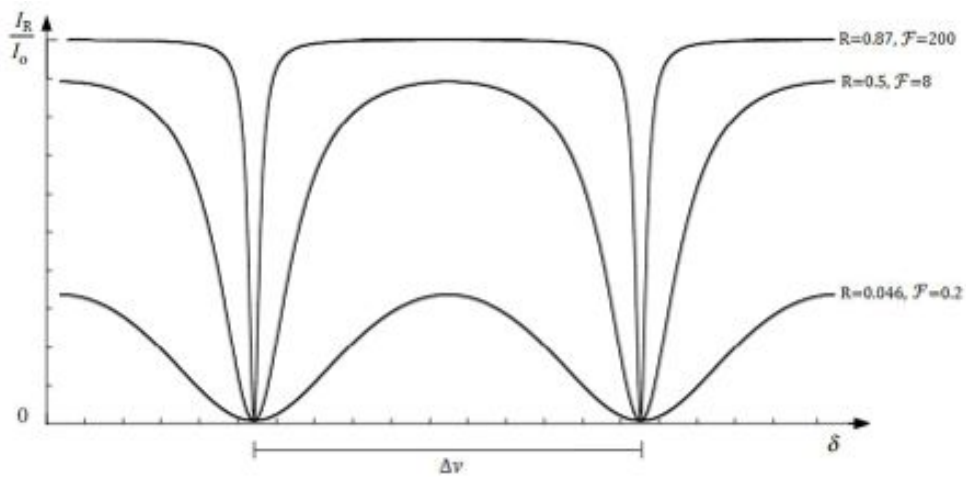


Imagem 3B: Gráfico da refletividade. Adaptado de physics.uark.edu.

A interpretação anterior persiste: quanto maior a Finesse, maior será a fração da intensidade inicial que será refletida na maioria dos pontos, com exceção dos mínimos do gráfico.

4. Aparelhagem:

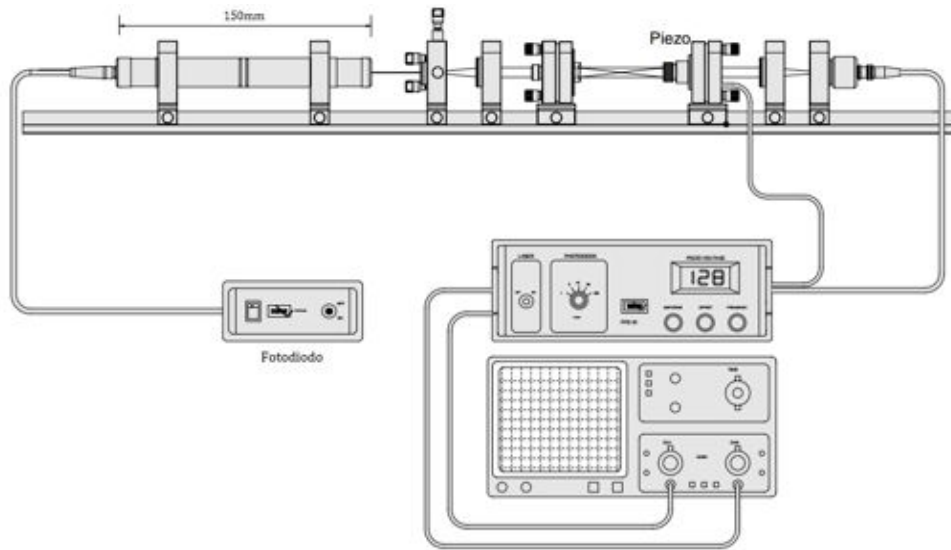


Imagem 4A: Aparelhagem. Adaptado de duepublico.uni-duisburg-essen.de.

