

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Горкавенко Володимир Миколайович

**Діаграмна техніка Фейнмана.  
Ймовірність розпаду та  
переріз розсіяння частинок**

Навчальний посібник

Київ – 2014



# ЗМІСТ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Вступ</b>   | <b>7</b>  |
| <b>Позначення та запис основних величин</b>  | <b>10</b> |
| <b>ЧАСТИНА I</b>   |           |
| <b>ДІАГРАМНА ТЕХНІКА ФЕЙНМАНА.<br/>КВАНТОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА<br/>У НИЖЧИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ</b>   |           |
| <b>Розділ 1.</b> Постановка задачі. Матриця розсіяння в представленні взаємодії. Матриця розсіяння у квантовій теорії поля   | <b>20</b> |
| <b>Розділ 2.</b> Операторний формалізм. Електрон-електронне розсіяння у другому порядку теорії збурень. Фотонний пропагатор  | <b>35</b> |
| <b>Розділ 3.</b> Операторний формалізм. Електрон-фотонне розсіяння (ефект Комптона) у другому порядку теорії збурень   | <b>47</b> |
| <b>Розділ 4.</b> Проекуючий оператор. Електронний пропагатор   | <b>56</b> |
| <b>Розділ 5.</b> Теорема Віка. Елементи діаграмної техніки Фейнмана в координатному просторі   | <b>61</b> |
| <b>Розділ 6.</b> Процеси за участю античастинок. Електрон-позитронна дво- та трифотонна анігіляція. Розгалуження діаграми. Елементи діаграмної техніки Фейнмана в імпульсному просторі | <b>69</b> |
| <b>Розділ 7.</b> Множник симетрії на прикладах $e - e^+$ , $e - e^-$ та $\gamma - \gamma$ -розсіяння   | <b>79</b> |
| <b>Розділ 8.</b> Ферміонні петлі. Теорема Фаррі  | <b>89</b> |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Розділ 9.</b> Правила діаграмної техніки Фейнмана.<br>Приклади для процесів четвертого порядку.<br>Перехресна інваріантність                        | <b>94</b>  |
| <b>Розділ 10.</b> Процеси в зовнішніх полях  | <b>110</b> |
| <b>Розділ 11.</b> Взаємодія електронів із ферміонами інших поколінь, зі скалярними та векторними частинками.<br>Приклади процесів у стандартній моделі | <b>118</b> |
| <b>ЧАСТИНА II</b><br><b>ІМОВІРНІСТЬ РОЗПАДУ</b><br><b>ТА ПЕРЕРІЗ РОЗСІЯННЯ ЧАСТИНОК.</b><br><b>ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ</b>                                |            |
| <b>Розділ 12.</b> Імовірність розпаду та переріз розсіяння частинок. Умова унітарності   | <b>134</b> |
| <b>Розділ 13.</b> Процеси резонансного розсіяння та розпаду  | <b>158</b> |
| <b>Розділ 14.</b> Загальні питання обчислення $ M_{fi} ^2$   | <b>166</b> |
| <b>Розділ 15.</b> Кулонівське розсіяння  | <b>171</b> |
| <b>Розділ 16.</b> Електрон-електронне розсіяння  | <b>180</b> |
| <b>Розділ 17.</b> Електрон-фотонне розсіяння   | <b>189</b> |
| <b>Розділ 18.</b> Електрон-позитронна анігіляція у два фотони  | <b>204</b> |
| <b>Розділ 19.</b> Народження частинок при електрон-позитронних зіткненнях  | <b>209</b> |
| <b>Розділ 20.</b> Розпад $Z$ -бозона   | <b>219</b> |

---

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Розділ 21. Розпад мюона | 225 |
|-------------------------|-----|

**ЧАСТИНА III**  
**РАДІАЦІЙНІ ПОПРАВКИ.**  
**КВАНТОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА**  
**У ВИЩИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ**

|  |     |
|--|-----|
| Розділ 22. Техніка розрахунку інтегралів у вищих порядках теорії збурень   | 235 |
| Розділ 23. Методи регуляризації розбіжних інтегралів   | 245 |
| Розділ 24. Аналіз перенормованості теорій поля   | 257 |
| Розділ 25. Структура однопетльових розбіжностей. Контрчлени. $R$ -операція   | 265 |
| Розділ 26. Точний електронний пропагатор. Розрахунок в однопетльовому наближенні   | 279 |
| Розділ 27. Точний фотонний пропагатор. Розрахунок в однопетльовому наближенні  | 304 |
| Розділ 28. Власно-енергетична функція фотона. Розклад Челлена-Лемана. Альтернативні методи розрахунку поляризаційного оператора              | 320 |
| Розділ 29. Вершинна функція  | 338 |
| Розділ 30. Рівняння Дайсона. Тотожності Уорда та Уорда-Такахаші. Радіаційні поправки до ліній реальних частинок. Визначення фізичного заряду | 345 |
| Розділ 31. Перенормування вершинної функції. Аномальний магнітний момент електрона   | 358 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Розділ 32. Випромінення м'яких фотонів.<br/>Позбавлення маси фотона у кінцевих виразах</b> | <b>371</b> |
| <b>Розділ 33. Кулонівське розсіяння з урахуванням<br/>радіаційних поправок</b>                | <b>379</b> |
| <b>Розділ 34. Радіаційні поправки до закону Кулона.<br/>Лембівський зсув</b>                  | <b>387</b> |
| <b>Розділ 35. Біжуча константа зв'язку.<br/>Поняття про ренормалізаційну групу</b>            | <b>388</b> |
| <b>Розділ 36. Кіральна аномалія</b>   | <b>399</b> |
| <b>Додаток 1. Різні типи представлень у квантовій ме-<br/>ханіці</b> . . . . .                | 420        |
| <b>Додаток 2.Перетворення Лоренца для різних типів<br/>полів</b> . . . . .                    | 425        |
| <b>Додаток 3.Скалярні поля</b> . . . . .  | 427        |
| <b>Д3.1. Нейтральне скалярне поле</b> . . . . .   | 427        |
| <b>Д3.2. Заряджене скалярне поле</b> . . . . .  | 428        |
| <b>Додаток 4.Векторні поля</b> . . . . .  | 430        |
| <b>Д4.1. Нейтральне масивне векторне поле</b> . . . . .                                       | 430        |
| <b>Д4.2. Заряджене масивне векторне поле</b> . . . . .  | 434        |
| <b>Д4.3. Безмасове векторне поле на прикладі<br/>електромагнітного поля</b> . . . . .         | 435        |
| <b>Д4.4. Поляризаційні стани векторних полів</b> . . . . .                                    | 440        |
| <b>Д4.5. Вибір калібрування</b> . . . . .   | 443        |
| <b>Додаток 5. Ферміони та ферміонні поля</b> . . . . .  | 448        |
| <b>Д5.1. Розв'язки рівняння Дірака для вільної<br/>частинки</b> . . . . .                     | 450        |
| <b>Д5.2. Кіральні стани ферміонів</b> . . . . .   | 457        |
| <b>Д5.3. Безмасові ферміони. Нейтрино</b> . . . . .   | 459        |
| <b>Д5.4. Ферміонне поле</b> . . . . .   | 462        |
| <b>Додаток 6. Стан вакууму та амплітуда стану в пред-<br/>ставленні Фока</b> . . . . .        | 465        |
| <b>Література</b>   | <b>470</b> |

## ВСТУП

Квантова теорія поля виникла в кінці 20-х років XX ст. Її початком вважають роботу П. Дірака 1927 р. Причиною її виникнення була потреба в описі фізики при високих енергіях як теорії, що повинна враховувати як релятивістські ефекти, так і ефекти, пов'язані з перетворенням частинок та зміною їх кількості під час фізичних процесів.

У квантовій теорії поля елементарні частинки є квантами відповідних полів, а їх взаємодія відбувається за рахунок обміну квантами полів, що переносять взаємодію.

Історично, першими полями, які розглядала квантова теорія поля, були електромагнітні та ферміонні (електрон-позитронне) поля, як єдині відомі на той час. Для опису взаємодій між квантами цих полів була створена *квантова електродинаміка* (КЕД).

На початку свого існування фізичні процеси розглядалися в так званому канонічному формалізмі, заснованому на безпосередньому використанні операторів народження-знищення. Це був достатньо громіздкий метод, на зміну якому в 1948 р. прийшов потужний метод, заснований на діаграмній техніці Фейнмана, що використовується й сьогодні. Величезною перевагою методу Фейнмана є фізична наочність діаграмного підходу та відносна простота в математичному описі взаємодій між частинками.

З часом стало зрозуміло, що окрім електрон-позитронного та електромагнітного полів існують також поля, яким відповідають інші елементарні частинки — мюони, тау-лептони, нейтрино, кварки, бозон Хігса, а також поля, кванти яких відповідають за нові взаємодії —  $W^\pm$ ,  $Z$  бозони (слабка взаємодія), глюони (сильна взаємодія).

В 70-х роках XX ст. завдяки роботам Ш. Глешоу, С. Вайнберга та А. Салама була створена *стандартна модель фізики елементарних частинок* (СМ), яка на сьогодні претендує на опис електромагнітної, слабкої та сильної взаємодії між елементарними частинками і повністю узгоджується з експериментальними даними, за винятком деяких моментів, за якими стоїть вже нова фізика.

Даний навчальний посібник створено на основі лекцій та практичних занять зі спеціальних курсів “Квантова електродинаміка” та “Прикладна квантова електродинаміка”, які викладає автор, починаючи з

2003 року, студентам фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета першої частини посібника – показати засади, на яких виникла діаграмна техніка Фейнмана та детально її вивчити на прикладах основних процесів у нижчих порядках теорії збурень у КЕД та СМ. Після ознайомлення з першою частиною посібника читач повинен вміти представити конкретний процес у КЕД на рівні діаграм та математично записати відповідні елементи  $\hat{S}$ -матриці.

Мета другої частини посібника – навчити читача знаходити перерізи розсіяння та реакцій, а також ширини розпадів частинок у КЕД та СМ в скелетному наближенні. Тобто навчити отримувати величини, які можна порівняти з експериментальними даними. Після ознайомлення з другою частиною посібника читач повинен вміти записати перерізи розсіяння та реакцій через елементи  $\hat{S}$ -матриці та розрахувати їх до чисельного значення, яке можна порівняти з даними експериментів.

Посібник спрямовано на підготовку читача до розрахунку процесів у вищих порядках теорії збурень. Перший розділ є введенням до поняття формалізму  $\hat{S}$ -матриці в квантовій теорії поля та розкладу  $\hat{S}$ -матриці в ряд за теорією збурень. Розд. 2–4 присвячені математичній техніці розрахунку середніх від  $\hat{S}$ -матриці на рівні операторів народження-знищення. Розд. 5–8 підводять читача до формулювання діаграмної техніки Фейнмана, яку остаточно сформульовано в розд. 9. В розд. 9–10 розглянуто перехресну інваріантність у діаграмній техніці та узагальнення правил діаграмної техніки Фейнмана для процесів у зовнішніх полях. В розд. 11 показано, що розвинена в роботі техніка може бути використана для розгляду процесів у СМ. В розд. 12 показано, як записуються вирази для перерізів розсіяння та реакцій, а також ширини розпадів частинок через елементи  $\hat{S}$ -матриці. Розд. 13 присвячено зведенню проблеми розрахунку квадрата модуля амплітуди процесу до розрахунку згорток від  $\gamma$ -матриць та наведено техніку обрахунку згорток. У розд. 14–20 наведено приклади розрахунку основних процесів у КЕД та СМ, проведено порівняння з експериментальними даними. У додатках міститься стисле наведення необхідних для засвоєння основного матеріалу формул та результатів з квантової механіки, теорії класичних та вторинно квантованих полів.

Автор висловлює подяку рецензентам П.І. Голоду, В.П. Гусиніну та О.Л. Ребенко, а також О.В. Барабашу за корисні поради та заува-



---

ження. Автор також щиро дякує А.П. Пасічному, який довгий час читав лекції з курсу “Квантова електродинаміка” на фізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Матеріал цих лекцій був суттєво використаний при написанні даного посібника.

Автор буде вдячний за зауваження та побажання щодо покращення даного посібника. Їх ви можете надіслати за електронною адресою [gorka@univ.kiev.ua](mailto:gorka@univ.kiev.ua) Електронну версію навчального посібника можна отримати на сайті [www.qft.univ.kiev.ua/people/gorkav/gorkav\\_u.html](http://www.qft.univ.kiev.ua/people/gorkav/gorkav_u.html)

# ПОЗНАЧЕННЯ ТА ЗАПИС ОСНОВНИХ ВЕЛИЧИН

Ми будемо працювати в плоскому просторі-часі, для якого метричний тензор  $g^{\mu\nu}$  має діагональний вигляд

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.1)$$

Перехід від контраваріантних до коваріантних компонент відбувається за допомогою метричного тензора

$$a_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu, \quad f_{\mu\nu} = \sum_{\gamma=0}^3 g_{\mu\gamma} f^\gamma_\nu = \sum_{\gamma,\delta=0}^3 g_{\mu\gamma} g_{\delta\nu} f^{\gamma\delta}, \quad \sum_{\mu=0}^3 g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (0.2)$$

де  $\delta_\alpha^\beta$  – одиничний тензор ( $\delta_\alpha^\alpha = 1$ ;  $\delta_\alpha^\beta = 0$ , якщо  $\alpha \neq \beta$ ). Для метричного тензора у формі (0.1):  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ .

Зокрема, чотирирівимірний радіус-вектор та чотирирівимірний вектор імпульсу є контраваріантними величинами:  $x^\alpha = (ct, \vec{x})$ ,  $p^\alpha = (E/c, \vec{p})$ , тобто коваріантними векторами до них будуть  $x_\alpha = (ct, -\vec{x})$  та  $p_\alpha = (E/c, -\vec{p})$ .

Скалярний добуток двох контраваріантних 4-векторів  $a = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$  та  $b = (b^0, b^1, b^2, b^3) = (b^0, \vec{b})$  визначається як

$$ab = \sum_{\nu=0}^3 a^\nu b_\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g^{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (0.3)$$

Іноді, у громіздких формулах, для спрощення розуміння виразів, скалярний добуток 4-векторів буде братися у дужки  $ab \equiv (ab)$ .

Для похідних використовуються позначення

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha u_i. \quad (0.4)$$

Для спрощення записів будемо опускати знак підсумовування і вважати, що за двома індексами, що повторюються, якщо окремо не зазначено, проводиться підсумовування. Якщо окремо не зазначено, грецькі літери означають підсумовування від 0 до 3, латинські — від 1 до 3.

Перетворення Фур'є визначаються у вигляді

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k f(k) e^{-ikx}, \\ f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x f(x) e^{ikx}. \end{cases} \quad (0.5)$$

Для дельта-функції в одновимірному просторі справедливо

$$\delta(x^1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik^1 x^1} dk^1. \quad (0.6)$$

Для дельта-функції в  $n$ -вимірному просторі:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}) &= \delta(x^1)\delta(x^2)\dots\delta(x^n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k^1 x^1 + k^2 x^2 + \dots + k^n x^n)} dk^1 dk^2 \dots dk^n. \end{aligned} \quad (0.7)$$

### Системи одиниць. Енергетичні одиниці.

**Система одиниць**  $\hbar = c = 1$ .

У межах даного курсу як складової частини квантової теорії поля нам знадобляться такі константи: стала Планка ( $\hbar$ ), швидкість світла у вакуумі ( $c$ ), електричний заряд та маса частинки — кванта електрон-позитронного поля.

Розмірність та значення даних величин залежать від обраної системи одиниць. Існує багато варіантів вибору системи одиниць. Наведемо значення необхідних нам констант у системах одиниць СІ та СГСЕ.

У міжнародній системі одиниць СІ використовуються такі основні одиниці: метр (м), секунда (с), кілограм (кг), Кулон (Кл), Джоуль (Дж) ( $1\text{Дж} = 1\text{кг} \cdot 1\text{м}^2/1\text{с}^2$ ). Тоді значення вказаних констант є такі:

$$\begin{cases} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; \\ c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \\ |e| = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}; \\ m_e = 9.10938 \cdot 10^{-31} \text{ кг}. \end{cases} \quad (0.8)$$

У системі одиниць СГС (*сантиметр-грам-секунда*) базовими одиницями є сантиметр (см), грам (г), секунда (с). Для роботи в електродинаміці СГС розширюється до системи одиниць СГСЕ (*абсолютна електростатична система*, в якій електрична стала  $\varepsilon_0 = 1$ , магнітна стала  $\mu_0 = 1/c^2$ ), СГСМ (*абсолютна електромагнітна система*, в якій  $\varepsilon_0 = 1/c^2$ ,  $\mu_0 = 1$ ) або *гауссової системи одиниць* ( $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\mu_0 = 1$ ). У системі одиниць СГСЕ:

$$\begin{cases} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-27} \text{ ерг} \cdot \text{с}, \quad (1\text{ерг} = 1\text{г} \cdot 1\text{см}^2/1\text{с}^2); \\ c = 2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с}; \\ |e| = 4.80320 \cdot 10^{-10} \text{ статкулон}, \quad (1\text{статкулон} = 1\text{г}^{1/2} \cdot 1\text{см}^{3/2}/1\text{с}); \\ m_e = 9.10938 \cdot 10^{-28} \text{ г}. \end{cases} \quad (0.9)$$

Щоб задати інтенсивність деякої взаємодії незалежно від обраної системи одиниць треба ввести деякий безрозмірний параметр. Зокрема, для електродинаміки інтенсивність взаємодії можна визначати через енергію кулонівської взаємодії між двома частинками з елементарними зарядами одного знака, що розташовані на відстані  $r$  одна від одної:  $E = k \cdot e^2/r$ . Параметр  $k$  та елементарний заряд  $e$  в різних системах одиниць мають різні значення. Поділивши обидві частини виразу на величину  $\hbar c$  розмірності [енергія]  $\cdot$  [довжина] отримаємо  $E/\hbar c = \alpha/r$ , де безрозмірна величина  $\alpha = ke^2/\hbar c$  отримала назву сталої тонкої структури<sup>1</sup>. Вона є комбінацією фундаментальних констант релятивістської квантової фізики і визначає інтенсивність процесів за участі електромагнітної взаємодії.

Отже, стала тонкої структури визначається, виходячи із запису закону Кулона, у певній системі одиниць, наприклад:

<sup>1</sup>Константа отримала назву з ефекту розщеплення рівнів енергії атома за рахунок спин-орбітальної взаємодії. Цей ефект пропорційний  $\alpha^2$ .

$$\text{в СГСЕ} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \text{в СІ} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (0.10)$$

де  $\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/Дж · м – електрична стала в СІ. Чисельне значення  $\alpha$  не залежить від обраної системи одиниць

$$\alpha = 0.00729735 \cdot 10^{-3} \approx 1/137.036. \quad (0.11)$$

Як система одиниць СІ, так і система СГСЕ не є зручними в теорії поля: чисельні значення вказаних констант є або надзвичайно великими, або надзвичайно малими. Зокрема, одиниця виміру маси 1 кг (або 1 г) є надзвичайно великою для опису відомих елементарних частинок так само, як і енергетична одиниця 1 Дж (або 1 ерг) є занадто великою для опису процесів у СМ. Тому зручно ввести нову енергетичну одиницю, а також домовитись вимірювати масу також в цих енергетичних одиницях. Ми маємо право це робити, якщо використати співвідношення між масою та енергією частинки в стані спокою у формі  $E = mc^2$ . За енергетичну одиницю в квантовій теорії поля обрано енергію, яку отримує електрон при проходженні різниці потенціалу в 1 Вольт. Ця одиниця отримала назву електрон-вольт (еВ):

$$1\text{eV} = |e| \cdot 1\text{В} = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{Джоуль} = 1.60218 \cdot 10^{-12} \text{ерг}. \quad (0.12)$$

Використовуються також похідні одиниці, а саме: мегаелектрон-вольт (1МеВ = 10<sup>6</sup> еВ), гігаелектрон-вольт (1ГеВ = 10<sup>9</sup> еВ), тераелектрон-вольт (1ТеВ = 10<sup>12</sup> еВ) та ін. У цій системі одиниць, зокрема, маса електрона дорівнює  $m_e c^2 = 9.10938 \cdot 10^{-31} \cdot 299792458^2$  кг·м/с = 8.1871 · 10<sup>-14</sup> Дж  $\approx$  0.511 МеВ.

Однак навіть після переходу на нові енергетичні одиниці залишаються деякі незручності пов'язані із захащенням формул комбінаціями констант  $\hbar$  та  $c$ . Тому в квантовій теорії поля найбільш зручною виявилась система одиниць, в якій  $\hbar = c = 1$ , тобто дія та швидкість є безрозмірними величинами. Тоді енергія та імпульс мають розмірність маси, що очевидно, наприклад, із співвідношень  $E = mc^2$  та  $p = mv$ . Отже,  $[E] = [p] = [m]$ .

Розмірність довжини та часу також виражаються через розмірність маси  $[t] = [x] = [m]^{-1}$ , оскільки, наприклад,  $x = vt$ ,  $[Et] = [\hbar]$ ,  $[px] = [\hbar]$ . Чисельні значення легко отримати із системи рівнянь, що складається з означень  $\hbar$  та  $c$ , якщо згадати, що розмірність  $\hbar$  є 1Дж · 1с = 1кг · 1м<sup>2</sup>/1с:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} = 1; \\ c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 1; \\ \text{кг} = 5.60959 \cdot 10^{35} \text{ еВ}; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1\text{м} = 5.06773 \cdot 10^6 \text{ еВ}^{-1}; \\ 1\text{сек} = 1.51927 \cdot 10^{15} \text{ еВ}^{-1}. \end{array} \right. \quad (0.13)$$

Розмірності величин, що експериментально спостерігаються та явно обраховуються в теорії поля також виражаються через розмірність маси, а саме: переріз розсіяння  $[\sigma] = [m]^{-2}$ , імовірність розпаду  $[\omega] = [m]$ . Тоді для виконання зворотного переходу потрібно знати, як виразити через  $m$ ,  $c$ ,  $\hbar$  правильну розмірність фізичних величин. Це легко зробити, враховуючи  $[\frac{\hbar}{mc}] = [l]$ ,  $[\frac{\hbar}{mc^2}] = [t]$ . Корисно навести чисельні значення<sup>1</sup>, наприклад, для  $m = m_e$  згідно з (0.8):

$$\frac{\hbar}{m_e c} = 3.86159 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad \frac{\hbar}{m_e c^2} = 1.28809 \cdot 10^{-21} \text{ с}. \quad (0.14)$$

Надалі, за невеликим виключенням, ми будемо працювати саме в системі одиниць  $\hbar = c = 1$ .

