Dinâmica Relativista

Em todos os livros de Mecânica aparece a célebre lei de Newton traduzida pela equação

$$\vec{F} = m\vec{a}\ . \tag{0.1}$$

Se tivermos uma força constante a aceleração também será constante e a velocidade cresce linearmente com o tempo, isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t \tag{0.2}$$

Ao fim de um certo tempo a velocidade ultrapassará o valor da velocidade da luz no vazio, *c*.

Como sabemos isto não é possível. O que isto significa é que a expressão da lei de Newton dada por (0.1) é aproximada. Com efeito, a expressão correcta é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\ . \tag{0.3}$$

Neste caso, a uma força constante corresponde um momento linear que cresce linearmente com o tempo,

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F}t\ . \tag{0.4}$$

Mas, não é verdade que a velocidade cresça linearmente com o tempo.

Se considerarmos uma partícula que no seu referencial próprio tem massa *m*, a transformação de Lorentz mostra que no referencial em que tem velocidade $\vec{v}$, temos:

$$c\vec{p} = \gamma\vec{\beta}mc^2 \tag{0.5}$$

com $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Multiplicando por *c* a eq. (0.4) e usando a eq. (0.5) é fácil obter

$$\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c\vec{p}_0}{mc^2} + \frac{c\vec{F}}{mc^2}t\ . \tag{0.6}$$

Se, para simplificar, admitir que $\vec{p}_0 = 0$ é fácil quadrar a equação e obter:

$$\beta = \frac{Ft/mc}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}}\ . \tag{0.7}$$

Deixei de usar o sinal de vector porque, neste caso, a eq. (0.6) mostra que a velocidade tem a direcção e sentido da força.

Da eq. (0.7) podemos concluir que $\beta \to 1$ quando *t* tende para infinito.

Exercício: Discuta em que condições a equação (0.6) conduz ao resultado aproximado dado pela mecânica não relativista, eq. (0.2).

Para um leitor menos familiarizado com a relatividade, vejamos como se pode obter a equação (0.5).

Comecemos por considerar um referencial de inércia **S** e um outro **S´** móvel, com movimento de translação em relação ao primeiro e com velocidade ***v*** constante ao longo do eixo dos xx.

As coordenadas de um mesmo acontecimento nos dois referenciais estão relacionadas pela transformação de Lorentz que, neste caso, se escreve:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad . \tag{0.8}$$

A transformação inversa é:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \end{aligned} \quad . \tag{0.9}$$

Os quatro números (E, cp_x, cp_y, cp_z) transformam-se da mesma maneira que as coordenadas, isto é:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta cp'_x) \\ cp_x &= \gamma(cp'_x + \beta E') \\ cp_y &= cp'_y \\ cp_z &= cp'_z \end{aligned} \quad . \tag{0.10}$$

Uma vez que *S′* é o referencial próprio da partícula teremos $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ e $E' = mc^2$. No referencial em que está parada a partícula não tem energia cinética. A sua energia tem apenas o valor correspondente à sua massa. Introduzindo estes valores na eq. (0.10) obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ cp_x &= \gamma\beta mc^2 \\ cp_y &= 0 \\ cp_z &= 0 \end{aligned} \qquad (0.11)$$

A eq. (0.5) é a expressão vectorial das três últimas equações escrita no caso geral em que a velocidade de S' em relação a S e portanto da partícula em S, é ao longo de uma direcção qualquer e não ao longo do eixo dos xx.

Exercícios:

1 – Mostre que (0.9) é a transformação inversa de (0.8);

2 – Deduza a transformação inversa de (0.10);

3 – Mostre que $E^2 - (cp)^2$ é um invariante, isto é, tem o mesmo valor em todos os referenciais de inércia. Qual é esse valor?