A imagem 4A exemplifica a montagem de um interferômetro Fabry-Pérot. Um laser é apontado para uma rede de difração anexada a um piezo elétrico, isto é, uma peça cerâmica que gera corrente elétrica ao sofrer pressão mecânica e vice-versa. Neste caso, uma corrente senoidal é aplicada ao piezo, o que causa sua expansão e contração e altera o ângulo da rede de difração. O feixe, então, é desviado por uma série de espelhos até atingir o espelho de entrada do Fabry-Pérot. No LASER, o Fabry-Pérot possui 150mm de comprimento; assim, podemos calcular:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2nd} \cong \frac{3 \times 10^8}{2 \times 1.5 \times 10^{-1}} = 1\text{GHz}$$

O feixe que sai pelo segundo espelho da peça é, então, captado por um fotodiodo. Este dispositivo transmite os dados para o osciloscópio, que passa a exibir o gráfico da transmitância.

Uma outra montagem possível é posicionar um divisor de feixe (*beam splitter*) antes do primeiro espelho do Fabry-Pérot e captar o feixe refletido com o fotodiodo. Dessa forma, o gráfico mostrado no osciloscópio será o da refletividade.

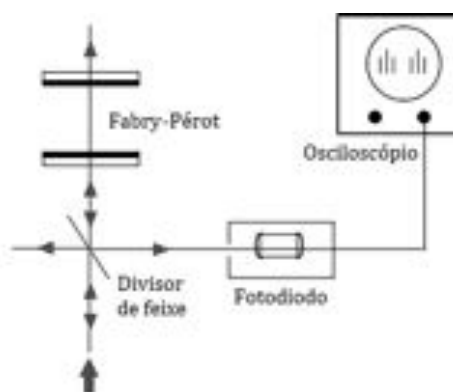


Imagem 3B: Montagem alternativa. Adaptação de physics.uark.edu.

5. Apêndice:

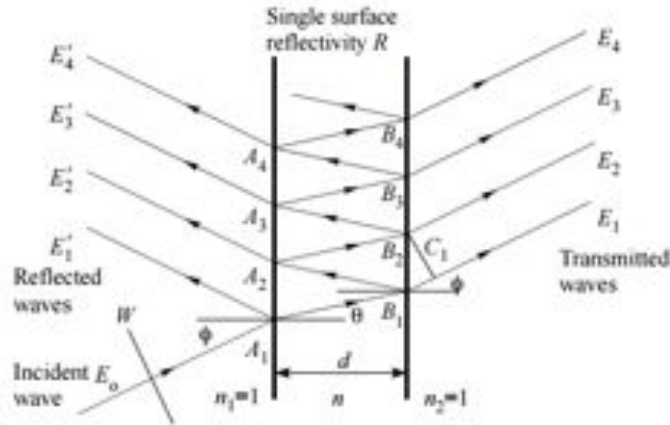


Figure 4.1: A Fabry-Perot gives rise to multiple beam interference both in transmission and reflection.

wave by an amount corresponding to the difference in their paths. For example, the optical paths of E_2 and E_1 differ by

$$\begin{aligned} n \overline{B_1 A_2 B_2} - \overline{B_1 C_1} &= \frac{2nd}{\cos \phi} - \frac{2d}{\cos \phi} \sin \phi \sin \theta = \frac{2nd}{\cos \phi} - \frac{2d}{\cos \phi} \sin \phi (n \sin \phi) \\ &= \frac{2nd}{\cos \phi} (1 - \sin^2 \phi) = 2nd \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.1)$$

This path difference corresponds to a phase difference

$$2\delta = 2\pi \times \frac{2nd \cos \theta}{\lambda} = \frac{4\pi nd \cos \theta}{\lambda} = \frac{\omega 2nd \cos \theta}{c}. \quad (4.2)$$

7. Referências bibliográficas:

- <http://www.physik.uni-siegen.de/quantenoptik/lehre/fpraktikum/fabry-perot.pdf/>
- <http://physics.uark.edu/lasers/expt04fabryperot.pdf>
- https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-12229/O.5_%20Fabry%20Perot%20Resonator.pdf
- http://www.gravity.uwa.edu.au/docs/EGR/Lecture6/Fabry_Perot_Cavity.pdf
- <https://en.wikipedia.org/>
- HECHT, Eugene. **Optics**. 4a edição ed. Addison Wesley.
- FOWLES, Grant R. **Introduction to Modern Optics**. 2a edição ed. Dover Publications.