### Системи одиниць Гаусса та Хевісайда – Лоренца

Як відомо, до просторової густини лагранжіана електромагнітне поле входить завдяки двом доданкам. Перший доданок описує взаємодію поля з електричними зарядами, другий доданок описує вільне електромагнітне поле

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{c} j^\mu A_\mu - a^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (0.15)$$

де  $j^\mu$  –  $\mu$ -та компонента чотири-вектора електричного струму  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ , кожна компонента якого пропорційна елементарному заряду  $e$ ;  $c$  – швидкість світла;  $a^2$  – константа, що може бути обрана з міркувань зручності. Конкретний вибір цієї константи буде визначати, в якій системі одиниць ми працюємо.

У гауссовій системі одиниць  $a^2 = 1/(16\pi)$ , тоді польове рівняння набуває вигляду  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$ . Зокрема, кулонівський потенціал, що створюється точковим зарядом  $Q$  на відстані  $r$  від свого положення, має вигляд

$$A_0 = \frac{Q}{r}, \quad (0.16)$$

<sup>1</sup>Корисно зазначити, що  $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м} = 5.06773 \text{ ГеВ}^{-1}$ .

а кулонівська сила взаємодії двох електронів

$$|\vec{F}| = \frac{e^2}{r^2}.$$

Безрозмірна стала тонкої структури в гаусовій системі  $\alpha = e^2/(\hbar c)$ .

У системі одиниць Хевісайда – Лоренца  $a^2 = 1/4$ , тоді польове рівняння спрощується  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}j^\mu$ , де штрих означає величину в новій системі одиниць. Кулонівський потенціал, що створюється точковим зарядом  $Q'$  на відстані  $r$  від свого положення, отримує додатковий множник

$$A'_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{Q'}{r}, \quad (0.17)$$

а кулонівська сила взаємодії двох електронів

$$|\vec{F}| = \frac{e'^2}{4\pi} \frac{1}{r^2}.$$

Оскільки значення добутку  $j^\mu A_\mu$  (або сили Кулона) не повинно залежати від вибраної системи одиниць, то легко встановити зв'язок між елементарними зарядами в різних системах одиниць, а саме  $e^2 = e'^2/(4\pi)$ . З іншого боку, розглядаючи вільну частину лагранжіану в одній та іншій системі одиниць, легко зрозуміти, що  $A_\mu = \sqrt{4\pi}A'_\mu$ . Отже,  $eA_\mu = e'A'_\mu$ .

Надалі ми будемо працювати в системі одиниць Хевісайда – Лоренца й опустимо штрихи в позначеннях. Константа тонкої структури в цій системі одиниць становить

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137.036}. \quad (0.18)$$

Оскільки ми домовились працювати в системі  $\hbar = c = 1$ , то

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad (0.19)$$

тобто елементарний заряд у системі  $\hbar = c = 1$  у позначеннях Хевісайда – Лоренца  $|e| = \sqrt{4\pi\alpha} \approx \sqrt{(4\pi)/137} \approx 0.3$  й є безрозмірною величиною. Лагранжіан електричного поля із взаємодією та рівняння, що визначає динаміку поля, у цій системі одиниць матимуть вигляд

$$\mathcal{L}(x) = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu. \quad (0.20)$$

Зафіксувавши  $a^2$ , отримуємо вирази для інших електромагнітних величин. Наприклад, в СІ

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}}; \quad 1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ с}}. \quad (0.21)$$

Використавши (0.12), (0.13) та зв'язок між зарядом електрона в різних системах відліку

$$\sqrt{4\pi\alpha} = 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad (0.22)$$

отримаємо

$$1 \text{ В} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \text{ еВ} \approx 3.3 \text{ еВ}; \quad 1 \text{ Тл} \approx 195.35 \text{ еВ}^2. \quad (0.23)$$

### Представлення $\gamma$ -матриць

$\gamma$ -матриці в рівнянні Дірака не фіксуються однозначно умовами

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{та} \quad (\gamma^\mu)^+ = \gamma_\mu. \quad (0.24)$$

Вибір вигляду  $\gamma$ -матриць є питанням домовленості. Найбільш поширеними є представлення Дірака та кіральне (вейлівське) представлення.

*Представлення Дірака* зручно використовувати для аналізу нерелятивістського наближення. У ньому

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^5 = \gamma^{5+} = \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5, \end{aligned} \quad (0.25)$$

де  $I$  є одиничною матрицею  $2 \times 2$ , а  $\sigma^i$  є матрицями Паулі:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.26)$$

Наведемо також явний вигляд матриць  $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$  та  $\vec{\Sigma} = -\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$  (векторні величини тут мають верхні індекси):

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (0.27)$$



Кіральне представлення зазвичай використовують при розгляді процесів у СМ<sup>1</sup>. Воно має певні переваги при розгляді ультрарелятивістського наближення.

Кіральне представлення отримується з представлення Дірака за допомогою матриці (див. Д5.9):

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix},$$

тоді

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma^5 = \gamma^{5+} = \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5. \end{aligned} \quad (0.28)$$

Наведемо також явний вигляд матриць  $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$  та  $\vec{\Sigma} = -\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}$  (векторні величини тут мають верхні індекси):

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}; \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (0.29)$$

За допомогою  $\gamma$ -матриць можна побудувати антисиметричну матрицю

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu], \quad (0.30)$$

яка буде утворювати спінову матрицю  $\Sigma_i = \varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}/2$ , де  $i, j, k$  приймають значення 1, 2, 3, тобто  $\Sigma_1 = \sigma^{12}$ ,  $\Sigma_2 = \sigma^{31}$ ,  $\Sigma_3 = \sigma^{12}$ . У випадку коли перший індекс нуль, отримуємо  $\alpha$ -матриці у відповідному представленні:  $\sigma^{0i} = i\gamma^0\gamma^i = i\alpha^i$ .

Перекреслений символ векторної величини незалежно від представлення надалі означатиме згортку відповідного чотири-вектора з  $\gamma$ -матрицями:  $\not{a} = a^\nu\gamma_\nu$ .

### Причинні функції

Будемо визначати причинні функції Гріна (пропатори полів) за тим самим принципом, за яким переставні функції полів отримують з перестановної функції Паулі – Йордана для скалярного поля. Нагадаємо, що

<sup>1</sup>Кіральне представлення  $\gamma$ -матриць також називають представленням Вейля.

$$\begin{aligned}
i[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]_- &= i[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^*(x')]_- = \bar{D}(x - x'), \\
i[\hat{U}_\mu(x), \hat{U}_\nu(x')]_- &= i[\hat{V}_\mu(x), \hat{V}_\nu^*(x')]_- = -\bar{D}_{\mu\nu}(x - x') = \\
&= -\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) \text{Zar} D(x - x'), \\
i[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x')]_- &= -\bar{D}_{\mu\nu}^0(x - x') = -g_{\mu\nu} \bar{D}(x - x')|_{m=0}, \\
i\{\hat{\Psi}_\alpha(x), \hat{\Psi}_\beta(x')\}_+ &= \bar{G}_{\alpha\beta}(x - x') = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} \bar{D}(x - x'),
\end{aligned} \tag{0.31}$$

де  $\hat{\phi}, \hat{\phi}, \hat{U}_\mu, \hat{V}_\mu, \hat{A}_\mu, \hat{\Psi}_\beta$  — оператори, а  $\bar{D}(x), \bar{D}_{\mu\nu}(x), \bar{D}_{\mu\nu}^0(x), \bar{G}_{\alpha\beta}(x)$  — функції Паулі – Йордана скалярного (нейтрального та зарядженого), масивного векторного (нейтрального та зарядженого), електромагнітного та спірного полів відповідно. Вирази у квадратних і фігурних дужках є відповідно комутатором та антикомутатором двох операторів:  $[\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ . Тоді причинні функції скалярного, масивного векторного, безмасового векторного (електромагнітного) та спірного полів, відповідно, будемо визначати через вакуумні середні у вигляді:

$$\begin{aligned}
i\langle 0|\hat{T}\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle &= i\langle 0|\hat{T}\hat{\phi}^*(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle = D(x - x'), \\
i\langle 0|\hat{T}\hat{U}_\mu(x)\hat{U}_\nu(x')|0\rangle &= i\langle 0|\hat{T}\hat{V}_\mu^*(x)\hat{V}_\nu(x')|0\rangle = -D_{\mu\nu}(x - x') = \\
&= -\left(g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) D(x - x'), \\
i\langle 0|\hat{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')|0\rangle &= -D_{\mu\nu}^0(x - x') = -g_{\mu\nu} D(x - x')|_{m=0}, \\
i\langle 0|\hat{T}\hat{\Psi}_\alpha(x)\hat{\Psi}_\beta(x')|0\rangle &= -i\langle 0|\hat{T}\hat{\Psi}_\beta(x')\hat{\Psi}_\alpha(x)|0\rangle = \\
&= G_{\alpha\beta}(x - x') = (i\hat{\partial} + m)_{\alpha\beta} D(x - x').
\end{aligned} \tag{0.32}$$

Явний вигляд причинних функцій через фур'є-представлення наведено в додатках.

### Скорочення та позначення

КЕД — квантова електродинаміка;

СМ — стандартна модель фізики елементарних частинок;

$\alpha = e^2/4\pi$  — стала тонкої структури;

$r_e = \alpha/m_e$  — класичний радіус електрона.

Додатковий матеріал, який при першому читанні можна не враховувати, наведено в основному тексті посібника курсивом.

# ЧАСТИНА I

## ДІАГРАМНА ТЕХНІКА ФЕЙНМАНА. КВАНТОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА У НИЖЧИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

# РОЗДІЛ 1

## Постановка задачі. Матриця розсіювання в представленні взаємодії. Матриця розсіювання у квантовій теорії поля

Будемо вважати, що читач вже знайомий з теорію вільних класичних та квантованих бозонних та ферміонних полів. Базуючись на цьому, розглянемо фізичну задачу, коли частинки взаємодіють.

Безпосередньо процес взаємодії описати складно, однак можна розв'язати задачу, коли в початковому стані частинки є вільними і після взаємодії переходять в стан, у якому вони також є вільними. У цьому випадку можна ставити питання про визначення кінцевого стану, в який система з налітаючих частинок переходить внаслідок взаємодії.

Отже, будемо розглядати ті зіткнення (взаємодію), у процесі яких можна виділити три етапи. Перший етап: складові фізичної системи розташовані на достатньо великій відстані одна від одної, коли взаємодією між ними можна знехтувати. Другий етап: складові системи безпосередньо взаємодіють. Третій етап: складові фізичної системи розлітаються на достатньо великі відстані і взаємодією між ними знову можна знехтувати.

Метою нашого опису процесу взаємодії є встановлення стану фізичної системи після взаємодії, якщо відомий її стан до взаємодії.

### Матриця розсіювання

Для опису зазначених процесів зручно ввести<sup>1</sup> оператор розсіювання  $\hat{S}$ , що пов'язує початковий та кінцевий стани системи в представленні взаємодії (див. дод. 1).

Нехай  $\Psi_I(-\infty)$  – хвильова функція системи, що описує її стан до взаємодії в момент часу  $t = -\infty$ , а  $\Psi_I(\infty)$  – описує стан системи після взаємодії в момент часу  $t = \infty$ . Надалі нижній символ  $I$ , що позначає представлення взаємодії, писати не будемо, однак будемо мати його на увазі. Визначимо оператор  $\hat{S}$  таким чином:

$$\Psi(\infty) = \hat{S}\Psi(-\infty). \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Нагадаємо, як вводиться оператор розсіювання для квантово-механічних систем та зробимо узагальнення для розгляду процесів у вторинно квантованій теорії.

Розглянемо детально фізичний зміст елементів матриці розсіяння. Для цього запишемо повний гамільтоніан системи у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V = \hat{H}'_0 + V', \quad (1.2)$$

де  $\hat{H}_0$  та  $\hat{H}'_0$  – оператори, що описують стан фізичної системи без урахування взаємодії її окремих частин у моменти часу до та після зіткнення, відповідно. Доданки  $V$  та  $V'$  описують взаємодію між окремими частинами системи і мають зникати при  $t \rightarrow \pm\infty$  відповідно, що повністю відповідає реальній фізичній ситуації в класичній фізиці. Однак цю умову не можна строго реалізувати як у квантовій механіці, так і у квантовій теорії поля.

Справді, нехай ми маємо два вільних електрони, які в  $t = -\infty$  віднесені на нескінченну відстань один від одного і не взаємодіють. У квантовій механіці хвильова функція вільного електрона являє собою плоску хвилю, тобто електрон має однакову ймовірність перебувати в будь-якій точці простору, тому вираз: "два вільних електрони на нескінченності" не має сенсу. Крім того, у квантовій механіці існує нелокальний тип взаємодії такий, як в ефекті Ейнштейна – Розе – Подольського, коли два електрони, що описуються спільною хвильовою функцією, відчувають зміну стану один одного, навіть віднесені на нескінченність.

Коли в класичній фізиці ми кажемо про два електрони, що розташовані на нескінченній відстані один від одного і не взаємодіють, то маємо на увазі, що окремо існують як заряджені частинки, так і електромагнітні поля навколо них. У квантовій теорії поля ситуація дещо інша. Електрон не існує окремо, тобто сам по собі. Унаслідок взаємодії електрона з вакуумом, навколо нього створюється так звана "шуба" віртуальних частинок, які будуть змінювати його "голий" заряд і масу та визначатимуть його фізично спостережувані характеристики. Тому використання формалізму вільних "голих" частинок неможливе.

Отже, зважаючи на наведені зауваження, ми будемо використовувати лише наближену картину невзаємодіючих частинок, ввівши формальну заміну

$$V \rightarrow V e^{-|\epsilon|t}, \quad (\epsilon \rightarrow +0).$$

Ця заміна буде відповідати адіабатичному включенню та виключенню взаємодії при  $t = \pm\infty$  відповідно. Штрихи в записі гамільтоніана

після зіткнення введені тому, що внаслідок взаємодії могла змінитися природа окремих елементів системи та характер взаємодії між ними.

Введемо власні функції та власні значення операторів гамільтоніанів  $\hat{H}_0$  та  $\hat{H}'_0$ , котрі, фактично, будуть описувати стан системи в моменти часу  $t = \pm\infty$ :

$$\hat{H}_0\varphi_\alpha = E_\alpha\varphi_\alpha, \quad \hat{H}'_0\tilde{\varphi}_\beta = \tilde{E}_\beta\tilde{\varphi}_\beta. \quad (1.3)$$

Розкладемо функції  $\Psi(-\infty)$  та  $\Psi(\infty)$  за базисними функціями  $\varphi_\alpha$ ,  $\tilde{\varphi}_\beta$ :

$$\Psi(-\infty) = \sum_\alpha C_\alpha\varphi_\alpha; \quad \Psi(\infty) = \sum_\beta \tilde{C}_\beta\tilde{\varphi}_\beta \quad (1.4)$$

та підставимо їх у (1.1), тоді

$$\tilde{C}_\beta = \sum_\alpha S_{\beta\alpha}C_\alpha; \quad \text{де} \quad S_{\beta\alpha} = \int \tilde{\varphi}_\beta^+ \hat{S} \varphi_\alpha dV. \quad (1.5)$$

Отже, якщо система в момент часу  $t = -\infty$  перебувала в стані  $\varphi_{\alpha_0}$ , то коефіцієнт у розкладі (1.4)  $C_\alpha = \delta_{\alpha, \alpha_0}$ , тоді з (1.5)

$$|\tilde{C}_\beta|^2 = |S_{\beta\alpha_0}|^2, \quad (1.6)$$

тобто матричний елемент  $|S_{\beta\alpha}|^2$  визначає ймовірність перебування системи в стані  $\beta$  після зіткнення, якщо до зіткнення система перебувала в стані  $\alpha$ . Оскільки сума ймовірностей переходу систему зі стану  $\alpha$  в усі інші стани  $\beta$  дорівнює одиниці:

$$\sum_\beta |S_{\beta\alpha}|^2 = \sum_\beta S_{\beta\alpha}S_{\beta\alpha}^* = \sum_\beta S_{\beta\alpha}S_{\alpha\beta}^\dagger = 1, \quad \text{або} \quad \hat{S}^+ \hat{S} = 1, \quad (1.7)$$

то  $\hat{S}$ -матриця має бути унітарною.

Щоб коректно отримати та розв'язати рівняння для  $\hat{S}$ -матриці необхідно спочатку розглянути оператор часової еволюції в представленні взаємодії.

### Оператор еволюції в представленні взаємодії

Аналогічно до визначення  $\hat{S}$ -матриці (1.1), що пов'язує стани системи в нескінченному часовому проміжку від  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ , введемо оператор еволюції в представленні взаємодії  $\hat{U}(t, t_0)$ , що пов'язує

стани системи за скінченний проміжок часу між  $t$  та  $t_0$ :

$$\Psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\Psi(t_0). \quad (1.8)$$

Рівняння для оператора  $U(t, t_0)$  можна отримати, використавши рівняння на хвильову функцію в представленні взаємодії (Д1.26) та (1.8):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = V(t)U(t, t_0) \quad (1.9)$$

з початковою умовою  $\hat{U}(t_0, t_0) = 1$ .

Проінтегруємо за часом (1.9) та, врахувавши початкову умову, отримуємо

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V(t') \hat{U}(t', t_0). \quad (1.10)$$

Методом послідовних ітерацій розв'язок інтегрального рівняння можна представити у вигляді нескінченного ряду

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= 1 + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt' V(t') + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) + \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 V(t_1)V(t_2)V(t_3) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Використавши оператор хронологічного впорядкування Дайсона, що переставляє множники в такому порядку, що значення часової змінної у них спадає зліва направо

$$\hat{T}(V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)) = V(t_i)V(t_j)\dots V(t_k), \quad t_i > t_j > \dots > t_k, \quad (1.12)$$

можна переписати (1.11) у формі, щоб межі інтегрування за кожною змінною були однаковими.

Перевіримо сказане на прикладі подвійного інтеграла

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{T}(V(t_1)V(t_2)), \quad (1.13)$$

де вираз під інтегралом означає:

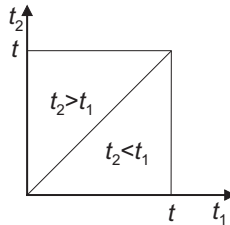
$$\hat{T}(V(t_1)V(t_2)) = \begin{cases} V(t_1)V(t_2), & t_1 > t_2, \\ V(t_2)V(t_1), & t_2 > t_1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Розіб'ємо область інтегрування на дві частини  $t_1 > t_2$  та  $t_1 < t_2$  (рис. 1.1) і запишемо (1.13) у вигляді

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 V(t_2)V(t_1). \quad (1.15)$$

Замінімо в другому доданку  $t_1 \leftrightarrow t_2$  і отримаємо

$$I_2 = 2! \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) \Rightarrow \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{T}(V(t_1)V(t_2)). \quad (1.16)$$



**Рис. 1.1.** Розбиття області інтегрування на дві частини при інтегруванні з використанням оператора хронологічного впорядкування Дайсона.



Аналогічно можна розглянути  $n$ -кратний інтеграл в (1.11)

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n) = \\ = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{T}(V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отже, можна всі верхні границі інтегрування в кожному з доданків виразу (1.11) замінити на  $t$ . При цьому, внаслідок симетрії інтеграла відносно перестановок змінної інтегрування кожен із доданків буде давати значення в  $n!$  разів більше.

Таким чином, оператор еволюції можна розкласти в ряд

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{T}(V(t_1)V(t_2)\dots V(t_n)), \quad (1.18)$$

який можна формально записати у вигляді

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V(t')}. \quad (1.19)$$

З явного вигляду оператора еволюції випливає, що він унітарний і має такі властивості:

$$\hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}^+(t, t') = \hat{U}(t', t). \quad (1.20)$$

Тепер можна коректно визначити  $\hat{S}$ -матрицю як

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} \hat{U}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' V(t')}, \quad (1.21)$$

тобто  $\hat{S}$ -матриця визначається лише оператором взаємодії (гамільтоніаном взаємодії) у представленні взаємодії ( $V$ ).

Зазначимо, що вираз для  $\hat{S}$ -матриці у формі (1.21) справедливий лише за умови  $V = V'$ , тобто, коли характер взаємодії не змінюється після зіткнення.

### Інтеграли руху та діагоналізація $\hat{S}$ -матриці

Розглянемо питання, від яких характеристик системи, інтегралів руху може залежати  $\hat{S}$ -матриця.

Нагадаємо, що певна фізична величина буде зберігатися в системі, якщо для оператора цієї величини буде виконуватись умова:

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

У представленні Шредінгера ця умова означає:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{Q}_{\text{Sh}} = \frac{\partial \hat{Q}_{\text{Sh}}}{\partial t} + [\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}]_-. \quad (1.23)$$

Тобто, якщо оператор не залежить від часу явно, то фізична величина буде зберігатися, якщо

$$[\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}]_- = 0. \quad (1.24)$$

У нашому випадку гамільтоніан системи дорівнює  $\hat{H}_0$  при  $t = \pm\infty$  та  $\hat{H}_0 + V_{\text{Sh}}$  при скінченному моменту часу. Тобто оператор фізичної величини, що зберігається, має комутувати з  $\hat{H}_0$  та з  $\hat{H}_0 + V_{\text{Sh}}$ :

$$[\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}_0 + V_{\text{Sh}}]_- = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}_0]_- = -[\hat{Q}_{\text{Sh}}, V_{\text{Sh}}]_- = 0. \quad (1.25)$$

Так і має бути, оскільки ліва частина (1.25) не залежить від  $V_{\text{Sh}}$ . Враховуючи, що в представленні взаємодії оператори мають вигляд (Д1.21):

$$\begin{cases} V_{\text{I}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} V_{\text{Sh}} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}, \\ Q_{\text{I}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} Q_{\text{Sh}} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}, \end{cases} \quad (1.26)$$

отримуємо, що вираз (1.25) справедливий і в представленні взаємодії:

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{\text{I}}, V_{\text{I}}]_- &= \hat{Q}_{\text{I}} V_{\text{I}} - V_{\text{I}} \hat{Q}_{\text{I}} = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} \hat{Q}_{\text{Sh}} V_{\text{Sh}} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} - e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} V_{\text{Sh}} \hat{Q}_{\text{Sh}} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} [\hat{Q}_{\text{Sh}}, V_{\text{Sh}}]_- e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H_0} = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тоді, враховуючи означення (1.21), випливає, що  $\hat{S}$ -матриця та оператор фізичної величини, що зберігається в часі, повинні комутувати

$$[\hat{Q}_{\text{I}}, \hat{S}]_- = 0. \quad (1.28)$$

Останнє твердження означає, що власні функції операторів мають спільну частину і ці оператори одночасно приводяться до діагонального вигляду. Тому, усереднюючи  $\hat{S}$ -матрицю за станами  $\alpha$  та  $\beta$ , отримуємо

$$S_{\alpha\beta} = \langle \gamma' | S^q | \gamma \rangle \delta_{qq'}, \quad (1.29)$$

де  $q$  – власні значення оператора  $\hat{Q}$ , що є інтегралами руху системи (енергія, момент кількості руху, ізотопічний спін та ін.),  $\gamma$  – інші квантові числа. Тобто  $\hat{S}$ -матриця має залежати від інтегралів руху системи.

Зауважимо, що не всі оператори інтегралів руху комутують між собою, тому стан  $\alpha$  не може характеризуватися одночасно всіма інтегралами руху. Можна показати, що  $\hat{S}$ -матриця не залежить від інтегралів руху, що змінюються при перетвореннях, які не змінюють гамільтоніан системи. Наприклад, покажемо, що у випадку центрально-симетричного поля  $\hat{S}$ -матриця не може залежати від проекції повного кутового моменту системи  $\hat{I}$ , не зважаючи на те, що умови комутації виконуються:

$$[\hat{I}, \hat{S}]_- = 0. \quad (1.30)$$

Позначимо проекцію моменту на вісь  $z$  через  $m$ . Запишемо умову комутації матриці розсіяння та проекції моменту  $\hat{I}_x$ :  $\hat{I}_x \hat{S} = \hat{S} \hat{I}_x$  у матричному вигляді

$$\begin{aligned} \langle m' \gamma' | \hat{I}_x \hat{S} | m \gamma \rangle &= \sum_{m'', \gamma''} \langle m' \gamma' | \hat{I}_x | m'' \gamma'' \rangle \langle m'' \gamma'' | \hat{S} | m \gamma \rangle = \\ &= / \hat{I}_x \text{ не змінює стан } \gamma / = \\ &= \sum_{m''} \langle m' | \hat{I}_x | m'' \rangle \langle m'' \gamma' | \hat{S} | \gamma m \rangle = / \text{з іншого боку} / = \\ &= \sum_{m''} \langle m' \gamma' | \hat{S} | \gamma m'' \rangle \langle m'' | \hat{I}_x | m \rangle. \quad (1.31) \end{aligned}$$

Припустимо, що  $\hat{S}$ -матриця залежить від  $m$  і значення  $m$  є власним значенням  $\hat{I}_z$ , тоді

$$\begin{aligned} \langle m'' \gamma' | \hat{S} | \gamma m \rangle &= \langle \gamma' | S^{m''} | \gamma \rangle \delta_{m'', m}, \quad \langle m' \gamma' | S | \gamma m'' \rangle = \langle \gamma' | S^{m'} | \gamma \rangle \delta_{m', m''} \\ \Rightarrow \langle m' | \hat{I}_x | m \rangle \langle \gamma' | S^{m'} | \gamma \rangle &= \langle \gamma' | S^{m'} | \gamma \rangle \langle m' | \hat{I}_x | m \rangle. \quad (1.32) \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $\hat{I}_z|m\rangle = m|m\rangle$  та  $[\hat{I}_z, \hat{I}_x]_- \neq 0$ , отримаємо, що існують такі  $m$  та  $m'$  ( $m \neq m'$ ), для яких  $\langle m'|\hat{I}_x|m\rangle \neq 0$ . Тому на цей множник можна скоротити, тоді

$$\langle \gamma'|S^m|\gamma\rangle = \langle \gamma'|S^{m'}|\gamma\rangle \Rightarrow S^m = S^{m'}. \quad (1.33)$$

Тобто ми дійшли до суперечності і довели, що  $\hat{S}$  не залежить від  $m$ .

Якщо система ізотропна, то так і має бути, оскільки  $S_{\alpha\beta}$  визначає ймовірність переходу системи з одного стану в інший й не може залежати від вибору системи відліку, в той час як проекція моменту змінюється при повороті системи відліку. Аналогічно можна показати, що  $S$ -матриця не може залежати від проекцій повного імпульсу системи, проекцій ізотопічного спіну<sup>1</sup> і т.д.

### Спостережувані величини

Нехай у початковому стані  $i$  (*initial*) буде  $N_i$  частинок, а в кінцевому стані  $f$  (*final*)  $N_f$  частинок. Якщо система замкнена, то в ній мають зберігатися енергія та імпульс, тобто можна записати для оператора переходу:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 T_{fi} \delta^4 \left( \sum_{\beta=1}^{N_f} p_{f\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N_i} p_{i\alpha} \right), \quad (1.34)$$

де  $\sum_{\alpha=1}^{N_i} p_{i\alpha}$ ,  $\sum_{\beta=1}^{N_f} p_{f\beta}$  – 4-імпульси системи в початковому та кінцевому станах відповідно, які надалі будемо позначати  $p_i$  та  $p_f$ ;  $\hat{T}$  – матриця розсіяння на енергетичній поверхні; множник  $i(2\pi)^4$  ввели для зручності. Символ Кронекера відповідає випадку, коли стан системи після взаємодії не змінився.

Як зазначалося в (1.6), імовірність переходу системи зі стану  $i$  в стан  $f$  визначається за допомогою квадрата модуля матричного елемента  $S_{fi}$ . Виникає запитання, яким чином брати квадрат модуля даної величини, зокрема, як підвести дельта-функцію до квадрата?

Щоб подолати дану проблему та провести розрахунки математично коректно будемо розглядати процес взаємодії в обмеженій області простору, наприклад, у кубі з об'ємом  $V$ . Накладемо на хвильові

<sup>1</sup>  $\hat{S}$ -матриця може залежати від 3-ї компоненти ізотопічного спіну  $I_3$ , оскільки остання пов'язана з електричним зарядом системи. Відповідно, гамільтоніан буде симетричним лише відносно поворотів навколо осі, що спрямована вздовж  $I_3$ .

функції на границі об'єму певні умови. Нехай, наприклад, значення хвильової функції на протилежних гранях куба будуть однаковими<sup>1</sup>. Це приведе до появи в системі дискретного спектра

$$\vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad E^2 = \vec{p}^2 + m^2, \quad (1.35)$$

де  $n_i$  – цілі числа, а  $L^3 = V$ .

Нехай об'єм  $V$  буде достатньо великим. Тоді просторова дельта-функція зведеться до

$$\delta_V^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\vec{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}_f, \vec{p}_i}, \quad \text{де } V \rightarrow \infty. \quad (1.36)$$

Якщо процес відбувається в обмеженому просторі, то будь-яка подія може повторюватися знову і знову. Тому слід також обмежити проміжок часу до  $[-T/2, T/2]$ , де  $T$  – час, за який система з початкового вільного стану  $i$  переходить у кінцевий вільний стан  $f$ , тобто час, за який відбувається взаємодія. Вважаючи  $T$  достатньо великим, запишемо часову дельта-функцію у вигляді

$$\delta_T(E_f - E_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} = \frac{T}{2\pi} \delta_{E_f, E_i}, \quad \text{де } T \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

Враховуючи  $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ , квадрати дельта-функцій можна записати у вигляді

$$\begin{cases} [\delta_V^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i)]^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i(\vec{p}_i - \vec{p}_f)\vec{x}} \delta_V^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_V^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i), \\ [\delta_T(E_f - E_i)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E_f - E_i)t} \delta_T(E_f - E_i) = \frac{T}{2\pi} \delta_T(E_f - E_i). \end{cases} \quad (1.38)$$

Отже,

$$[\delta^4(p_f - p_i)]^2 = \lim_{V, T \rightarrow \infty} [\delta_V^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i)]^2 [\delta_T(E_f - E_i)]^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^4(p_f - p_i). \quad (1.39)$$

---

<sup>1</sup> Можна також вимагати трансляційної інваріантності теорії при переході до інших кубів, тобто до заміни  $x^i \rightarrow x^i + k^i L$  ( $k^i \in \mathbb{Z}$ ). Результат при цьому не зміниться.

Якщо розглядати частинки, що при  $t = -\infty$  не взаємодіють, то їх хвильова функція буде добутком хвильових функцій окремих частинок. Оскільки простір обмежений, то хвильові функції будуть нормовані не на дельта-функцію, а на одиницю, і будуть пропорційні  $1/\sqrt{2VE}$  (див. (Д5.4.2)). Явно виділимо ці множники в  $\hat{T}$  матриці та введемо амплітуду розсіяння  $M_{fi}$  у вигляді

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\prod_{\alpha=1}^{N_i} \sqrt{2VE_{i\alpha}} \prod_{\beta=1}^{N_f} \sqrt{2VE_{f\beta}}}, \quad (1.40)$$

де добуток проводимо за всіма частинками в початковому та кінцевому станах відповідно. Тоді, використавши (1.34), (1.38) – (1.40), отримуємо ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$ , до включення взаємодії, у кінцевий стан  $f$ , після виключення взаємодії (тут і надалі будемо вважати, що  $i \neq f$ ):

$$W_{i \rightarrow f} = |S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) VT \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{\alpha=1}^{N_i} (2VE_{i\alpha}) \prod_{\beta=1}^{N_f} (2VE_{f\beta})}. \quad (1.41)$$

В реальному експерименті кінцевий стан системи може фіксуватися лише з певною похибкою, що визначається вимірювальними приладами. Тому важливо визначити ймовірність переходу в множину станів  $df$ , яка згідно з (1.35) має визначатися множиною чисел  $n_i$ .

Визначимо  $df$  як сукупність усіх можливих станів кожної частинки у своєму околі  $df = \prod_{\beta=1}^{N_f} \Delta n_{x,\beta} \Delta n_{y,\beta} \Delta n_{z,\beta}$ , де  $\beta$  – номер частинки, а число  $\Delta n_{k,\beta} = (L/2\pi) dp_{k,f}$ , див. (1.35). Тоді ймовірність системи перейти зі стану  $i$  у множину станів поблизу стану  $f$  дорівнюватиме

$$\begin{aligned} dW_{i \rightarrow f} &= |S_{fi}|^2 df = VT \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |M_{fi}|^2}{\prod_{\alpha=1}^{N_i} (2VE_{i\alpha}) \prod_{\beta=1}^{N_f} (2VE_{f\beta})} \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}_{f\beta} = \\ &= \frac{T}{V^{N_i-1}} \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{\alpha=1}^{N_i} (2E_{i\alpha})} (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Тобто ймовірність переходу пропорційна часу, на який включено взаємодію. Поділивши останній вираз на  $T$ , отримуємо ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{1}{V^{N_i-1}} \frac{|M_{fi}|^2}{\prod_{\alpha=1}^{N_i} (2E_{i\alpha})} d\Phi_{N_f}, \quad (1.43)$$

де величина

$$d\Phi_{N_f} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}} \quad (1.44)$$

отримала назву елементу  $N_f$ -частинкового фазового об'єму.

Якщо серед кінцевих частинок є  $N$  тотожних, то при інтегруванні за їх імпульсами (для знаходження повної ймовірності переходу) необхідно ввести множник  $1/N!$ , що враховує тотожність станів, які відрізняються перестановкою частинок.

Наведена формула є основною для подальшого розрахунку величин, що можна вимірювати експериментально (імовірність розпаду, переріз розсіяння).

### Матриця розсіяння у квантовій теорії поля

Для знаходження матричних елементів у квантовій теорії поля необхідно в означення (1.21) підставити гамільтоніан взаємодії в представленні взаємодії, записаний через оператори квантованих польових функцій, та провести усереднення за початковим та кінцевим станами системи.

Обмежившись випадком електродинаміки, знайдемо гамільтоніан взаємодії в релятивістській квантовій теорії. Нагадаємо, що в цьому випадку просторова густина лагранжіана  $\mathcal{L}(x)$  має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathcal{L}(x)_0 + \mathcal{L}(x)_{int} = \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu, \end{aligned} \quad (1.45)$$

де в останньому рядку перші два доданки відповідають просторовим густинам лагранжіанів вільного електрон-позитронного та електромагнітного полів, а останній доданок ( $\mathcal{L}_{int}$ ) описує взаємодію зазначених полів,  $e$  – заряд електрона ( $e = -\sqrt{4\pi\alpha}$  згідно з (0.19)).

Тензор енергії-імпульсу системи:

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L}g^{\mu\nu} + \partial^\mu\Psi \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\Psi)} + \partial^\mu\bar{\Psi} \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar{\Psi})} + \partial^\mu A_\sigma \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\sigma)}, \quad (1.46)$$

а просторова густина гамільтоніана системи  $\mathbb{H}$  збігається з густиною енергії  $\mathbb{H} = T^{00}$ . Можна показати, що частина гамільтоніана, що відповідає за взаємодію в системі, має вигляд  $\mathbb{H}_i = -\mathcal{L}_{int}$ .

Нагадаємо, що згідно з (0.15)  $\mathcal{L}_{int} = -j^\mu A_\mu$ , де  $j^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  — густина струму ферміонів у релятивістській квантовій механіці, тоді

$$\mathbb{H}_i = j^\mu A_\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu. \quad (1.47)$$

У представленні взаємодії отримаємо (Д1.21):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{i, int} &= e \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} = \\ &= e \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}\bar{\Psi}e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}\gamma^\mu e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}\Psi e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} \times \\ &\quad \times e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0}A_\mu e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}_0} = e\bar{\Psi}_{int}\gamma^\mu\Psi_{int}A_{\mu, int}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Для запису гамільтоніана взаємодії у КЕД в (1.48) треба замість хвильових функцій підставити оператори поля в просторі Фока:

$$\hat{\mathbb{H}}_{i, int} = \hat{j}_{int}^\mu \hat{A}_{int} = e\hat{\Psi}_{int}\gamma^\mu\hat{\Psi}_{int}\hat{A}_{\mu, int}. \quad (1.49)$$

Щоб знайти явний вигляд вторинно квантованих операторів у представленні взаємодії в теорії, де враховується взаємодія електрон-позитронного та електромагнітного полів, запишемо рівняння для польових операторів в представленні Гайзенберга (для випадку, коли потенціал взаємодії дорівнює нулю) та в представленні взаємодії (коли потенціал взаємодії не дорівнює нулю):

$$\begin{cases} i\hbar\frac{d\hat{Q}_H}{dt} = [\hat{Q}_H, \hat{H}_0]_- \\ i\hbar\frac{d\hat{Q}_I}{dt} = [\hat{Q}_I, \hat{H}_0]_- \end{cases}. \quad (1.50)$$

Вони збігаються! Тобто в представленні взаємодії оператори квантованих польових функцій мають збігатися з операторами вільних полів у представленні Гайзенберга. Отже, у представленні взаємодії оператор взаємодії, проінтегрований за об'ємом, має вигляд

$$V_I = \int_V \hat{\mathbb{H}}_{i, int} dV = - \int_V \hat{\mathcal{L}}_{i, int} dV = \int_V \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu dV, \quad \text{де} \quad (1.51)$$

$$\hat{j}^\mu(x) = e \cdot \hat{\Psi}(x)\gamma^\mu\hat{\Psi}(x), \quad (1.52)$$



а оператори квантованих польових функцій треба взяти з (Д5.4.2), (Д4.3.16).

### Поняття про нормальний добуток операторів

Легко переконалися, що використання оператора густини струму безпосередньо у формі (1.52) призводить до нефізичних результатів: струм у системі, в якій немає частинок (струм у вакуумі), не дорівнює нулю. Справді, вираз  $\langle 0 | \hat{j}^\mu(x) | 0 \rangle$  буде містити такі складові:

$$\langle 0 | a_\alpha^+ a_\beta | 0 \rangle, \langle 0 | a_\alpha^+ b_\beta^+ | 0 \rangle, \langle 0 | b_\alpha b_\beta | 0 \rangle, \langle 0 | b_\alpha b_\beta^+ | 0 \rangle,$$

де  $\alpha, \beta$  – узагальнені індекси, за якими проводиться підсумовування (позначають стан з певним значенням 4-імпульсу та спіральністю). Згідно з (Д6.9) перші три складові дають нульовий внесок, а четверта складова – ні:

$$\langle 0 | b_\alpha b_\beta^+ | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} + \langle 0 | b_\beta^+ b_\alpha | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Безпосередній розрахунок показує, що вакуумне середнє від нульової компоненти струму (1.52) виявляється нескінченно великим, тобто

$$\langle 0 | \hat{j}^0(x) | 0 \rangle \rightarrow \infty. \quad (1.53)$$

Аналогічні проблеми виникнуть при розрахунку й інших фізичних величин, наприклад, густини енергії системи у вакуумі. Для позбавлення від таких нефізичних результатів було запропоновано всі динамічні характеристики фізичної системи (тензор енергії-імпульсу, тензор моменту кількості руху, струм і т.п.) записувати у формі нормального добутку операторів, тобто у такому вигляді, коли всі оператори народження передують всім операторам знищення. Очевидно, що в цьому випадку вакуумне середнє від записаних таким чином величин дорівнюватиме нулю.

Для зведення операторів до форми нормального добутку необхідно у відповідному виразі переставити оператори до нормальної форми, використовуючи відповідні переставні співвідношення та відкинути всі доданки, що містять символи Кронекера або дельта-функції. Фактично можна відразу переставити правильно оператори ферміонного та бозонного полів та домножити на  $(-1)^p$ , де  $p$  – кількість використаних перестановок для операторів ферміонного поля.

Отже, оператор густини струму у виразі для оператора взаємодії (1.51) потрібно записувати в нормально впорядкованому вигляді

$$V_I = \int_V \hat{N}(\hat{j}^\mu) \hat{A}_\mu dV, \quad (1.54)$$

де  $\hat{N}$  – оператор нормального впорядкування.

Підставивши (1.54) у (1.21), отримаємо вираз для  $\hat{S}$ -матриці, який далі будемо використовувати для опису процесів у КЕД<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{T} e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t)} = \hat{T} e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{\mathcal{L}}_{i, int}(t)} = \hat{T} e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}(\hat{j}^\mu) \hat{A}_\mu} = \\ &= \hat{T} e^{-ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu} = \hat{1} + (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu + \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu \cdot \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{A}'_\nu \right] + \\ &+ \frac{(-ie)^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' \times \\ &\times \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu \cdot \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{A}'_\nu \cdot \hat{N}(\hat{\Psi}'' \gamma^\eta \hat{\Psi}'') \hat{A}''_\eta \right] + \dots \quad (1.55) \end{aligned}$$

де  $d^4x = dt d^3x$ , а штрих поблизу польових функцій означає, що відповідна величина залежить від  $x'$ . Тобто ми отримали ряд теорії збурень за малим параметром<sup>2</sup>  $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0.3$ .

### Завдання

1. Використовуючи лагранжіан (1.45) запишіть явний вигляд гамільтоніана системи.
2. Безпосереднім розрахунком, без застосування оператора нормального впорядкування, знайдіть компоненти струму у вакуумі. Покажіть, що нульова компонента струму у вакуумі нескінченна.

<sup>1</sup>Ми працюємо в системі одиниць  $\hbar = c = 1$ .

<sup>2</sup>Як буде далі показано, при розрахунках конкретних процесів з фіксованою кількістю початкових та кінцевих частинок, ряд теорії збурень для середніх від  $\hat{S}$ -матриці буде являти собою розклад за малим параметром  $e^2$ .

## РОЗДІЛ 2

### Операторний формалізм. Електрон-електронне розсіяння у другому порядку теорії збурень. Фотонний пропатор

#### Електрон-електронне (мьоллерівське) розсіяння

Розглянемо задачу  $e+e \rightarrow e'+e'$ , коли в початковому та кінцевому станах маємо два електрони, що розташовані на значній відстані один від одного та не взаємодіють між собою за адіабатичною гіпотезою. Нехай у початковий момент часу перший і другий електрони характеризуються певним 4-імпульсом та спіральністю:  $(p_1, \mu_1)$  та  $(p_2, \mu_2)$ , відповідно. Знайдемо ймовірність того, що після взаємодії електрони отримають квантові числа  $(p_3, \mu_3)$  та  $(p_4, \mu_4)$  (рис. (2.1)).

Для розв'язання даної задачі нам потрібно знайти матричний елемент  $\hat{S}_{fi}$  шляхом усереднення виразу (1.55) за початковим та кінцевим станами:

$$S_{fi} = \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | \hat{S} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle. \quad (2.1)$$

Початковий і кінцевий стани у фоківському представленні (див.

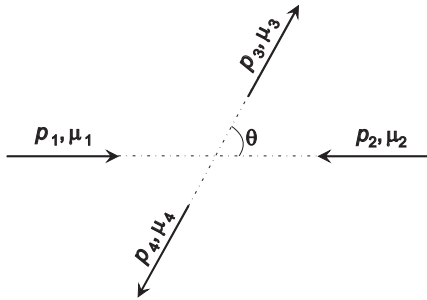


Рис. 2.1. Схематичне зображення розсіяння двох електронів.

детальніше дод. 6) мають вигляд:

$$\begin{cases} |(p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2)\rangle = \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle; \\ |(p_4, \mu_4); (p_3, \mu_3)\rangle = \hat{a}_4^+ \hat{a}_3^+ |0\rangle; \\ \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4)| = (\hat{a}_4^+ \hat{a}_3^+ |0\rangle)^+ = \langle 0| \hat{a}_3 \hat{a}_4, \end{cases} \quad (2.2)$$

де  $\hat{a}_i$  ( $\hat{a}_i^+$ ) – оператори знищення (народження) електронів (Д5.4.3) з квантовими числами  $(p_i, \mu_i)$ . Зауважимо, що нижній індекс цих операторів не вказує на коваріантність величини.

Отже, середнє від  $\hat{S}$ -матриці:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | \hat{S} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \left[ \hat{1} - ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu + \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \right. \\ &\quad \left. \times \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu \cdot \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{A}'_\nu \right] + \dots \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де функція зі штрихом та без нього означає залежність функції від  $x'$  та  $x$  відповідно.

Укажемо на важливий момент. У формулах (2.2) порядок операторів народження-знищення не фіксується, він довільний. Оскільки ферміонні оператори антикомутують, то вираз (2.3), насправді, визначений лише з точністю до загального знака. Це не є проблемою, оскільки фізично спостережувані величини виражаються через  $|S_{fi}|^2$ .

Перед тим як рухатися далі, зробимо перепозначення для вторинно квантованих функцій електромагнітного та ферміонного полів (див. (Д4.3.16), (Д5.4.2)), що значно спростять розрахунки, а також перепозначимо оператори народження (знищення) фотонів через  $\hat{c}_{\lambda, \vec{k}}$  ( $\hat{c}_{\lambda, \vec{k}}^+$ ), щоб не плутати з відповідними операторами ферміонів:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k}, \mu} v_{\vec{k}}^\mu e^{-i k x} + \hat{b}_{\vec{k}, \mu}^+ v_{-\vec{k}}^\mu e^{i k x} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi} \psi_{\chi}(x) + \hat{b}_{\chi}^+ \psi_{-\chi}(x) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},\mu}^+ \bar{v}_{\vec{k}}^{\mu} e^{i\vec{k}x} + \hat{b}_{\vec{k},\mu} \bar{v}_{-\vec{k}}^{\mu} e^{-i\vec{k}x} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi}^+ \bar{\psi}_{\chi}(x) + \hat{b}_{\chi} \bar{\psi}_{-\chi}(x) \right), \quad (2.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\mu}(x) &= \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left( \epsilon_{\mu}^{\lambda}(\vec{k}) \hat{c}_{\lambda,\vec{k}} e^{-i\vec{k}x} + \epsilon_{\mu}^{*\lambda}(\vec{k}) \hat{c}_{\lambda,\vec{k}}^+ e^{i\vec{k}x} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{c}_{\chi} \varphi_{\mu}^{\chi}(x) + \hat{c}_{\chi}^+ \varphi_{\mu}^{*\chi}(x) \right), \quad (2.6)\end{aligned}$$

де нижній індекс  $\chi$  означає стан з певним 4-імпульсом та спіральністю, або поляризацією, для функцій ферміонного та векторного полів відповідно, і не є символом коваріантності величини. Функції  $\psi_{\chi}(x)$ ,  $\psi_{-\chi}(x)$  та  $\varphi_{\mu}^{\chi}(x)$  визначено як:

$$\psi_{\chi}(x) = \frac{v_{\vec{k}}^{\mu}}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} e^{-i\vec{k}x}; \quad \psi_{-\chi}(x) = \frac{v_{-\vec{k}}^{\mu}}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} e^{i\vec{k}x}; \quad \varphi_{\mu}^{\chi}(x) = \frac{\epsilon_{\mu}^{\lambda}(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} e^{-i\vec{k}x}. \quad (2.7)$$

Далі ми також будемо використовувати такі скорочення:  $v_{k_1}^{\mu_1} = v_1$ ,  $v_{-k_1}^{\mu_1} = v_{-1}$ .

Використавши комутаційні співвідношення (Д5.4.3) легко показати, що в нульовому<sup>1</sup> і першому порядках теорії збурень усереднення дає нульовий внесок.

Розглянемо детально другий порядок теорії збурень:

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ &\times \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^{\mu} \hat{\Psi}) \hat{A}_{\mu} \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^{\nu} \hat{\Psi}') \hat{A}'_{\nu} \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle. \quad (2.8)\end{aligned}$$

Оскільки оператори  $\hat{A}_{\mu}$  та  $\hat{A}'_{\nu}$  комутують з операторами народження та знищення ферміонів, то  $\hat{A}_{\mu}$  можна переставити зліва до  $\hat{A}'_{\nu}$  та перенести їх правіше від усіх операторів ферміонного поля.

<sup>1</sup>Вважаємо, що взаємодія між частинками відбулась, а отже, початковий та кінцевий стани системи різні.

Вставимо між ферміонними операторами та  $\hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu$  одиничний оператор

$$\hat{1} = \sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|, \quad (2.9)$$

де  $\lambda$  пробігає всі можливі стани в представленні чисел заповнення для ферміонів та фотонів:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ \times \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |\lambda\rangle\langle\lambda| \hat{T} \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu |0\rangle. \quad (2.10)$$

Проаналізуємо утворений вираз. Якщо в стані  $\lambda$  існує хоча б один фотонний стан, тоді усереднення від ферміонної частини буде давати нуль, оскільки дія ферміонних операторів не змінить фотонний стан, на який зліва діятиме відповідний вакуумний стан. Аналогічно, якщо в стані  $\lambda$  існує хоча б один ферміонний стан, тоді усереднення від частини, що містить оператори електромагнітного поля, даватиме нуль. Отже, сума за всіма станами  $\lambda$  буде давати лише один ненульовий доданок, коли  $\lambda$  відповідає вакуумному стану:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ \times \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle \langle 0 | \hat{T} \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu |0\rangle. \quad (2.11)$$

Розглянемо окремо вакуумне середнє від ферміонної частини<sup>1</sup> виразу (2.11) для початку при  $t > t'$ :

$$\langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle = \\ = \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{N} \left[ \left( \hat{a}_\alpha^+ \bar{\psi}_\alpha + \hat{b}_\alpha \bar{\psi}_{-\alpha} \right) \gamma^\mu \left( \hat{a}_\beta \psi_\beta + \hat{b}_\beta^+ \psi_{-\beta} \right) \right] \times \\ \times \hat{N} \left[ \left( \hat{a}'_\chi \bar{\psi}'_\chi + \hat{b}'_\chi \bar{\psi}'_{-\chi} \right) \gamma^\nu \left( \hat{a}'_\sigma \psi'_\sigma + \hat{b}'_\sigma \psi'_{-\sigma} \right) \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle. \quad (2.12)$$

Якщо розкрити всі дужки, отримаємо 16 різних доданків від кожного з яких потрібно брати вакуумне усереднення. Виявляється, що

<sup>1</sup>Надалі знак суми за індексами, що повторюються, писати не будемо, але будемо мати його на увазі.

ненульовий внесок буде давати лише один доданок:

$$\langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_\sigma \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle (\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu \psi_\beta) (\bar{\psi}'_\chi \gamma^\nu \psi'_\sigma). \quad (2.13)$$

Покажемо детально, як брати вакуумні середні, та розглянемо вираз

$$Q_{\alpha\beta\chi\sigma} = \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_\sigma \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle. \quad (2.14)$$

По-перше, слід розглянути три останні оператори в (2.14), враховуючи комутаційні співвідношення (Д5.4.3):

$$\begin{aligned} \hat{a}_\sigma \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ &= (\delta_{\sigma 1} - \hat{a}_1^+ \hat{a}_\sigma) \hat{a}_2^+ = \delta_{\sigma 1} \hat{a}_2^+ - \hat{a}_1^+ \hat{a}_\sigma \hat{a}_2^+ = \\ &= / \hat{a}_\sigma \hat{a}_2^+ = \delta_{\sigma 2} - \hat{a}_2^+ \hat{a}_\sigma / = \delta_{\sigma 1} \hat{a}_2^+ - \delta_{\sigma 2} \hat{a}_1^+ + \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_\sigma = \delta_{\sigma 1} \hat{a}_2^+ - \delta_{\sigma 2} \hat{a}_1^+, \end{aligned} \quad (2.15)$$

де в останній рівності знехтувано доданком  $\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_\sigma$  як таким, що буде діяти на вакуум у (2.14). Підставивши (2.15) у  $Q_{\alpha\beta\chi\sigma}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta\chi\sigma} &= \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\chi^+ (\delta_{\sigma 1} \hat{a}_2^+ - \delta_{\sigma 2} \hat{a}_1^+) | 0 \rangle = \\ &= \delta_{\sigma 1} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle - \delta_{\sigma 2} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогічно до (2.15) можна записати

$$a_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_2^+ = \delta_{\beta\chi} \hat{a}_2^+ - \delta_{\beta 2} \hat{a}_\chi^+; \quad a_\beta \hat{a}_\chi^+ \hat{a}_1^+ = \delta_{\beta\chi} \hat{a}_1^+ - \delta_{\beta 1} \hat{a}_\chi^+, \quad (2.17)$$

та підставити в (2.16):

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta\chi\sigma} &= \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta\chi} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle - \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta 2} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\chi^+ | 0 \rangle - \\ &- \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta\chi} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle + \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta 1} \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогічно, розписавши три останні оператори в кожному з доданків та врахувавши, що

$$\langle 0 | \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \delta_{\alpha\beta} - \hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\alpha | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta\chi\sigma} &= \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta\chi} \delta_{4\alpha} \delta_{32} - \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta\chi} \delta_{42} \delta_{3\alpha} - \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta 2} \delta_{4\alpha} \delta_{3\chi} + \delta_{\sigma 1} \delta_{\beta 2} \delta_{4\chi} \delta_{3\alpha} - \\ &- \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta\chi} \delta_{4\alpha} \delta_{31} + \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta\chi} \delta_{41} \delta_{3\alpha} + \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta 1} \delta_{4\alpha} \delta_{3\chi} - \delta_{\sigma 2} \delta_{\beta 1} \delta_{4\chi} \delta_{3\alpha}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Будемо вважати, що процес взаємодії відбувся, тобто жоден із початкових станів не співпадає з жодним із кінцевих станів. Також візьмемо до уваги, що згідно з принципом Паулі початкові стани двох електронів не можуть бути однаковими та кінцеві стани двох електронів також не однакові. Остаточо маємо, що стани  $1 \neq 2 \neq 3 \neq 4$ . Тоді

$$Q_{\alpha\beta\chi\sigma} = -\delta_{\sigma 1}\delta_{\beta 2}\delta_{4\alpha}\delta_{3\chi} + \delta_{\sigma 1}\delta_{\beta 2}\delta_{4\chi}\delta_{3\alpha} - \delta_{\sigma 2}\delta_{\beta 1}\delta_{4\chi}\delta_{3\alpha} + \delta_{\sigma 2}\delta_{\beta 1}\delta_{4\alpha}\delta_{3\chi}. \quad (2.21)$$

Отже, вакуумне середнє від ферміонної частини (2.12):

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{a}_3\hat{a}_4 \hat{N}(\hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{\Psi}') \hat{a}_1^+\hat{a}_2^+|0\rangle &= Q_{\alpha\beta\chi\sigma} (\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu\psi_\beta) (\bar{\psi}'_\chi\gamma^\nu\psi'_\sigma) = \\ &= -(\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2) (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_1) + (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2) (\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_1) - \\ &\quad - (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1) (\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_2) + (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1) (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тепер підставимо (2.22) у (2.11) і запишемо вираз для другого порядку теорії збурень при  $t > t'$ :

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} = /t > t'/ = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \theta(t-t') \langle 0|\hat{A}_\mu\hat{A}'_\nu|0\rangle \times \\ \times [ -(\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2) (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_1) + (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2) (\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_1) - \\ - (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1) (\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_2) + (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1) (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_2) ]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Проаналізувавши загальний вираз (2.8), стає зрозуміло, що випадок, коли  $t < t'$ , отримується з випадку  $t > t'$  заміною  $x \leftrightarrow x'$ ,  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Тоді

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} = /t < t'/ = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \theta(t'-t) \langle 0|\hat{A}'_\nu\hat{A}_\mu|0\rangle \times \\ \times [ -(\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_2) (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1) + (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_2) (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1) - \\ - (\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_1) (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2) + (\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_1) (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2) ]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Легко переконатися, що ферміонні частини в обох виразах при  $t > t'$  та  $t < t'$  є однаковими, а змінюється лише порядок розташування операторів квантованого електромагнітного поля. Отже, можна записати загальний вираз для  $S_{fi}^{(2)}$  для довільних  $t$  та  $t'$  у вигляді



$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \theta(t-t') \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu + \theta(t'-t) \hat{A}'_\nu \hat{A}_\mu | 0 \rangle \times \\ \times \left[ -(\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_1) + (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_4 \gamma^\nu \psi'_1) - \right. \\ \left. - (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_4 \gamma^\nu \psi'_2) + (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_2) \right]. \quad (2.25)$$

Вираз, що усереднюється за вакуумом, позначається як:

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = \langle 0 | \theta(t-t') \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu + \theta(t'-t) \hat{A}'_\nu \hat{A}_\mu | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{T} \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu | 0 \rangle, \quad (2.26)$$

де  $\hat{T}$  – оператор хронологічного впорядкування, а величина  $D_{\mu\nu}^0(x, x')$  отримала назву причинної функції Гріна електромагнітного поля, або фотонного пропагатора. Його фізичний зміст буде прояснено в даному курсі пізніше. Зараз нам знадобляться такі властивості фотонного пропагатора, що будуть нами отримані в кінці розділу:

$$D_{\mu\nu}^0(x, x') = D_{\mu\nu}^0(x - x') = D_{\nu\mu}^0(x - x') = D_{\mu\nu}^0(x' - x). \quad (2.27)$$

Використавши (2.27), замінимо в третьому та четвертому доданку ферміонної частини (2.25) змінні інтегрування та підсумовування  $x \leftrightarrow x'$ ,  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Після заміни видно, що третій та четвертий доданки тотожні першому та другому, а отже, остаточно маємо:

$$S_{fi}^{(2)} = i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' D_{\mu\nu}^0(x - x') \times \\ \times \left[ (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_4 \gamma^\nu \psi'_1) - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_1) \right]. \quad (2.28)$$

Перед тим як рухатись далі, перепишемо (2.28), використавши в явному вигляді позначення для  $\psi_i$  (2.7), що були введені нами для скорочення запису:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{i(-ie)^2}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3 2V\varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' D_{\mu\nu}^0(x - x') \times \\ \times \left[ (\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_4 \gamma^\nu v_1) e^{ip_3 x - ip_2 x + ip_4 x' - ip_1 x'} - \right. \\ \left. - (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{ip_4 x - ip_2 x + ip_3 x' - ip_1 x'} \right]. \quad (2.29)$$

Виконаємо заміну змінних:  $y = x - x'$ ,  $z = (x + x')/2$ , тобто  $x = z + y/2$ ,  $x' = z - y/2$ . Якобіан переходу дорівнює одиниці. Остаточно отримуємо

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{i(-ie)^2}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3 2V\varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y d^4z D_{\mu\nu}^0(y) \times \\ \times \left[ (\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_4 \gamma^\nu v_1) e^{iz(p_3 - p_2 + p_4 - p_1) + \frac{iy}{2}(p_3 - p_2 - p_4 + p_1)} - \right. \\ \left. - (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{iz(p_4 - p_2 + p_3 - p_1) + \frac{iy}{2}(p_4 - p_2 - p_3 + p_1)} \right]. \quad (2.30)$$

Оскільки змінна  $z$  міститься лише в показнику експоненти, то за нею можна проінтегрувати

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{i(-ie)^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3 2V\varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y D_{\mu\nu}^0(y) \times \\ \times \left[ (\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_4 \gamma^\nu v_1) e^{\frac{iy}{2}(p_3 - p_2 - p_4 + p_1)} - \right. \\ \left. - (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{\frac{iy}{2}(p_4 - p_2 - p_3 + p_1)} \right]. \quad (2.31)$$

Дельта-функцію слід розуміти як той факт, що ймовірність переходу з одного стану системи в інший буде ненульовою лише за умови виконання закону збереження енергії та імпульсу. Використавши закон збереження енергії-імпульсу можна спростити показники експонент в останньому виразі

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{i(-ie)^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3 2V\varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y D_{\mu\nu}^0(y) \times \\ \times \left[ (\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_4 \gamma^\nu v_1) e^{iy(p_1 - p_4)} - (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{iy(p_1 - p_3)} \right]. \quad (2.32)$$

Використаємо означення прямого та оберненого перетворень Фур'є в чотиřивимірному просторі (0.5):

$$\begin{cases} f(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k f(k) e^{-iky} \\ f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4y f(y) e^{iky} \end{cases} \quad (2.33)$$

та остаточно запишемо  $S_{fi}^{(2)}$  через фур'є-відображення фотонного пропагатора

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{i(-ie)^2(2\pi)^4\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \times \\ \times [(\bar{v}_3\gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4\gamma^\nu v_1)D_{\mu\nu}^0(p_1 - p_4) - (\bar{v}_4\gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3\gamma^\nu v_1)D_{\mu\nu}^0(p_1 - p_3)]. \quad (2.34)$$

Для отримання кінцевої відповіді нам залишилось знайти фур'є-відображення фотонного пропагатора.

### Фотонний пропагатор $D_{\mu\nu}^0(x, x')$

Використаємо введене раніше означення фотонного пропагатора (2.26) та підставимо в нього оператори електромагнітного поля у формі (2.6). Розглянемо випадок  $t > t'$ :

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = \langle 0|\theta(t - t')\hat{A}_\mu\hat{A}'_\nu + \theta(t' - t)\hat{A}'_\nu\hat{A}_\mu|0\rangle = /t > t'/ = \\ = \langle 0|\hat{A}_\mu\hat{A}'_\nu|0\rangle = \langle 0|(\hat{c}_\alpha\varphi_\mu^\alpha + \hat{c}_\alpha^+\varphi_\mu^{*\alpha})(\hat{c}_\beta\varphi_\nu'^{\beta} + \hat{c}_\beta^+\varphi_\nu'^{*}\beta)|0\rangle. \quad (2.35)$$

Використавши комутаційні співвідношення для квантів електромагнітного поля (Д4.3.17), легко переконатися, що ненульовий внесок буде давати лише один доданок:

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = /t > t'/ = \langle 0|\hat{c}_\alpha\hat{c}_\beta^+|0\rangle\varphi_\mu^\alpha\varphi_\nu'^{*}\beta = \sum_\alpha\varphi_\mu^\alpha\varphi_\nu'^{*}\alpha. \quad (2.36)$$

Вираз при  $t < t'$  отримуємо заміною  $x \leftrightarrow x'$ ,  $\mu \leftrightarrow \nu$ :

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = /t < t'/ = \sum_\alpha\varphi_\nu'^\alpha\varphi_\mu^{*\alpha}. \quad (2.37)$$

Враховуючи явний запис  $\varphi_\mu^\chi$  (2.7), отримаємо:

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^2 \begin{cases} \frac{\epsilon_\mu^\lambda(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e^{-ikx} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda}(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e^{ikx'}, & t > t' \\ \frac{\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e^{-ikx'} \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda}(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e^{ikx}, & t < t' \end{cases} \quad (2.38)$$

За допомогою співвідношення (Д4.3.19) проведемо підсумовування за поляризаційними станами  $\lambda$ :

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = -g_{\mu\nu} \sum_{\vec{k}} \begin{cases} \frac{e^{-ik(x-x')}}{2V\omega_{\vec{k}}}, & t > t' \\ \frac{e^{ik(x-x')}}{2V\omega_{\vec{k}}}, & t < t' \end{cases} = \\ = \sum_{\vec{k}} \frac{-g_{\mu\nu}}{2V\omega_{\vec{k}}} \begin{cases} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_{\vec{k}}t}, & t > 0 \\ e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_{\vec{k}}t}, & t < 0 \end{cases}, \quad (2.39)$$

де ми перепозначили  $\vec{x} - \vec{x}' \equiv \vec{x}$ ,  $t - t' \equiv t$ .

Перейдемо від підсумовування за дискретним спектром  $\vec{k}$  до інтегрування в наближенні  $V \rightarrow \infty$  і замінимо в нижньому виразі  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ :

$$iD_{\mu\nu}^0(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k} g_{\mu\nu}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \begin{cases} e^{-i\omega_{\vec{k}}t}, & t > 0 \\ e^{+i\omega_{\vec{k}}t}, & t < 0 \end{cases} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k} g_{\mu\nu}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_{\vec{k}}|t|} \quad (2.40)$$

Щоб позбутися знака модуля та зробити вираз лоренц-інваріантним, треба перейти до комплексної площини. Розглянемо інтеграл

$$\oint_c \frac{e^{-izt}}{z^2 - \omega_{\vec{k}}^2} dz \quad (2.41)$$

за контуром, зображеним на рис. 2.2, а, де контур обходу залежить від знака  $t$  для забезпечення виконання леми Жордана. Тоді, згідно теореми Коші про лишки

$$\oint_c \frac{e^{-izt}}{z^2 - \omega_{\vec{k}}^2} dz = 2\pi i \begin{cases} -\frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}t}}{2\omega_{\vec{k}}}, & t > 0 \\ \frac{e^{-i(-\omega_{\vec{k}})t}}{(-2\omega_{\vec{k}})}, & t < 0 \end{cases} = -i\pi \frac{e^{-i\omega_{\vec{k}}|t|}}{\omega_{\vec{k}}}. \quad (2.42)$$

Використавши (2.42), фотонний пропагатор можна записати у вигляді

$$iD_{\mu\nu}^0(x, x') = \frac{-ig_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \oint_c dz \frac{e^{i\vec{k}\vec{x} - izt}}{z^2 - \omega_{\vec{k}}^2} \quad (2.43)$$

Позначимо  $z = k_0$  і згадаємо, що  $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$  ( $c = 1$ ), тоді

$$D_{\mu\nu}^0(x) = \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \oint_c dk_0 \frac{e^{i\vec{k}\vec{x} - ik_0 t}}{k_0^2 - \vec{k}^2} = \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \oint_c dk_0 \frac{e^{-ikx}}{k^2}. \quad (2.44)$$

Щоб позбавитися незручного інтеграла за контуром, можна трохи видозмінити контур інтегрування, провівши його по дійсній осі та змістивши при цьому точки полюсів (див. рис.2.2, б). Оскільки інтеграл за напівколом згідно з лемою Жордана дорівнює нулю, то інтеграл за контуром можна замінити інтегруванням уздовж дійсної осі з:

$$D_{\mu\nu}^0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{-g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.45)$$

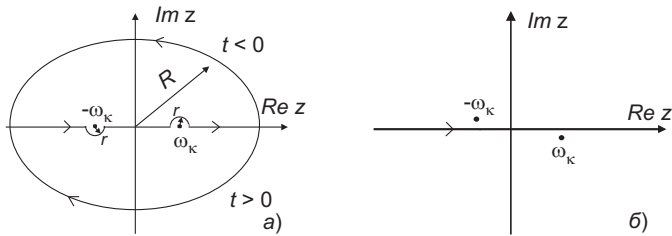


Рис. 2.2. Контур інтегрування  $c$ :  $R \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ .

Порівнюючи отриманий вираз із виразом для фур'є-перетворення (2.33), можна відразу записати вираз для фур'є-відображення фотонного пропагатора

$$D_{\mu\nu}^0(k) = - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (2.46)$$

саме який нам і знадобиться для подальших розрахунків.

З явного вигляду фотонного пропагатора безпосередньо впливають властивості симетрії (2.27). Симетрія щодо перестановки  $\mu \leftrightarrow \nu$  забезпечується метричним тензором  $g_{\mu\nu}$ . Симетрія щодо перестановки  $x \leftrightarrow x'$  очевидна із (2.45) (нагадаємо, там була зроблена заміна  $x \equiv x - x'$ ).

На завершення розділу, використавши явний вигляд фотонного пропагатора (2.46), наведемо остаточний вираз для другого порядку

матриці розсіяння електрона на електроні (2.34):

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 g_{\mu\nu} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4}} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma^\nu v_1)}{(p_1 - p_4)^2 + i\epsilon} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1)}{(p_1 - p_3)^2 + i\epsilon} \right] = \\
 &= i e^2 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4}} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_4)^2 + i\epsilon} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_3)^2 + i\epsilon} \right]. \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Зазвичай величина  $\epsilon$  в знаменнику (2.46) не відіграє ролі в подальших розрахунках, і тому, якщо немає необхідності, будемо її опускати, однак будемо мати її на увазі.

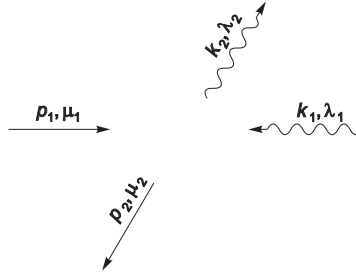
### Завдання

1. Покажіть, що в задачі розсіяння електрона на електроні, відсутній внесок від  $\hat{S}$  матриці в першому порядку теорії збурень.
2. Покажіть, що у виразі (2.12) ненульовий внесок даватиме лише доданок (2.13).
3. Покажіть, що при переході від сумування за дискретним спектром до інтегрування за неперервним спектром з'являється множник  $V/(2\pi)^3$ .
4. Покажіть, що при зміні контуру інтегрування у виразі (2.45) нескінченно малий доданок у знаменнику має входити саме зі знаком плюс.

## РОЗДІЛ 3

### Операторний формалізм. Електрон-фотонне розсіяння (ефект Комптона) у другому порядку теорії збурень

Розглянемо задачу  $e + \gamma \rightarrow e' + \gamma'$ , коли в початковому та кінцевому станах маємо електрон та фотон, що розташовані на значній відстані один від одного та не взаємодіють між собою за адіабатичною гіпотезою. Нехай у початковий момент часу електрон характеризується певним 4-імпульсом та спіральністю  $(p_1, \mu_1)$ , а фотон має певний 4-імпульс та поляризацію  $(k_1, \lambda_1)$ . Будемо знаходити ймовірність того, що після взаємодії електрон матиме квантові числа  $(p_2, \mu_2)$ , а фотон  $-(k_2, \lambda_2)$  (див. рис. 3.1).



**Рис. 3.1.** Схематичне зображення розсіяння фотона на електроні.

Для розв'язання задачі нам потрібно знайти матричний елемент  $S_{fi}$  шляхом усереднення виразу (1.55) за початковим та кінцевим станами:

$$S_{fi} = \langle (p_2, \mu_2); (k_2, \lambda_2) | \hat{S} | (p_1, \mu_1); (k_1, \lambda_1) \rangle. \quad (3.1)$$

Початковий та кінцевий стани в представленні чисел заповнення мають вигляд

$$\begin{cases} |(p_1, \mu_1); (k_1, \lambda_1)\rangle = \hat{a}_1^+ \hat{c}_1^+ |0\rangle; \\ |(p_2, \mu_2); (k_2, \lambda_2)\rangle = \hat{a}_2^+ \hat{c}_2^+ |0\rangle; \\ \langle (p_2, \mu_2); (k_2, \lambda_2) | = (\hat{c}_2^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle)^+ = \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{c}_2, \end{cases} \quad (3.2)$$

де  $a_i$  ( $a_i^+$ ) – оператори знищення (народження) електронів (Д5.4.3) з квантовими числами  $(p_i, \mu_i)$ ;  $c_i$  ( $c_i^+$ ) – оператори знищення (народження) фотонів (Д4.3.17) з квантовими числами  $(k_i, \lambda_i)$ . При цьому нижній індекс цих операторів не вказує на коваріантність величини.

Отже, середнє від  $\hat{S}$ -матриці:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle (p_2, \mu_2); (k_2) | \hat{S} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{c}_2 \left[ \hat{1} - ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu + \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \right. \\ &\quad \left. \times \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu \cdot \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{A}'_\nu \right] + \dots \right] \hat{a}_1^+ \hat{c}_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Використавши комутаційні співвідношення (Д4.3.17), (Д5.4.3), покажемо, що в нульовому та першому порядках теорії збурень усереднення дає нульовий внесок. Розглянемо детально другий порядок теорії збурень

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{c}_2 \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{A}_\mu \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{A}'_\nu \right] \hat{a}_1^+ \hat{c}_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Оскільки оператори  $\hat{A}_\mu$  та  $\hat{A}'_\nu$  комутують з операторами народження та знищення ферміонів, то  $\hat{A}_\mu$  можна переставити зліва до  $\hat{A}'_\nu$  та перенести їх правіше від усіх операторів ферміонного поля. Вставимо між ферміонними операторами та  $\hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu$  одиничний оператор

$$\hat{1} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \langle \lambda|,$$

де  $\lambda$  пробігає всі можливі стани в представленні чисел заповнення для ферміонів та фотонів. У розд. 2 було показано, що в цьому випадку ненульовий внесок даватиме лише стан  $\lambda$ , що відповідає вакууму:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times$$



$$\times \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{T} \left[ \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \right] \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{T} \left[ \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \right] \hat{c}_1^+ | 0 \rangle. \quad (3.5)$$

Розглянемо випадок  $t > t'$ , тоді

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \theta(t - t') \times \\ \times \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{c}_1^+ | 0 \rangle. \quad (3.6)$$

Розглянемо детально фотонну частину цього виразу

$$Q_{\mu\nu} = \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{c}_1^+ | 0 \rangle = / (2.6) / = \\ = \langle 0 | \hat{c}_2 \left( \hat{c}_\alpha \varphi_\mu^\alpha + \hat{c}_\alpha^+ \varphi_\mu^{*\alpha} \right) \left( \hat{c}_\beta \varphi_\nu'^\beta + \hat{c}_\beta^+ \varphi_\nu'^{* \beta} \right) \hat{c}_1^+ | 0 \rangle. \quad (3.7)$$

Для розрахунку цієї величини використаємо

$$\begin{cases} \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta \hat{c}_1^+ | 0 \rangle = 0; \\ \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_1^+ | 0 \rangle = \delta_{1,\alpha} \delta_{2,\beta}; \\ \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta \hat{c}_1^+ | 0 \rangle = \delta_{1,\beta} \delta_{2,\alpha}; \\ \langle 0 | \hat{c}_2 \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_1^+ | 0 \rangle = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

тоді

$$Q_{\mu\nu}(x, x') = \sum_{\alpha, \beta} \left( \delta_{1,\alpha} \delta_{2,\beta} \varphi_\mu^\alpha \varphi_\nu'^{* \beta} + \delta_{1,\beta} \delta_{2,\alpha} \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi_\nu'^\beta \right) = \\ = \varphi_\mu^1 \varphi_\nu'^{* 2} + \varphi_\mu^{* 2} \varphi_\nu'^1 = \\ = \frac{\epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{2V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} e^{-ik_1 x + ik_2 x'} + \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1)}{2V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} e^{-ik_1 x' + ik_2 x}, \quad (3.9)$$

звідки видно, що

$$Q_{\mu\nu}(x, x') = Q_{\nu\mu}(x', x). \quad (3.10)$$

Розглянемо детально ферміонну частину виразу (3.6):

$$R^{\mu\nu}(x, x') = \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{N}(\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}) \hat{N}(\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}') \hat{a}_1^+ | 0 \rangle. \quad (3.11)$$

Розрахунок цієї величини шляхом підстановки явного вигляду операторів квантованого ферміонного поля (2.4), (2.5), як ми це робили в розд. 2, не є зручним і ми зробимо розрахунок по іншому.

Зауважимо, що згідно з визначенням оператора нормального впорядкування ми можемо записати оператор густини струму  $\hat{j}^\mu = \hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi}$  у вигляді

$$\hat{N}\hat{j}^\mu = \hat{j}^\mu - \langle 0|\hat{j}^\mu|0\rangle = \hat{j}^\mu - \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{-\alpha}\gamma^\mu\psi_{-\alpha}. \quad (3.12)$$

При цьому вакуумне середнє від лівої та правої частин (3.12) дорівнює нулю, що й підтверджує справедливість наведеного виразу. Тоді вираз (3.11) можна записати як

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}(x, x') &= \langle 0|\hat{a}_2 \hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi} \hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{\Psi}' \hat{a}_1^+|0\rangle - \langle 0|\hat{j}^\mu|0\rangle\langle 0|\hat{a}_2 \hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{\Psi}' \hat{a}_1^+|0\rangle - \\ &- \langle 0|\hat{a}_2 \hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi} \hat{a}_1^+|0\rangle\langle 0|\hat{j}^{\nu'}|0\rangle + \langle 0|\hat{j}^\mu|0\rangle\langle 0|\hat{j}^{\nu'}|0\rangle\langle 0|\hat{a}_2\hat{a}_1^+|0\rangle = \\ &= \langle 0|\hat{a}_2 \hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi} \hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{\Psi}' \hat{a}_1^+|0\rangle - \\ &- \langle 0|\hat{j}^\mu|0\rangle\bar{\psi}_2'\gamma^\nu\psi_1' - \bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi_1\langle 0|\hat{j}^{\nu'}|0\rangle, \quad (3.13) \end{aligned}$$

де останні доданки ми отримали, безпосередньо взявши вакуумне середнє.

Для подальших розрахунків використаємо співвідношення

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \hat{a}_1^+, \hat{\Psi} \right\}_+ = \psi_1; \\ \left\{ \hat{a}_2, \hat{\Psi} \right\}_+ = \bar{\psi}_2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \hat{a}_1^+, \hat{\Psi}' \right\}_+ = 0; \\ \left\{ \hat{a}_2, \hat{\Psi}' \right\}_+ = 0, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

де в правій частині стоять не оператори, а функції. Ці співвідношення легко довести. Для прикладу доведемо перше з них:

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{a}_1^+, \hat{\Psi} \right\}_+ &= \left\{ \hat{a}_1^+, \left( \hat{a}_\chi\psi_\chi + \hat{b}_\chi^+\psi_{-\chi} \right) \right\}_+ = \\ &= \psi_\chi \left\{ \hat{a}_1^+, \hat{a}_\chi \right\}_+ + \psi_{-\chi} \left\{ \hat{a}_1^+, \hat{b}_\chi^+ \right\}_+ = /(\text{Д5.4.3})/ = \psi_1. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Використавши (3.14) можна записати

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{a}_2\hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi} \hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{\Psi}'\hat{a}_1^+|0\rangle &= \langle 0|\left(\bar{\psi}_2 - \hat{\Psi}\hat{a}_2\right)\gamma^\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}'\gamma^\nu\left(\psi_1' - \hat{a}_1^+\hat{\Psi}'\right)|0\rangle = \\ &= \langle 0|\bar{\psi}_2\gamma^\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}'\gamma^\nu\psi_1'|0\rangle + \langle 0|\hat{\Psi}\hat{a}_2\gamma^\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{a}_1^+\hat{\Psi}'|0\rangle - \\ &- \langle 0|\bar{\psi}_2\gamma^\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}'\gamma^\nu\hat{a}_1^+\hat{\Psi}'|0\rangle - \langle 0|\hat{\Psi}\hat{a}_2\gamma^\mu\hat{\Psi}\hat{\Psi}'\gamma^\nu\psi_1'|0\rangle, \quad (3.16) \end{aligned}$$

де останні два доданки дорівнюють

$$\langle 0 | \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{a}_1^\dagger \hat{\Psi}' | 0 \rangle = -\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 \langle 0 | \hat{j}'^\nu | 0 \rangle, \quad (3.17)$$

$$\langle 0 | \hat{\Psi} \hat{a}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \psi_1' | 0 \rangle = -\langle 0 | \hat{j}^\mu | 0 \rangle \bar{\psi}_2' \gamma^\nu \psi_1'. \quad (3.18)$$

Використавши (3.16) – (3.18), вираз (3.13) запишемо у вигляді

$$R^{\mu\nu}(x, x') = \langle 0 | \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \psi_1' | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{\Psi} \hat{a}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{a}_1^\dagger \hat{\Psi}' | 0 \rangle. \quad (3.19)$$

Розглянемо другий доданок у (3.19):

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\Psi} \hat{a}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{a}_1^\dagger \hat{\Psi}' | 0 \rangle &= \left/ \left\{ \hat{a}_1^\dagger, \hat{\Psi} \right\}_+ = 0, \left\{ \hat{a}_2, \hat{\Psi} \right\}_+ = 0 \right/ = \\ &= \langle 0 | \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' | 0 \rangle = \left/ \left\{ \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2 \right\}_+ = 0 \right/ = \\ &= -\langle 0 | \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' | 0 \rangle = \\ &= -\langle 0 | \hat{\Psi} \gamma^\mu \left( \psi_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{\Psi} \right) \left( \bar{\psi}_2' - \hat{\Psi}' \hat{a}_2 \right) \gamma^\nu \hat{\Psi}' | 0 \rangle = \\ &= \text{/ненульовим є один доданок/} = -\langle 0 | \hat{\Psi} \gamma^\mu \psi_1 \bar{\psi}_2' \gamma^\nu \hat{\Psi}' | 0 \rangle. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Отже, повертаючись до (3.19), маємо

$$R^{\mu\nu}(x, x') = \langle 0 | \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \psi_1' | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{\Psi} \gamma^\mu \psi_1 \bar{\psi}_2' \gamma^\nu \hat{\Psi}' | 0 \rangle. \quad (3.21)$$

Оскільки випадок  $t < t'$  відрізняється від випадку  $t > t'$  заміною  $\mu \leftrightarrow \nu, x \leftrightarrow x'$ , то з урахуванням (3.10), отримаємо

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' Q_{\mu\nu}(x, x') \begin{cases} R^{\mu\nu}(x, x'), & t > t', \\ R^{\nu\mu}(x', x), & t < t'. \end{cases} \quad (3.22)$$

Для скорочення подальших записів введемо оператор

$$\hat{A} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' Q_{\mu\nu}(x, x'). \quad (3.23)$$

А тепер перепишемо (3.22), явно вказавши матричні індекси

$$\hat{A} \cdot \begin{cases} \langle 0 | \bar{\psi}_{2\alpha} \gamma_\alpha^\mu \hat{\Psi}_\beta \hat{\Psi}'_\chi \gamma_\chi^\nu \psi_{1\sigma}' | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{\Psi}_\alpha \gamma_\alpha^\mu \psi_{1\beta} \bar{\psi}_{2\chi}' \gamma_\chi^\nu \hat{\Psi}'_\sigma | 0 \rangle, & t > t' \\ \langle 0 | \bar{\psi}'_{2\chi} \gamma_\chi^\nu \hat{\Psi}'_\sigma \hat{\Psi}_\alpha \gamma_\alpha^\mu \psi_{1\beta} | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{\Psi}'_\chi \gamma_\chi^\nu \psi_{1\sigma}' \bar{\psi}_{2\alpha} \gamma_\alpha^\mu \hat{\Psi}_\beta | 0 \rangle, & t < t' \end{cases} \quad (3.24)$$

Після того, як явно вказано, за якими індексами проводиться підсумовування, можна переставити неоператорні множники. Зробимо це таким чином:

$$\hat{A} \cdot \begin{cases} \bar{\psi}_{2\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \langle 0 | \hat{\Psi}_{\beta} \hat{\Psi}'_{\chi} | 0 \rangle \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} \psi'_{1\sigma} - \bar{\psi}'_{2\chi} \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} \langle 0 | \hat{\Psi}_{\alpha} \hat{\Psi}'_{\sigma} | 0 \rangle \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{1\beta}, & t > t' \\ -\bar{\psi}_{2\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \langle 0 | \hat{\Psi}'_{\chi} \hat{\Psi}_{\beta} | 0 \rangle \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} \psi'_{1\sigma} + \bar{\psi}'_{2\chi} \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} \langle 0 | \hat{\Psi}'_{\sigma} \hat{\Psi}_{\alpha} | 0 \rangle \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{1\beta}, & t < t' \end{cases} \quad (3.25)$$

(у другому рядку переставлено доданки місцями порівняно з (3.24)).

В останньому виразі два випадки  $t > t'$  та  $t < t'$  можна об'єднати та записати одним виразом, якщо для вакуумних середніх ввести нове позначення:

$$-iG_{\alpha\beta}(x, x') = \langle 0 | \theta(t - t') \hat{\Psi}_{\alpha} \hat{\Psi}'_{\beta} - \theta(t' - t) \hat{\Psi}'_{\beta} \hat{\Psi}_{\alpha} | 0 \rangle, \quad (3.26)$$

де  $G_{\alpha\beta}(x, x')$  отримав назву причинної функції Гріна ферміонного поля, або електронного пропагатора. Фізичний зміст цієї величини буде розкрито пізніше. Забігаючи наперед зазначимо, що електронний пропагатор залежить від  $x$  та  $x'$  як  $G_{\alpha\beta}(x - x')$ .

Зауважимо, що електронний пропагатор можна записати більш компактно, якщо розширити наведене поняття оператора хронологічного впорядкування Дайсона (1.12), а саме: при перестановці операторів бозонного (електромагнітного) поля оператор хронологічного впорядкування Дайсона діє згідно з (1.12), а при перестановці операторів ферміонного поля додатково з'являється множник  $(-1)^p$ , де  $p$  – кількість використаних перестановок ферміонних операторів. Тоді

$$\begin{aligned} -iG_{\alpha\beta}(x - x') &= \langle 0 | \theta(t - t') \hat{\Psi}_{\alpha} \hat{\Psi}'_{\beta} - \theta(t' - t) \hat{\Psi}'_{\beta} \hat{\Psi}_{\alpha} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_{\alpha} \hat{\Psi}'_{\beta} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Використавши означення електронного пропагатора, вираз (3.25) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} S_{f_i}^{(2)} &= -i\hat{A} \left( \bar{\psi}_{2\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} G_{\beta\chi}(x - x') \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} \psi'_{1\sigma} + \bar{\psi}'_{2\chi} \gamma_{\chi\sigma}^{\nu} G_{\sigma\alpha}(x' - x) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{1\beta} \right) = \\ &= \frac{-i(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' Q_{\mu\nu}(x, x') \times \\ &\quad \times \left( \bar{\psi}_{2\alpha} \gamma^{\mu} G(x - x') \gamma^{\nu} \psi'_{1\sigma} + \bar{\psi}'_{2\chi} \gamma^{\nu} G(x' - x) \gamma^{\mu} \psi_{1\beta} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Замінивши в другому доданку  $\mu \leftrightarrow \nu$   $x \leftrightarrow x'$  та використавши (3.10), можна записати

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' Q_{\mu\nu}(x, x') \bar{\psi}_2 \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \psi'_1 = \\
&= /(\text{3.9}), (\text{2.7})/ = -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\
&\times \left( \frac{\epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{2V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} e^{-ik_1x + ik_2x'} + \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1)}{2V \sqrt{\omega_1 \omega_2}} e^{-ik_1x' + ik_2x} \right) \times \\
&\times \frac{\bar{v}_2}{\sqrt{2V \epsilon_2}} e^{ip_2x} \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \frac{v_1}{\sqrt{2V \epsilon_1}} e^{-ip_1x'} = \\
&= \frac{-i(-ie)^2}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \epsilon_1 \omega_2 \epsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \bar{v}_2 \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu v_1 \times \\
&\times \left( \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{-ik_1x + ik_2x' + ip_2x - ip_1x'} + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{-ik_1x' + ik_2x + ip_2x - ip_1x'} \right). \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Далі, так само як і при розгляді розсіяння електрона на електроні, зробимо заміну змінних:  $y = x - x'$ ,  $z = (x + x')/2$ , тобто  $x = z + y/2$ ,  $x' = z - y/2$ . Якобіан переходу дорівнює одиниці. Отримаємо

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \frac{-i(-ie)^2}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \epsilon_1 \omega_2 \epsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y d^4z \bar{v}_2 \gamma^\mu G(y) \gamma^\nu v_1 \times \\
&\times \left[ \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{iz(p_2 - p_1 - k_1 + k_2) + \frac{iy}{2}(p_2 + p_1 - k_1 - k_2)} + \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{iz(p_2 - p_1 - k_1 + k_2) + \frac{iy}{2}(p_2 + p_1 + k_1 + k_2)} \right]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Проінтегруємо за  $z$ :

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \epsilon_1 \omega_2 \epsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4y \bar{v}_2 \gamma^\mu G(y) \gamma^\nu v_1 \times \\
&\times \left( \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{\frac{iy}{2}(p_2 + p_1 - k_1 - k_2)} + \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{\frac{iy}{2}(p_2 + p_1 + k_1 + k_2)} \right), \quad (3.31)
\end{aligned}$$

де дельта-функція забезпечує виконання закону збереження енергії-імпульсу. Використавши його, можна записати

$$S_{fi}^{(2)} = -i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \varepsilon_1 \omega_2 \varepsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 y \bar{v}_2 \gamma^\mu G(y) \gamma^\nu v_1 \times \\ \times \left( \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{iy(p_1 - k_2)} + \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{iy(p_1 + k_1)} \right). \quad (3.32)$$

За допомогою означення прямого та оберненого перетворень Фур'є в 4-вимірному просторі (2.33) отримаємо  $S_{fi}^{(2)}$  через фур'є-відображення електронного пропагатора

$$S_{fi}^{(2)} = -i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \varepsilon_1 \omega_2 \varepsilon_2}} \times \\ \times \left( \bar{v}_2 \gamma^\mu G(p_1 - k_2) \gamma^\nu v_1 \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) + \right. \\ \left. + \bar{v}_2 \gamma^\mu G(p_1 + k_1) \gamma^\nu v_1 \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \right) = \\ = ie^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \varepsilon_1 \omega_2 \varepsilon_2}} \times \\ \times \bar{v}_2 \left\{ \not{\epsilon}^{\lambda_1}(\vec{k}_1) G(p_1 - k_2) \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) + \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) G(p_1 + k_1) \not{\epsilon}^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \right\} v_1, \quad (3.33)$$

де перекреслена літера означає, що за нею проведена згортка з  $\gamma$ -матрицями  $\not{a} = a^\nu \gamma_\nu$ .

### Завдання

1. Розрахуйте величину (3.11) шляхом підстановки явного вигляду операторів квантованого ферміонного поля (2.4), (2.5). Явно отримайте в цьому підході співвідношення (3.25).
2. Безпосереднім розрахунком доведіть справедливість виразу (3.12). Використавши (3.12), переконайтеся, що  $\hat{S}$ -матрицю електрон-електронного розсіяння в другому порядку теорії збурень (розд. 2) можна було розраховувати без застосування оператора нормального впорядкування.

3. Доведіть справедливість виразів (3.13), (3.17), (3.18)
4. Покажіть, що розширення змісту оператора хронологічного впорядкування при дії на ферміонні функції не змінить визначення  $\hat{S}$ -матриці (1.55).
5. Отримайте вираз для  $\hat{S}$ -матриці в другому порядку теорії збурень для позитрон-фотонного розсіяння.

## РОЗДІЛ 4

### Проектуючий оператор. Електронний пропaгатор

#### Проектуючі оператори

Як відомо, стан фермі-частинки можна описати за допомогою двох рівнянь (див. (Д5.1.16)):

$$\begin{cases} (q \not{k} - m)v_{qk}^\mu = 0, \\ (\gamma^5 \not{\chi} - \mu)v_{qk}^\mu = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

де  $q = \pm 1$  ( $q = 1$  відповідає частинці,  $q = -1$  – античастинці),  $\mu = \pm 1$  визначає проекцію спіну ферміона на напрямок його руху (Д5.1.23); 4-вектор  $\chi$  визначається з умов (Д5.1.14):  $\chi k = 0$  та  $\chi^2 = -1$ . Із цих рівнянь легко отримати оператори імпульсу та спіральності:

$$\not{k} v_{q'k}^{\mu'} = q' m v_{q'k}^{\mu'}, \quad \gamma^5 \not{\chi} v_{q'k}^{\mu'} = \mu' v_{q'k}^{\mu'}. \quad (4.2)$$

Побудуємо новий оператор  $(m + q \not{k})/(2m)$  і розглянемо, як він діє на функцію  $v_{q'k}^{\mu'}$  з урахуванням (4.2):

$$\frac{m + q \not{k}}{2m} v_{q'k}^{\mu'} = \frac{m + qq'm}{2m} v_{q'k}^{\mu'} = /q, q' = \pm 1/ = \delta_{q,q'} v_{q'k}^{\mu'}, \quad (4.3)$$

тобто – це проектуючий оператор на стан з певним значенням числа  $q$ .

Побудуємо новий оператор  $(1 + \mu \gamma^5 \not{\chi})/2$  і розглянемо, як він діє на функцію  $v_{q'k}^{\mu'}$  з урахуванням (4.2):

$$\frac{1 + \mu \gamma^5 \not{\chi}}{2} v_{q'k}^{\mu'} = \frac{1 + \mu \mu'}{2} v_{q'k}^{\mu'}, \quad (4.4)$$

тобто – це проектуючий оператор на стан з певним значенням числа  $\mu$ .

Об'єднаємо тепер два розглянутих оператори та побудуємо проектуючий оператор на стан з певним значенням числа  $q$  та числа спіральності  $\mu$ :

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{q,\mu} = \frac{[(1 + \mu \gamma^5 \not{\chi})(m + q \not{k})]_{\alpha\beta}}{4m}, \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{q,\mu} v_{\beta, q'k}^{\mu'} = \delta_{q,q'} \delta_{\mu,\mu'} v_{\alpha, q'k}^{\mu'}, \quad (4.6)$$



де  $\alpha, \beta$  – індекси 4-компонентної хвильової функції ферміона.

Нагадаємо співвідношення ортогональності та повноти для ферміонних функцій:

$$\sum_{\alpha} \bar{v}_{\alpha, qk}^{\mu} v_{\alpha, q'k}^{\mu'} = 2mq \delta_{\mu, \mu'} \delta_{q, q'}, \quad (4.7)$$

$$\sum_{q', \mu'} q' v_{\alpha, q'k}^{\mu'} \bar{v}_{\beta, q'k}^{\mu} = 2m \delta_{\alpha, \beta}. \quad (4.8)$$

Подіємо проектуючим оператором на співвідношення (4.8):

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma\alpha}^{q,\mu} \cdot (4.8) &\Rightarrow \sum_{q', \mu'} q' \delta_{q, q'} \delta_{\mu, \mu'} v_{\sigma, q'k}^{\mu'} \bar{v}_{\beta, q'k}^{\mu} = 2m \Lambda_{\sigma\beta}^{q,\mu} \Rightarrow \\ &q v_{\sigma, qk}^{\mu} \bar{v}_{\beta, qk}^{\mu} = 2m \Lambda_{\sigma\beta}^{q,\mu} / \cdot q \Rightarrow \\ v_{\sigma, qk}^{\mu} \bar{v}_{\beta, qk}^{\mu} &= 2mq \Lambda_{\sigma\beta}^{q,\mu} = \frac{q}{2} [(1 + \mu\gamma^5 \not{\chi})(m + q \not{k})]_{\sigma\beta} = \rho_{\sigma\beta}^{q,\mu}(k). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тобто ми в явному вигляді отримали результат добутку окремих компонент функції та діраківськи спряженої ферміонної функції. Фактично, це є матриця густини<sup>1</sup> ферміонних станів [2, 11, 12].

Отриманий результат суттєво допоможе нам при розрахунку електронного пропатора.

### Електронний пропатор $G_{\alpha\beta}(x - x')$

Згідно з означеннями (3.27), (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} -iG_{\alpha\beta}(x - x') &= \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_{\alpha}(x) \hat{\Psi}_{\beta}(x') | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \hat{\Psi}_{\alpha}(x) \hat{\Psi}_{\beta}(x') | 0 \rangle, & t > t' \\ -\langle 0 | \hat{\hat{\Psi}}_{\beta}(x') \hat{\hat{\Psi}}_{\alpha}(x) | 0 \rangle, & t < t' \end{cases} \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi}(\psi_{\chi})_{\alpha} + \hat{b}_{\chi}^{+}(\psi_{-\chi})_{\alpha} \right) \sum_{\sigma} \left( \hat{a}_{\sigma}^{+}(\bar{\psi}'_{\sigma})_{\beta} + \hat{b}_{\sigma}(\bar{\psi}'_{-\sigma})_{\beta} \right) | 0 \rangle \\ -\langle 0 | \sum_{\sigma} \left( \hat{a}_{\sigma}^{+}(\bar{\psi}'_{\sigma})_{\beta} + \hat{b}_{\sigma}(\bar{\psi}'_{-\sigma})_{\beta} \right) \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi}(\psi_{\chi})_{\alpha} + \hat{b}_{\chi}^{+}(\psi_{-\chi})_{\alpha} \right) | 0 \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Зазначимо, що ми працюємо з ферміонами, що перебувають у чистому стані. У цьому випадку модуль вектора спіну (входить в означення 4-вектора  $\chi$ ) у системі спокою  $|\vec{\xi}| = 1$ , для змішаних станів  $|\vec{\xi}| < 1$  (див. дод. Д5.1, [12]).

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \sum_{\chi, \sigma} \langle 0 | \hat{a}_\chi \hat{a}_\sigma^\dagger | 0 \rangle (\psi_\chi)_\alpha (\bar{\psi}'_\sigma)_\beta, & t > t' \\ - \sum_{\chi, \sigma} \langle 0 | \hat{b}_\sigma \hat{b}_\chi^\dagger | 0 \rangle (\bar{\psi}'_{-\sigma})_\beta (\psi_{-\chi})_\alpha, & t < t' \end{cases} = (2.7) = \\
&= \begin{cases} \sum_{(\vec{k}, \mu) (\vec{k}', \mu')} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\mu, \mu'} \frac{v_{\alpha, k}^\mu \bar{v}_{\beta, k'}^{\mu'}}{2V \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}'}}} e^{-i(kx - k'x')}, & t > t' \\ - \sum_{(\vec{k}, \mu) (\vec{k}', \mu')} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\mu, \mu'} \frac{\bar{v}_{\beta, -k'}^{\mu'} v_{\alpha, -k}^\mu}{2V \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}'}}} e^{i(kx - k'x')}, & t < t' \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{v_{\alpha, k}^\mu \bar{v}_{\beta, k}^\mu}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} e^{-ik(x-x')}, & t > t' \\ - \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{\bar{v}_{\beta, -k}^\mu v_{\alpha, -k}^\mu}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} e^{ik(x-x')}, & t < t' \end{cases} = \left/ \begin{array}{l} x - x' = x \\ t - t' = t \end{array} \right/ = \\
&= \begin{cases} \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{v_{\alpha, k}^\mu \bar{v}_{\beta, k}^\mu}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} e^{-ikx}, & t > 0 \\ - \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{\bar{v}_{\beta, -k}^\mu v_{\alpha, -k}^\mu}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} e^{ikx}, & t < 0 \end{cases} = (4.9) = \\
&= \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{1}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} \begin{cases} \frac{1}{2} [(1 + \mu\gamma^5 \chi)(m + \not{k})]_{\alpha\beta} e^{-ikx}, & t > 0 \\ - \frac{(-1)}{2} [(1 - \mu\gamma^5 \chi)(m - \not{k})]_{\alpha\beta} e^{ikx}, & t < 0, \end{cases} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

де у верхньому рядку останнього виразу ми поклали  $q = 1$ , а в нижньому  $q = -1$ . У цьому виразі проведемо підсумовування за  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
-iG_{\alpha\beta}(x) &= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} \begin{cases} (m + \not{k})_{\alpha\beta} e^{-ikx}, & t > 0 \\ (m - \not{k})_{\alpha\beta} e^{ikx}, & t < 0 \end{cases} = \\
&= \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2V \varepsilon_{\vec{k}}} (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \begin{cases} e^{-ikx}, & t > 0 \\ e^{ikx}, & t < 0. \end{cases} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Перейдемо від підсумовування за дискретним спектром до інтегрування за неперервним спектром енергії:

$$\begin{aligned}
-iG_{\alpha\beta}(x) &= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2V\varepsilon_{\vec{k}}} \begin{cases} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\varepsilon_{\vec{k}}t}, & t > 0 \\ e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\varepsilon_{\vec{k}}t}, & t < 0 \end{cases} = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{k}}} \begin{cases} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\varepsilon_{\vec{k}}t}, & t > 0 \\ e^{i\vec{k}\vec{x} + i\varepsilon_{\vec{k}}t}, & t < 0, \end{cases} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

де в останньому виразі в нижньому рядку було зроблено заміну  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Отже,

$$\begin{aligned}
-iG_{\alpha\beta}(x) &= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{k}}} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\varepsilon_{\vec{k}}|t|} = (2.42) = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c dz \frac{e^{i\vec{k}\vec{x} - izt}}{z^2 - \varepsilon_{\vec{k}}^2} = /z = k_0/ = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c d\vec{k} dk_4 \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)} = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_c d\vec{k} dk_0 \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2} = \\
&= /змінюємо контур як в розд. 2/ = \\
&= (m + i\gamma^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{i(m + \not{k})_{\alpha\beta} e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Порівнявши отриманий вираз із виразом для фур'є-перетворення (2.33), можна відразу записати фур'є-відображення електронного пропагатора

$$G_{\alpha\beta}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{(m + \not{k})_{\alpha\beta}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}, \quad (4.14)$$

який нам і потрібен для подальших розрахунків.

На завершення теми, використавши явний вигляд електронного пропагатора, наведемо остаточний вираз для другого порядку матриці електрон-фотонного розсіяння (3.33):

$$S_{fi}^{(2)} = i e^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \varepsilon_1 \omega_2 \varepsilon_2}} \times \\ \times \bar{v}_2 \left( \not{\epsilon}^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \frac{m + (\not{p}_1 - \not{k}_2)}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) + \right. \\ \left. + \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \frac{m + (\not{p}_1 + \not{k}_1)}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} \not{\epsilon}^{\lambda_1}(\vec{k}_1) \right) v_1. \quad (4.15)$$

### Завдання

1. Чи має значення порядок добутку проєкційних операторів у (4.9)?
2. Розгляньте випадок, коли в системі спокою ферміона вектор спіну  $\vec{\xi}$  має вигляд  $\vec{\xi} = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$ . Проаналізуйте значення проєкції спіну ферміона на просторові осі  $x, y, z$  у випадку, коли вектор імпульсу ферміона має вигляд  $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ . Поясніть отриманий результат.
3. Покажіть, що в ультрарелятивістському наближенні кіральні та спіральні стани ферміонів є тотожними. Доведіть що матриця густини ультрарелятивістських електронів в станах з лівою (правою) кіральністю:  $\rho(k) = P_{L(R)} \frac{1 + \mu \gamma^5}{2} \not{k}$ , де  $\mu$  – спіральність частинки. Зробіть узагальнення отриманого виразу для позитронів.

## РОЗДІЛ 5

### Теореми Віка. Елементи діаграмної техніки Фейнмана в координатному просторі

#### Теореми Віка

Введемо поняття спарювання двох операторів як різницю їх хронологічно впорядкованого та нормального добутків:

$$\overline{\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)} = \hat{T}(\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)) - \hat{N}(\hat{A}(x_1)\hat{B}(x_2)). \quad (5.1)$$

Перша теорема Віка стверджує, що

$$\hat{T}(\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\dots\hat{O}_n(x_n)) = \sum_{\Pi} \hat{N}(\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\dots\hat{O}_n(x_n)), \quad (5.2)$$

де сума ведеться за всіма можливими спарюваннями між операторами, включаючи їх відсутність.

Друга теорема Віка стверджує, що

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{O}_1(x_1)\hat{N}(\hat{O}_2(x_2), \hat{O}_3(x_3))\dots\hat{N}(\hat{O}_k(x_k), \hat{O}_{k+1}(x_{k+1}))\dots\hat{O}_n(x_n)) = \\ = \sum_{\Pi'} \hat{N}(\hat{O}_1(x_1), \hat{O}_2(x_2)\dots\hat{O}_n(x_n)), \quad (5.3) \end{aligned}$$

де сума ведеться за всіма можливими спарюваннями між операторами, включаючи їх відсутність, за винятком спарювання між операторами під знаком нормального впорядкування. При цьому нормальний добуток зі спарюванням визначається як

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{O}_1(x_1)\dots\overline{\hat{O}_j(x_j)\dots\hat{O}_k(x_k)}\dots\hat{O}_n(x_n)) = \eta\overline{\hat{O}_j(x_j)\hat{O}_k(x_k)}\times \\ \times \hat{N}(\hat{O}_1(x_1)\dots\hat{O}_{j-1}(x_{j-1})\hat{O}_{j+1}(x_{j+1})\dots\hat{O}_{k-1}(x_{k-1})\hat{O}_{k+1}(x_{k+1})\dots\hat{O}_n(x_n)), \quad (5.4) \end{aligned}$$

де  $\eta$  – фазовий множник, що дорівнює одиниці для бозонних операторів та  $(-1)^p$  – для ферміонних операторів, де  $p$  – кількість використаних ферміонних перестановок від початкового порядку розташування операторів  $1 \dots j-1 \ j \ j+1 \dots k-1 \ k \ k+1 \dots n$  до кінцевого  $j \ k \ 1 \dots j-1 \ j+1 \dots k-1 \ k+1 \dots n$ . Останнє твердження пов'язане з тим,

що під знаком нормального впорядкування всі ферміонні оператори антикомутують.

Наведемо, поки без доведення, результати спарювань різних операторів у КЕД:

$$\begin{cases} \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)}\hat{A}_\mu(x') = \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x')}\hat{A}_\mu(x) = 0; \\ \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)}\hat{\Psi}_\beta(x') = \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x')}\hat{\Psi}_\beta(x) = 0; \\ \overline{\hat{A}_\nu(x)}\hat{A}_\mu(x') = iD_{\mu\nu}^0(x-x'); \\ \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)}\hat{\Psi}_\beta(x') = -\overline{\hat{\Psi}_\beta(x')}\hat{\Psi}_\alpha(x) = -iG_{\alpha\beta}(x-x'). \end{cases} \quad (5.5)$$

Тоді, наприклад, згідно з (5.4) маємо

$$\begin{aligned} \hat{N} \left( \overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)}\hat{\Psi}_\beta(x')\hat{\Psi}_\nu(x'')\hat{\Psi}_\mu(x''') \right) &= -\overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)}\hat{\Psi}_\nu(x'')\overline{\hat{\Psi}_\beta(x')}\hat{\Psi}_\mu(x''') = \\ &= -(-i)G_{\nu\alpha}(x''-x)(-i)G_{\mu\beta}(x'''-x') = G_{\nu\alpha}(x''-x)G_{\mu\beta}(x'''-x'). \end{aligned} \quad (5.6)$$

### Діаграмна техніка Фейнмана в координатному просторі

Нехай кожному оператору квантованого поля та спарюванню між операторами буде відповідати певне графічне зображення:

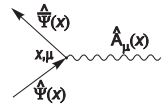
$$\begin{array}{cc} \hat{A}_\mu(x) \sim \text{wavy line} \xrightarrow{x, \mu} & \overline{\hat{A}_\nu(x)}\hat{A}_\mu(x') \sim \text{wavy line} \xrightarrow{x, \nu} \xrightarrow{x', \mu} \\ \hat{\Psi}(x) \xrightarrow{x} & \hat{\Psi}(x) \xrightarrow{x} \\ \overline{\hat{\Psi}(x)}\hat{\Psi}(x') \xrightarrow{x, x'} & \overline{\hat{\Psi}(x)}\hat{\Psi}(x') \xrightarrow{x, x'} \end{array}$$

Тоді, використавши теорему Віка, розклад  $\hat{S}$ -матриці (1.55) можна графічно представити у вигляді суми діаграм (будемо ліворуч писати математичну формулу, а праворуч – діаграму, що їй відповідає):

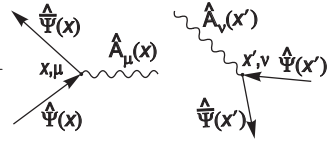
$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{1} + (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N} \left( \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right) \hat{A}_\mu + \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{T} \left[ \hat{N} \left( \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right) \hat{A}_\mu \hat{N} \left( \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right) \hat{A}'_\nu \right] + \dots = \end{aligned}$$

$$= \hat{1} +$$

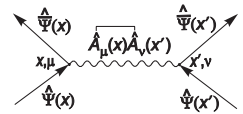
$$(-ie) \hat{N} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu +$$



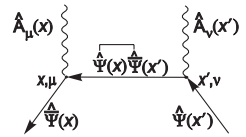
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu +$$



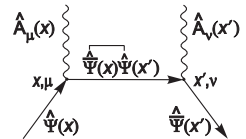
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \overbrace{\hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu} +$$



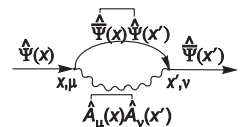
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \overbrace{\hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu} +$$



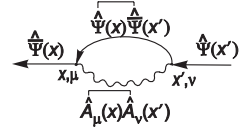
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \overbrace{\hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu} +$$



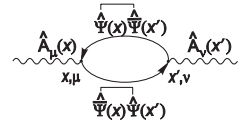
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \overbrace{\hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu} +$$



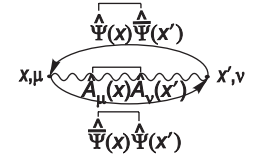
$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu +$$



$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu +$$

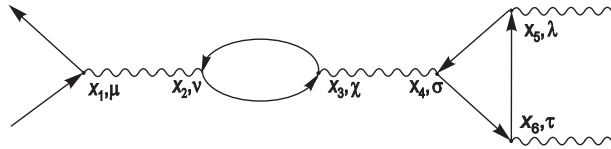


$$\hat{N} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu +$$



плюс діаграми третього та вищих порядків теорії збурень.

Очевидно, що запропонована процедура дозволяє також по заданій діаграмі відновити математичну формулу, наприклад, діаграми



відповідає доданок шостого порядку  $\hat{S}$ -матриці (на діаграмі зображено шість точок  $(x_1 \dots x_6)$ ):

$$\hat{S}^{(6)} = \hat{N} \frac{(-ie)^6}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_6 \times \quad (5.7)$$

$$\hat{\Psi}^{(1)} \gamma^\mu \hat{\Psi}^{(1)} \hat{A}_\mu^{(1)} \hat{\Psi}^{(2)} \gamma^\nu \hat{\Psi}^{(2)} \hat{A}_\nu^{(2)} \hat{\Psi}^{(3)} \gamma^\lambda \hat{\Psi}^{(3)} \hat{A}_\lambda^{(3)} \hat{\Psi}^{(4)} \gamma^\sigma \hat{\Psi}^{(4)} \hat{A}_\sigma^{(4)} \hat{\Psi}^{(5)} \gamma^\lambda \hat{\Psi}^{(5)} \hat{A}_\lambda^{(5)} \hat{\Psi}^{(6)} \gamma^\tau \hat{\Psi}^{(6)} \hat{A}_\tau^{(6)}$$

де цифри зверху в дужках  $(i)$  означають, що оператори залежать від  $x_i$ .

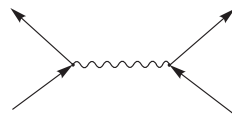
Існує твердження, що для опису певного фізичного процесу потріб-



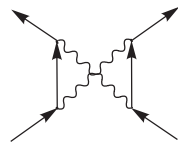
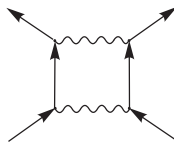
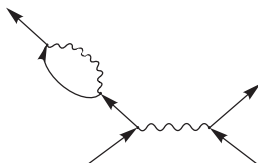
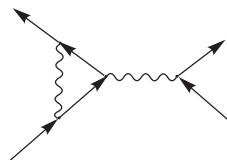
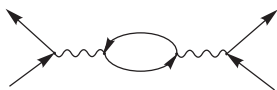
но використати всі можливі діаграми (в усіх порядках теорії збурень), в яких вільні кінці відповідають частинкам (квантам поля), взаємодія яких розглядається. Справді, вільним кінцям діаграм зіставляються оператори відповідного поля, і саме вони будуть залучені при обчисленні усереднення за початковим та кінцевим станами. Внутрішні ж лінії (див. (5.5)) при цьому не будуть визначальними, оскільки являють собою величини неоператорної природи.

Враховуючи вищезазначене, наприклад, процесу розсіяння електрона на електроні будуть відповідати такі діаграми:

в другому порядку  $\hat{S}$ -матриці



в четвертому порядку  $\hat{S}$ -матриці<sup>1</sup>



та інші діаграми у вищих порядках теорії збурень.

Пояснимо переваги, що надаються даними правилами. Якщо раніше, в історичному розгляді, при розгляді процесів у другому порядку теорії збурень, ми були вимушені записувати явно розклад операторів квантованих полів, перемножувати утворювані суми та брати усереднення за заданими початковим та кінцевим станами від кожного з доданків (див., наприклад, (2.12)), де з 16 доданків лише один давав

<sup>1</sup>Наведено лише різні типи діаграм. У повному записі потрібно було б навести діаграми з петльовими поправками до різних зовнішніх ферміонних ліній, а також діаграму з поправкою до іншої вершини.

ненульовий внесок), то тепер необхідний ненульовий доданок можна записати відразу. Більше того, якщо в другому порядку  $\hat{S}$ -матриці, куди входило чотири оператори електрон-позитронного та два оператори електромагнітного поля, розрахунки ще можна було проробити явно, то у вищих порядках теорії збурень застосування формалізму  $\hat{S}$ -матриці без використання правил діаграмної техніки стає надзвичайно громіздким.

Зауважимо, якщо зовнішнім лініям діаграм відповідають реальні частинки, то внутрішнім лініям можна зіставити так звані віртуальні частинки. У такому підході діаграми дають наочну фізичну картину взаємодії частинок у квантовій теорії поля, при цьому саме поняття взаємодії розглядається як процес обміну віртуальними частинками. Однак це вже тема наступного розділу.

Представлені діаграми називають діаграмами Фейнмана, а відповідність їх математичним виразам для опису реальних фізичних процесів – діаграмною технікою Фейнмана. Саме він запропонував використовувати цей формалізм ще в 1948 р. Щоправда, доведення цього формалізму у Фейнмана базувалося на методі континуального інтеграла. В даному курсі в якості доведення слід розглядати тотожність результатів отриманих методом діаграмної техніки Фейнмана (див. далі) і методом, описаним в історичному огляді (розд. 2 – 4).

Далі покажемо, як можна довести співвідношення (5.5).

### Розгляд спарювання $\overline{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')}$

Згідно з означенням (5.1):

$$\overline{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')} = \hat{T} \left( \hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') \right) - \hat{N} \left( \hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') \right). \quad (5.8)$$

Розглянемо випадок  $t > t'$  та явно запишемо квантовані оператори електромагнітного поля згідно з (2.6), тоді

$$\begin{aligned} \overline{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')} &= /t > t'/ = \\ &= \sum_{\alpha} (\hat{c}_{\alpha} \varphi_{\mu}^{\alpha} + \hat{c}_{\alpha}^{+} \varphi_{\mu}^{*\alpha}) \sum_{\beta} (\hat{c}_{\beta} \varphi_{\nu}^{\prime\beta} + \hat{c}_{\beta}^{+} \varphi_{\nu}^{\prime*\beta}) - \\ &\quad - \sum_{\alpha} \hat{N} (\hat{c}_{\alpha} \varphi_{\mu}^{\alpha} + \hat{c}_{\alpha}^{+} \varphi_{\mu}^{*\alpha}) \sum_{\beta} (\hat{c}_{\beta} \varphi_{\nu}^{\prime\beta} + \hat{c}_{\beta}^{+} \varphi_{\nu}^{\prime*\beta}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha, \beta} \left( \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^\beta + \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta^+ \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^{*\beta} + \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^\beta + \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^{*\beta} \right) - \\
&- \sum_{\alpha, \beta} \left( \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^\beta + \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_\alpha \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^{*\beta} + \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^\beta + \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^{*\beta} \right) = \\
&= \sum_{\alpha, \beta} \left[ \hat{c}_\alpha, \hat{c}_\beta^+ \right]_- \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^{*\beta} = \sum_\alpha \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^{*\alpha}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Аналогічно, розглядаючи при  $t < t'$ , отримаємо

$$\overline{\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')} = /t < t'/ = \sum_\alpha \varphi'_\nu{}^\alpha \varphi_\mu^{*\alpha}, \quad (5.10)$$

тобто

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x')} &= \sum_\alpha \begin{cases} \varphi_\mu^\alpha \varphi'_\nu{}^{*\alpha}, & t > t' \\ \varphi'_\nu{}^\alpha \varphi_\mu^{*\alpha}, & t < t' \end{cases} = \\
&= /(2.7)/ = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \sum_\lambda \begin{cases} \frac{\epsilon_\mu^\lambda(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} e^{-ikx} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda}(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} e^{ikx'}, & t > t' \\ \frac{\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} e^{-ikx'} \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda}(\vec{k})}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} e^{ikx}, & t < t' \end{cases} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

що й збігається з означенням фотонного пропагатора  $iD_{\mu\nu}^0(x, x')$  (2.38).

### Розгляд спарювання $\overline{\hat{\Psi}_\alpha(x) \hat{\Psi}_\beta(x')}$

Процедура доведення останнього співвідношення (5.5) повністю аналогічна тільки що проведеному розгляду спарювання операторів електромагнітного поля. Проробивши її, отримаємо

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{\Psi}_\alpha(x) \hat{\Psi}_\beta(x')} &= \sum_{\vec{k}, \mu, \vec{k}', \mu'} \begin{cases} [a_{\vec{k}, \mu}^+, a_{\vec{k}', \mu'}^+] + \frac{v_{\alpha, k}^\mu \bar{v}_{\beta, k'}^{\mu'}}{2V \sqrt{\epsilon_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}'}}} e^{-i(kx - k'x')}, & t > t' \\ -[b_{\vec{k}, \mu}^+, b_{\vec{k}', \mu'}^+] + \frac{\bar{v}_{\beta, -k'}^{\mu'} v_{\alpha, -k}^\mu}{2V \sqrt{\epsilon_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}'}}} e^{i(kx - k'x')}, & t < t' \end{cases} \\
&= \sum_{\vec{k}, \mu} \frac{1}{2V \epsilon_{\vec{k}}} \begin{cases} v_{\alpha, k}^\mu \bar{v}_{\beta, k}^\mu e^{-ik(x-x')}, & t > t' \\ -\bar{v}_{\beta, -k}^\mu v_{\alpha, -k}^\mu e^{ik(x-x')}, & t < t' \end{cases} \quad (5.12)
\end{aligned}$$

що й збігається з означенням електронного пропатора  $-iG_{\alpha\beta}(x-x')$  (4.10). Друге співвідношення в (5.5) можна довести згідно з визначенням (5.1) і врахувавши, що вторинно квантовані функції ферміонів антикомутують на  $c$ -числову функцію<sup>1</sup> (див. (Д5.4.5)):

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\Psi}_\beta(x')\hat{\Psi}_\alpha(x)} &= \hat{T}(\hat{\Psi}_\beta(x')\hat{\Psi}_\alpha(x)) - \hat{N}(\hat{\Psi}_\beta(x')\hat{\Psi}_\alpha(x)) = \\ &= -(\hat{T}(\hat{\Psi}_\alpha(x)\hat{\Psi}_\beta(x')) - \hat{N}(\hat{\Psi}_\alpha(x)\hat{\Psi}_\beta(x'))) = -\overline{\hat{\Psi}_\alpha(x)\hat{\Psi}_\beta(x')} \quad (5.13) \end{aligned}$$

### Завдання

1. Побудуйте всі діаграми шостого порядку розсіяння електрона на електроні.
2. Побудуйте всі діаграми до шостого порядку включно розсіяння фотона на електроні.
3. Доведіть перше та друге співвідношення (5.5).
4. Припустимо, що при розрахунку електрон-фотонного розсіяння в другому порядку теорії збурень (розд. 3) ви забули використати оператор нормального впорядкування для струмів. Якого типу діаграми ви б додатково отримали?

---

<sup>1</sup>  $c$ -числом називають величину, що не має операторної природи.

## РОЗДІЛ 6

### Процеси за участю античастинок. Електрон-позитронна дво- та трифотонна анігіляції. Розгалуження діаграми. Елементи діаграмної техніки Фейнмана в імпульсному просторі

У попередньому розділі було введено поняття діаграми Фейнмана в координатному представленні, головна користь від яких полягала в тому, що розрахунок певних процесів у КЕД зводиться до усереднення за початковим та кінцевим станами не від усіх складових  $\hat{S}$ -матриці, а лише від тих, яким відповідають діаграмами Фейнмана, що описують цей процес. У цьому розділі на часткових прикладах деяких процесів у КЕД ми розвинемо правила діаграмної техніки Фейнмана в імпульсному просторі та розкриємо фізичний зміст внутрішніх ліній діаграм.

#### Електрон-позитронна анігіляція у два фотони

Розглянемо електрон-позитронну анігіляцію у два фотони  $e+e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$  (рис. 6.1).

Розглянемо перше неznикаюче наближення, яке буде давати другий порядок теорії збурень (у нульовому та першому порядках теорії збурень не існує діаграм Фейнмана, що відповідають за цей процес). З розкладу другого порядку  $\hat{S}$ -матриці за теоремою Віка візьмемо лише

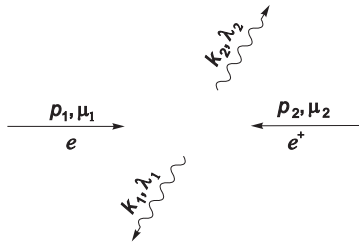


Рис. 6.1. Схематичне зображення електрон-позитронної анігіляції.

діаграми, що мають дві ферміонні та дві фотонні зовнішні лінії:

$$S_{fi}^{(2)} = \langle (k_1, \lambda_1); (k_2, \lambda_2) | \hat{S}^{(2)} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \langle (k_1, \lambda_1); (k_2, \lambda_2) | \begin{array}{c} \hat{A}_\mu(x) \text{ wavy} \leftarrow x_\mu \text{ fermion} \xrightarrow{x'_\nu} \hat{A}_\nu(x') \text{ wavy} \\ \hat{\Psi}(x) \text{ fermion} \xrightarrow{\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x')} \hat{\Psi}(x') \text{ fermion} \end{array} + \begin{array}{c} \hat{A}_\mu(x) \text{ wavy} \leftarrow x_\mu \text{ fermion} \xrightarrow{x'_\nu} \hat{A}_\nu(x') \text{ wavy} \\ \hat{\Psi}(x) \text{ fermion} \xrightarrow{\hat{\Psi}(x)\hat{\Psi}(x')} \hat{\Psi}(x') \text{ fermion} \end{array} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle \\ &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \overline{\hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}'} \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle + \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \overline{\hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}'} \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Оскільки друга діаграма отримується з першої заміною "німих" змінних просумування та інтегрування  $x \leftrightarrow x'$ ,  $\mu \leftrightarrow \nu$  і дзеркальним відображенням, то внесок від кожної з діаграм буде однаковим і можна розглядати лише один, наприклад, перший доданок у (6.1). Цим, фактично, ми фіксуємо точки  $x$  та  $x'$ , в які входять частинки. Отже,

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= (-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \overline{\hat{\Psi} \hat{A}_\mu \hat{\Psi}'} \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}'_\nu \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \\ &= (-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu (-i) G(x-x') \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle \\ &= (-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu (-i) G(x-x') \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle \times \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \right] | 0 \rangle, \quad (6.2) \end{aligned}$$

де в останньому виразі оператор нормального впорядкування  $\hat{N}$  було занесено явно в ферміонну та фотонну частини, щоб можна було розглянути ці частини окремо.

Розглянемо ферміонну частину:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle &= \sum_{\chi, \sigma} \langle 0 | \hat{N} \left[ \left( \hat{a}_\chi^+ \bar{\psi}_\chi + \hat{b}_\chi \bar{\psi}_{-\chi} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \left( \hat{a}_\sigma \psi'_\sigma + \hat{b}_\sigma^+ \psi'_{-\sigma} \right) \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \\
 &= \langle 0 | \hat{b}_\chi a_\sigma \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle \bar{\psi}_{-\chi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \psi'_\sigma = \\
 &= \delta_{\sigma,1} \delta_{\chi,2} \bar{\psi}_{-\chi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \psi'_\sigma = \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \psi'_1 = \\
 &= \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} e^{-ip_2 x}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \frac{v_{p_1}^{\mu_1} e^{-ip_1 x'}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}}. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Розглянемо фотонну частину:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \right] | 0 \rangle &= \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{N} \left[ \left( \hat{c}_\alpha \varphi_\mu^\alpha + \hat{c}_\alpha^+ \varphi_\mu^{*\alpha} \right) \left( \hat{c}_\beta \varphi'_\nu{}^\beta + \hat{c}_\beta^+ \varphi'_\nu{}^{*\beta} \right) \right] | 0 \rangle = \\
 &= \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^{*\beta} = \sum_{\alpha, \beta} (\delta_{1,\beta} \delta_{2,\alpha} + \delta_{1,\alpha} \delta_{2,\beta}) \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu{}^{*\beta} = \\
 &= \varphi_\mu^{*2} \varphi'_\nu{}^{*1} + \varphi_\mu^{*1} \varphi'_\nu{}^{*2} = \\
 &= \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{ik_2 x}}{\sqrt{2V\omega_2}} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{ik_1 x'}}{\sqrt{2V\omega_1}} + \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{ik_1 x}}{\sqrt{2V\omega_1}} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{ik_2 x'}}{\sqrt{2V\omega_2}}. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Підставивши (6.3), (6.4) у (6.2), отримаємо

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \psi'_1 (\varphi_\mu^{*2} \varphi'_\nu{}^{*1} + \varphi_\mu^{*1} \varphi'_\nu{}^{*2}) = \\
 &= -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \left( \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} e^{-ip_2 x}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \frac{v_{p_1}^{\mu_1} e^{-ip_1 x'}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}} \right) \times \\
 &\times \left( \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{ik_2 x}}{\sqrt{2V\omega_2}} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{ik_1 x'}}{\sqrt{2V\omega_1}} + \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{ik_1 x}}{\sqrt{2V\omega_1}} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{ik_2 x'}}{\sqrt{2V\omega_2}} \right), \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

або, формально, на рівні діаграм

$$\begin{aligned}
 & \langle (k_1, \lambda_1); (k_2, \lambda_2) | \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x') | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle = \\
 & \begin{array}{c}
 \hat{A}_\mu(x) \quad \hat{A}_\nu(x') \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 x, \mu \quad x', \nu \\
 \hat{\Psi}(x) \quad \hat{\Psi}(x')
 \end{array} \\
 & + \\
 & \begin{array}{c}
 \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{\sqrt{2V\omega_2}} e^{ik_2x} \\
 \uparrow \\
 (-ie)\gamma^\mu \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 x \quad x' \\
 \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2}}{\sqrt{2V\epsilon_2}} e^{-ip_2x} \quad \frac{-iG(x-x')}{\sqrt{2V\omega_1}} e^{ik_1x'} \\
 \frac{v_{p_1}^{\mu_1}}{\sqrt{2V\epsilon_1}} e^{-ip_1x'}
 \end{array} \\
 & + \\
 & \begin{array}{c}
 \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1)}{\sqrt{2V\omega_1}} e^{ik_1x} \\
 \uparrow \\
 (-ie)\gamma^\mu \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 x \quad x' \\
 \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2}}{\sqrt{2V\epsilon_2}} e^{-ip_2x} \quad \frac{-iG(x-x')}{\sqrt{2V\omega_2}} e^{ik_2x'} \\
 \frac{v_{p_1}^{\mu_1}}{\sqrt{2V\epsilon_1}} e^{-ip_1x'}
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Справді, якщо записати множники, рухаючись вздовж ферміонних ліній у напрямку проти напрямку стрілок, вставити у вузли відповідні гамма-матриці, помножені на  $(-ie)$ , а потім помножити на фотонні частини та проінтегрувати за  $x$  та  $x'$ , то відновимо вираз (6.5). Зазначимо, що коли лінію електромагнітного поля ми зіставляємо з реальним фотонем, що може входити чи виходити з точки, то фотонну лінію вже слід писати із зазначенням її напрямку, оскільки від цього буде залежати функція, що з нею зіставляється.

У виразі (6.5) запишемо функцію Гріна через фур'є-відображення (2.33) і виконаємо інтегрування за  $x$  та  $x'$ :

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= \left/ G(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} G(p) \right/ = \\
 &= -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \left( \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2}}{\sqrt{2V\epsilon_2}} \gamma^\mu \frac{G(p)}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{v_{p_1}^{\mu_1}}{\sqrt{2V\epsilon_1}} \right) \times
 \end{aligned}$$



$$\times \left( \frac{\epsilon_{\mu}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{\sqrt{2V\omega_2}} \frac{\epsilon_{\nu}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1)}{\sqrt{2V\omega_1}} (2\pi)^4 \delta(p + p_2 - k_2) (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k_1) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_{\mu}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1)}{\sqrt{2V\omega_1}} \frac{\epsilon_{\nu}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{\sqrt{2V\omega_2}} (2\pi)^4 \delta(p + p_2 - k_1) (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k_2) \right), \quad (6.6)$$

або, формально, на рівні діаграм:

$$(2\pi)^4 \delta(p + p_2 - k_2) (-ie) \gamma^{\mu} \left[ \frac{\bar{v}^{\mu_2}_{-p_2}}{\sqrt{2V\epsilon_2}} \right] \left[ -i \frac{G(p)}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p \right] \left[ \frac{v^{\mu_1}_{p_1}}{\sqrt{2V\epsilon_1}} \right] \frac{\epsilon_{\mu}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1)}{\sqrt{2V\omega_1}} (-ie) \gamma^{\nu} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k_1) +$$

$$+ (2\pi)^4 \delta(p + p_2 - k_1) (-ie) \gamma^{\mu} \left[ \frac{\bar{v}^{\mu_2}_{-p_2}}{\sqrt{2V\epsilon_2}} \right] \left[ -i \frac{G(p)}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p \right] \left[ \frac{v^{\mu_1}_{p_1}}{\sqrt{2V\epsilon_1}} \right] \frac{\epsilon_{\nu}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2)}{\sqrt{2V\omega_2}} (-ie) \gamma^{\nu} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p - k_2)$$

Справді, якщо записати множники, рухаючись уздовж ферміонних ліній у напрямку проти напрямку стрілок, а потім помножити на фотонні частини та проінтегрувати за  $d^4 p$ , то відновимо вираз (6.6).

Аргументи дельта-функцій, що стоять у вершинах діаграм легко записати, якщо скористатися такими діаграмами:

$$\begin{array}{c} k_2 \\ \uparrow \\ x \leftarrow p = p_1 - k_1 \rightarrow x' \\ \downarrow \quad \uparrow \\ -p_2 \quad p_1 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} k_1 \\ \uparrow \\ x \leftarrow p = p_1 - k_2 \rightarrow x' \\ \downarrow \quad \uparrow \\ -p_2 \quad p_1 \end{array}$$

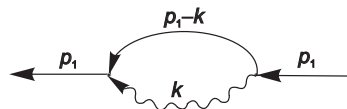
Тоді аргументи дельта функцій будуть виражати збереження 4-імпульсів, що входять у певну точку та виходять з неї. Справді, у першій діаграмі в точці  $x'$  4-імпульс електрона  $p_1$  (входить у вершину) перейде в 4-імпульс фотона  $k_1$  (виходить з вершини) та 4-імпульс так званої віртуальної частинки  $p = p_1 - k_1$ , якій відповідає суцільна (ферміонна) внутрішня лінія діаграми. У точці  $x$  цієї ж діаграми 4-імпульс фото-

на  $k_2$  (виходить з вершини) є сумою 4-імпульсу позитрона (насправді входить у вершину з 4-імпульсом  $p_2$ , але на діаграмі йому відповідає вихідна лінія з 4-імпульсом  $-p_2$ )<sup>1</sup> та 4-імпульсу віртуальної частинки  $p = k_2 - p_2$ . Прирівнюючи значення в точках  $x$  та  $x'$ , отримуємо закон збереження енергії-імпульсу  $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ .

Назва *віртуальна частинка* використовується у зв'язку з тим, що, якщо для реальної частинки квадрат 4-імпульсу дорівнює квадрату її маси  $p^2 = \varepsilon^2 - \vec{p}^2 = m^2$ , то для віртуальної частинки зазначена рівність не виконується, наприклад:  $(p_1 - k_1)^2 = p_1^2 + k_1^2 - 2p_1k_1 = m^2 - 2p_1k_1 \neq m^2$ .

Щодо фізичного змісту наведених діаграм, наприклад першої, то його можна розуміти так. Електрон  $p_1$ , що входить у точку  $x'$ , випромінює фотон  $k_1$ , унаслідок чого його 4-імпульс стає  $p_1 - k_1$ , тобто таким, при якому електрон як реальна частинка перестає існувати (порушується співвідношення між її енергією та імпульсом:  $p^2 \neq m^2$ ). Однак, співвідношення невизначеності енергії-часу  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$  дозволяє частинці перебувати в такому стані лише впродовж деякого достатньо малого проміжку часу. Якщо за цей час така віртуальна частинка провзаємодіє з позитроном, то процес анігіляції відбудеться й утвориться фотон  $k_2$ . Якщо ж поблизу не виявиться позитрона, то електрон поглине випущений фотон і знову перейде в реальний стан за схемою, наведеною праворуч.

Тобто на рівні КЕД взаємодія відбувається шляхом обміну взаємодіючих частинок з іншими, віртуальними частинками, квантами поля. Квадрат 4-

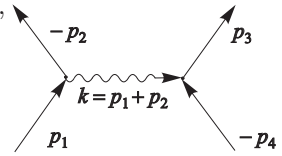


імпульсу віртуальної частинки може бути як додатнім, так і від'ємним.

**Перший приклад.** Для процесу  $e - e$ -розсіяння з (2.34) випливає, що віртуальний фотон може мати  $k = p_4 - p_1$ , тобто  $k^2 = p_4^2 + p_1^2 - 2p_4p_1 = m^2 + m^2 - 2(\varepsilon_4\varepsilon_1 - \vec{p}_4\vec{p}_1)$ . Щоб оцінити значення  $k^2$  використовуємо такий прийом. Оскільки  $k^2$  є скаляром, тобто інваріантом в усіх системах відліку, то виберемо систему відліку, де перша частинка перебуває у спокої, тобто  $p_1 = (m, 0)$ , тоді  $k^2 = 2m(m - \varepsilon_4) = /\varepsilon_4 > m / < 0$ . Це діаграма розсіючого типу.

<sup>1</sup>Нас не повинен бентежити факт, що античастинка, котра входить у точку  $x$ , зіставляється з лінією, що виходить з цієї точки з від'ємним 4-імпульсом. Так і має бути, адже у формалізмі Дірака античастинку можна трактувати як частинку, що рухається в часі у зворотному напрямку.

**Другий приклад.** Для процесу електрон-позитронного розсіяння, як далі покажемо, буде існувати діаграма, де  $k = p_1 + p_2$ , тобто  $k^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = 2m^2 + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2)$ . Оберемо систему відліку, де перша частинка перебуває у спокої, тоді  $k^2 = 2m(m + \varepsilon_2) > 0$ . Це діаграма анігілюючого типу. Фотон тут має  $k^2 > 0$  і формально йому можна зіставити частинку з  $M = \sqrt{k^2}$ .



Зазначимо таку корисну якісну властивість поведінки амплітуди реакції. Оскільки віртуальна частинка відповідає внутрішній лінії діаграми, тобто зіставляється з відповідним пропагатором (2.46), (4.14) з полюсом в точці  $p^2 = m^2$ , то зрозуміло, що амплітуда процесу буде зростати при прямуванні квадрата 4-імпульсу віртуальної частинки до маси реальної частинки.

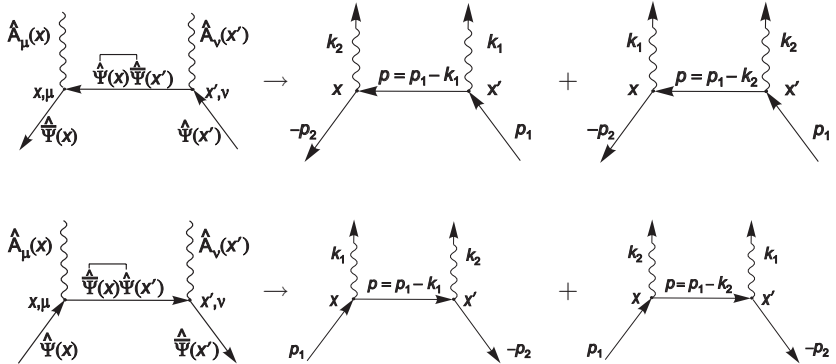
Повернемося тепер до задачі електрон-позитронної анігіляції. У (6.6) проведемо інтегрування за  $d^4 p$  й остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_1 \omega_2}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} \gamma^\mu G(p_1 - k_1) \gamma^\nu v_{p_1}^{\mu_1} \epsilon_\mu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \epsilon_\nu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} \gamma^\mu G(p_1 - k_2) \gamma^\nu v_{p_1}^{\mu_1} \epsilon_\mu^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) \epsilon_\nu^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \right\} = \\
 &= ie^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_1 \omega_2}} \times \\
 &\quad \times \bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} \left\{ \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) G(p_1 - k_1) \not{\epsilon}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) + \not{\epsilon}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1) G(p_1 - k_2) \not{\epsilon}^{*\lambda_2}(\vec{k}_2) \right\} v_{p_1}^{\mu_1}.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

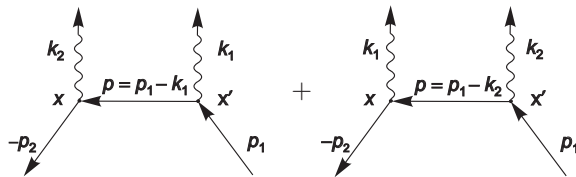
Підведемо підсумок. Ми розпочали розрахунок, записавши згідно з теоремою Віка дві діаграми в координатному просторі (див. (6.1)). Внесок від них є однаковим. Справді, перша з діаграм описує випадок, коли електрон потрапляє в точку  $x'$ , а позитрон у точку  $x$ , друга діаграма — з точністю до навпаки. Формально можна вважати, що множник  $2 = 2!$  визначає кількість всіх можливих перестановок точок  $x$  і  $x'$  на діаграмі та пов'язаний з використанням релятивістсько-інваріантної теорії збурень. Нагадаємо, що саме використання оператора хронологічного впорядкування Дайсона (див. (1.12) – (1.16))

призвело до появи  $n!$  у знаменнику  $n$ -го порядку  $\hat{S}$ -матриці, або, формально, поява  $n!$  пов'язана з невизначеністю розстановок точок  $x^i$  по вузлах діаграми.

Кожна з діаграм із формули (6.1) переходить у дві діаграми в імпульсному представленні:



Зафіксувавши точки  $x$  і  $x'$  та прибравши  $2!$  зі знаменника у формулі для матриці розсіяння (6.2), ми отримали лише дві діаграми:



що відрізняються точками вильоту кінцевих фотонів  $k_1$  та  $k_2$ . Так і має бути, оскільки експеримент не дає можливості зафіксувати, з якої саме точки вилетів фотон:  $k_1$  чи  $k_2$ .

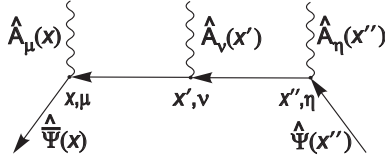
Звернемо увагу, що діаграми мають спільний знак. Справді, друга діаграма відрізняється від першої перестановкою операторів електромагнітного поля, а оскільки вони комутують, то знак має бути таким самим.

### Електрон-позитронна анігіляція в три фотони

За допомогою методу, наведеного в історичному огляді, або явно записавши всі доданки згідно з теоремою Віка, можна переконатися, що внесок в електрон-позитронну анігіляцію в три фотони, тобто

$e + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma$ , буде описуватися  $6 = 3!$  рівнозначними діаграмами Фейнмана в координатному представленні, що будуть відрізнятися лише перестановками точок інтегрування  $(x, x', x'')$ .

Зафіксувавши точки  $x, x', x''$  можна прибрати  $3!$  зі знаменника у формулі для матриці розсіяння та описати процес за допомогою однієї діаграми в координатному представленні:



Зіставивши діаграмі формулу, отримуємо (див. (6.2)):

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(3)} &= (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu (-i) G(x-x') \gamma^\nu \times \right. \\
 &\quad \left. \times (-i) G(x'-x'') \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{A}''_\eta \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \\
 &= -ie^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu \times \right. \\
 &\quad \left. \times G(x'-x'') \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{A}''_\eta \right] | 0 \rangle. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Ферміонна частина дасть, очевидно, один доданок (див. (6.3)):

$$\begin{aligned}
 &\langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \\
 &\quad = \sum_{\chi, \sigma} \langle 0 | \hat{N} \left[ \left( \hat{a}_\chi^+ \bar{\psi}_\chi + \hat{b}_\chi \bar{\psi}_{-\chi} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \left( \hat{a}_\sigma \psi''_\sigma + \hat{b}_\sigma^+ \psi''_{-\sigma} \right) \right] \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \\
 &= \langle 0 | \hat{b}_\chi a_\sigma \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle \bar{\psi}_{-\chi} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \psi''_\sigma = \\
 &= \delta_{\sigma, 1} \delta_{\chi, 2} \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \psi''_1 = \\
 &= \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \psi''_1 = \\
 &= \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2} e^{-ip_2 x}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\mu G(x-x') \gamma^\nu G(x'-x'') \gamma^\eta \frac{v_{p_1}^{\mu_1} e^{-ip_1 x''}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}}, \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

а фотонна частина (див. (6.4))

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{A}''_\eta \right] | 0 \rangle &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_\gamma^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu^{*\beta} \varphi''_\eta^{*\gamma} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} (\delta_{1, \alpha} \delta_{2, \beta} \delta_{3, \gamma} + \delta_{1, \alpha} \delta_{3, \beta} \delta_{2, \gamma} + \delta_{3, \alpha} \delta_{1, \beta} \delta_{2, \gamma} + \\ &+ \delta_{3, \alpha} \delta_{2, \beta} \delta_{1, \gamma} + \delta_{2, \alpha} \delta_{1, \beta} \delta_{3, \gamma} + \delta_{2, \alpha} \delta_{3, \beta} \delta_{1, \gamma}) \varphi_\mu^{*\alpha} \varphi'_\nu^{*\beta} \varphi''_\eta^{*\gamma} \quad (6.10) \end{aligned}$$

дасть 6 = 3! доданків (тобто діаграм), в яких реалізуються всі можливі варіанти вильоту трьох даних фотонів із трьох фіксованих точок. Відбувається так зване розгалуження діаграми. Як видно, всі 6 діаграм увійдуть з однаковими знаками, як і має бути.

Узагальнюючи, скажемо, що у випадку  $n$ -фотонної анігіляції задача так само зведеться до однієї діаграми в координатному просторі (без  $n!$  у знаменнику виразу для  $\hat{S}$ -матриці), що дасть у результаті розгалуження  $n!$  доданків в імпульсному просторі, в яких будуть реалізуватися всі можливі варіанти вильоту  $n$  даних фотонів із  $n$  фіксованих точок.

Цікаво розглянути, що буде у випадку, коли кінцевими частинками будуть не фотони (бозони), а ферміони. Розглянемо цей випадок на прикладі електрон-позитронного розсіяння в наступному розділі.

### Завдання

1. Покажіть, що однофотонна  $e - e^+$ -анігіляція є забороненою, як і будь-який інший процес за участі електронів (позитронів) та фотону в першому порядку теорії збурень як такий, що суперечить закону збереження енергії-імпульсу.
2. Покажіть, що математичний вираз, що відповідає другій діаграмі в (6.1), збігається з виразом (6.2).
3. Чи можливий випадок, коли 4-імпульс віртуального фотона прямує до нуля в процесі  $e - e$ -розсіяння (2.34), (2.47). Що буде відбуватися фізично, коли  $k^2 \rightarrow 0$ .
4. Доведіть співвідношення (6.10).
5. Доведіть, що у випадку  $n$ -фотонної анігіляції розгалуження діаграми приведе до появи  $n!$  діаграм.

## РОЗДІЛ 7

### Множник симетрії на прикладах $e - e^+$ -, $e - e^-$ та $\gamma - \gamma$ -розсіяння

У цьому розділі буде показано, що не в усіх формулах, що відповідають діаграмам Фейнмана, множник  $1/n!$  зникає до взяття вакуумного усереднення.

#### Електрон-позитронне розсіяння (розсіяння Баба)

Розглядаємо процес  $e + e^+ \rightarrow e' + e^{+'}$ . Нехай початковими характеристиками електрона та позитрона будуть  $(p_1, \mu_1)$ ,  $(p_2, \mu_2)$ , а кінцевими —  $(p_3, \mu_3)$ ,  $(p_4, \mu_4)$ , відповідно. На відміну від випадку розсіяння тожних частинок, де для задання початкового та кінцевого станів порядок операторів народження-знищення був довільним (див. розд. 2, (2.2)), у нашому випадку порядок операторів визначається умовою, щоб за відсутності взаємодії (у нульовому порядку теорії збурень) матричний елемент дорівнював одиниці:

$$\langle f | \hat{1} | i \rangle = \delta_{if}. \quad (7.1)$$

Завдяки цьому знак амплітуди розсіяння фіксується однозначно. Для виконання цієї умови електронні оператори мають стояти зовні або всередині, тобто в нашому випадку:

$$\langle 0 | \hat{a}_3 \hat{b}_4 | \hat{1} | \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \delta_{13} \delta_{24}, \quad \text{або} \quad \langle 0 | \hat{b}_4 \hat{a}_3 | \hat{1} | \hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ | 0 \rangle = \delta_{13} \delta_{24}. \quad (7.2)$$

Розглянемо перше незникаюче наближення. З розкладу другого порядку  $\hat{S}$ -матриці за теоремою Віка візьмемо лише ті діаграми, що мають чотири ферміонні зовнішні лінії. Цю умову задовольняє лише одна діаграма, тоді

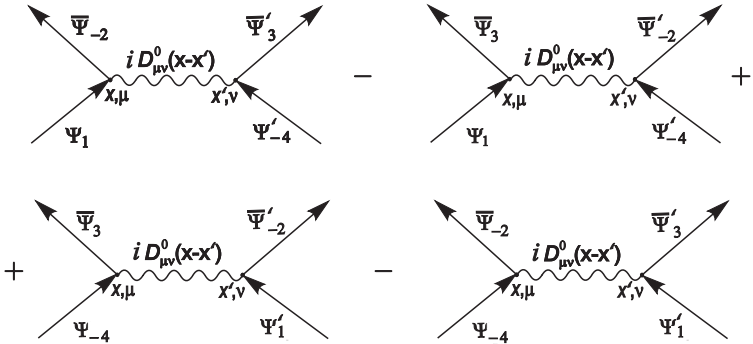
$$S_{fi}^{(2)} = \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | \hat{S}^{(2)} | (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle =$$
$$= \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | \quad (p_1, \mu_1); (p_2, \mu_2) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{b}_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{A}_\mu \overline{\hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi} \hat{A}'_\nu} \right] \hat{b}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger | 0 \rangle = \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{b}_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{b}_2^\dagger \hat{a}_1^\dagger | 0 \rangle i D_{\mu\nu}^0(x-x').
\end{aligned}$$

Розписавши квантовані ферміонні оператори згідно з (2.4), (2.5) та взявши вакуумне усереднення, отримаємо

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' i D_{\mu\nu}^0(x-x') \times \\
&\quad \times \{ (\bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_{-4}) - (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_{-2} \gamma^\nu \psi'_{-4}) + \\
&\quad + (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_{-4}) (\bar{\psi}'_{-2} \gamma^\nu \psi'_1) - (\bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu \psi_{-4}) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_1) \}. \quad (7.3)
\end{aligned}$$

Цей вираз можна також представити на рівні діаграм, що представлені на рис. 7.1. Справді, якщо записати множники, рухаючись вздовж ферміонних ліній у напрямку проти напрямку стрілок, вставити у вузли відповідні гамма-матриці, помножені на  $(-ie)$ , а потім помножити на фотонні частини та проінтегрувати за  $x$  та  $x'$ , то відновимо вираз (7.3).



**Рис. 7.1.** Зображення  $e - e$ -розсіяння. Точки  $x, x'$  фіксовані. Відображено всі фізично можливі варіанти розташування зовнішніх ліній.



Якщо в другому рядку виразу (7.3) замінити змінні підсумовування та інтегрування  $\mu \leftrightarrow \nu$ ,  $x \leftrightarrow x'$ , то отримаємо той самий вираз, що і в першому рядку. Отже,

$$S_{fi}^{(2)} = i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ \times \{ (\bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_{-4}) - (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_{-2} \gamma^\nu \psi'_{-4}) \} D_{\mu\nu}^0(x - x'),$$

тобто замість чотирьох діаграм, що впливали з (7.3), отримаємо лише дві, кожній з яких буде відповідати формула без 2! у знаменнику.

Запишемо фотонний пропагатор  $D_{\mu\nu}^0(x - x')$  через фур'є-відображення (2.33), використаємо (2.7) і виконаємо інтегрування за координатами  $x$  та  $x'$ :

$$S_{fi}^{(2)} = \left/ D_{\mu\nu}^0(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} D_{\mu\nu}^0(k) \right/ = \\ = i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \left[ \left( \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\mu \frac{v_{p_1}^{\mu_1}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}} \right) \left( \frac{\bar{v}_{p_3}^{\mu_3}}{\sqrt{2V\varepsilon_3}} \gamma^\nu \frac{v_{-p_4}^{\mu_4}}{\sqrt{2V\varepsilon_4}} \right) \frac{D_{\mu\nu}^0(k)}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \times (2\pi)^4 \delta(k + p_4 + p_3) (2\pi)^4 \delta(k + p_2 + p_1) - \\ \left. - \left( \frac{\bar{v}_{p_3}^{\mu_3}}{\sqrt{2V\varepsilon_3}} \gamma^\mu \frac{v_{p_1}^{\mu_1}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}} \right) \left( \frac{\bar{v}_{-p_2}^{\mu_2}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\nu \frac{v_{-p_4}^{\mu_4}}{\sqrt{2V\varepsilon_4}} \right) \frac{D_{\mu\nu}^0(k)}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \left. \times (2\pi)^4 \delta(k + p_1 - p_3) (2\pi)^4 \delta(k - p_2 + p_4) \right], \quad (7.4)$$

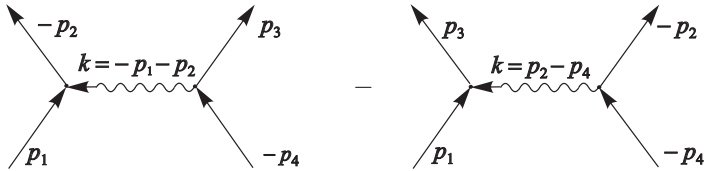
або формально цей вираз відповідає різниці діаграм, а саме:

$$(2\pi)^4 \delta(k + p_1 + p_2) (-ie) \gamma^\mu \left[ i \frac{D_{\mu\nu}^0(k)}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \right] (-ie) \gamma^\nu (2\pi)^4 \delta(k + p_3 + p_4) -$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{v}^{\mu_3} p_3}{\sqrt{2V\epsilon_3}} \quad \frac{\bar{v}^{\mu_2} - p_2}{\sqrt{2V\epsilon_2}} \\
 & - (2\pi)^4 \delta(k + p_1 - p_3) (-ie) \gamma^\mu \quad i \frac{D_{\mu\nu}^0(k)}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \quad (-ie) \gamma^\nu (2\pi)^4 \delta(k - p_2 + p_4) \\
 & \frac{v^{\mu_1} p_1}{\sqrt{2V\epsilon_1}} \quad \frac{v^{\mu_4} - p_4}{\sqrt{2V\epsilon_4}}
 \end{aligned}$$

Справді, якщо записати множники рухаючись уздовж ферміонних ліній у напрямку проти напрямку стрілок, а потім домножити на фотонну частину та проінтегрувати за  $d^4k$ , то відновимо вираз (7.4).

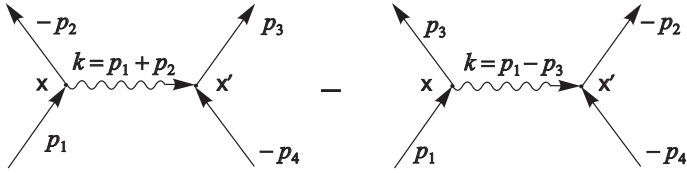
Аргументи дельта-функцій, що стоять у вершинах діаграм легко записати, якщо скористатися такими діаграмами:



Тоді аргументи дельта-функцій будуть виражати збереження 4-імпульсів, що входять у певну точку та виходять з неї (для античастинок треба підставляти їх 4-імпульси зі знаком мінус).

Слід звернути увагу на те, що лінію фотонного пропатора ми вже використовуємо з зазначеним напрямком. Це необхідно, щоб коректно записати закони збереження в кожній точці. В принципі, напрямок лінії віртуального фотона можна обирати довільним чином, як наприклад, на рис. 7.2, що буде відповідати заміні змінної інтегрування  $k \rightarrow -k$  у (7.4), що, очевидно, не змінить значення інтеграла ( $D_{\mu\nu}^0(k) = D_{\mu\nu}^0(-k)$ ).

Фізично, дві діаграми на рис. 7.2 можна трактувати таким чином. У першій діаграмі (анігілюючого типу) електрон  $p_1$  та позитрон  $p_2$  входять у точку  $x$ , анігілюють та утворюють віртуальний фотон  $k$  ( $k^2 = (p_1 + p_2)^2 > 0$ ), який у точці  $x'$  утворює електрон-позитронну пару з характеристиками  $p_3$  та  $p_4$ , відповідно. Доданок, що виражається цією діаграмою, описує знищення та народження частинок і є принципово релятивістським, у нерелятивістському наближенні він прямує до нуля.



**Рис. 7.2.** Зображення електрон-позитронного розсіяння. На першій діаграмі відбудеться процес схожий на  $e^-e^+$ -анігіляцію з подальшим утворенням нових  $e^-$  та  $e^+$ ; на другій — електрон та позитрон змінюють свої характеристики, обмінюючись фотоном.

На другій діаграмі (розсіючого типу) взаємодія відбувається принципово іншим чином: електрон  $p_1$  у точці  $x$  випромінює віртуальний фотон  $k$  ( $k^2 = (p_1 - p_3)^2 < 0$ ) і внаслідок цього змінює свої квантові числа й стає електроном  $p_3$ <sup>1</sup>. У точці  $x'$  віртуальний фотон  $k$  взаємодіє з позитроном  $p_2$ , внаслідок чого позитрон змінює свої квантові числа до  $p_4$ . Доданок, що виражається цією діаграмою, перейде в нерелятивістському наближенні в борнівську амплітуду резерфордівського розсіяння.

У (7.4) проведемо інтегрування за  $d^4k$  й остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \times \\
 &\quad \times [(\bar{v}_{-2} \gamma^\mu v_1)(\bar{v}_3 \gamma^\nu v_{-4}) D_{\mu\nu}^0(p_1 + p_2) - \\
 &\quad - (\bar{v}_3 \gamma^\mu v_1)(\bar{v}_{-2} \gamma^\nu v_{-4}) D_{\mu\nu}^0(p_3 - p_1)] = \\
 &= /(\text{2.46})/ = i e^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{(\bar{v}_{-2} \gamma^\mu v_1)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_{-4})}{(p_1 + p_2)^2} - \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_1)(\bar{v}_{-2} \gamma_\mu v_{-4})}{(p_3 - p_1)^2} \right]. \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

Підсумовуючи зазначимо, що в цьому випадку (на відміну від (6.2), (6.3)) 2! зникає зі знаменника (7) лише після розкриття вакуумного середнього. Однак це також пов'язано з невизначеністю входження взаємодіючих частинок у точки  $x$  та  $x'$ .

<sup>1</sup>Тут і далі слід розуміти, що окрім 4-імпульсів під час реакції можуть змінюватися також спіральності частинок.

Порівнюємо розрахунок  $e - e^+$ -анігіляції в попередньому розділі з щойно проведеним описом процесу  $e - e^+$ -розсіяння в другому порядку теорії збурень.

У першому випадку теорема Віка відразу давала два доданки, що відрізнялися лише заміною змінних підсумовування та інтегрування, і ми ще до взяття вакуумного середнього могли розглядати лише внесок одного доданка, помноженого на 2!. Цей доданок після взяття вакуумного середнього давав ще дві діаграми, що при фіксованих точках входження початкового електрона та позитрона відрізнялися точками виходу фотонів.

У випадку  $e - e^+$ -розсіяння теорема Віка давала лише один доданок, який після взяття вакуумного середнього давав чотири діаграми, що відображали всі фізично можливі варіанти розташування зовнішніх ліній. З рис. 7.1 видно, що дві з чотирьох діаграм відрізняються заміною змінних підсумовування та інтегрування, що як і у випадку  $e - e^+$ -анігіляції, дає множник 2! та дві діаграми, які легко передбачити. Справді, у даному процесі є дві лінії, що входять. Вони відповідають початковому електрону  $p_1$  та кінцевому позитрону  $p_4$ . Оскільки дві вхідні ферміонні лінії не можуть бути в одній точці, ми розміщуємо та фіксуємо їх у точках  $x$  та  $x'$ . Після фіксації точок  $x$  та  $x'$  залишається розставити лінії, що виходять (початковий позитрон  $p_2$  і кінцевий електрон  $p_3$ ). Існують два різних варіанти, які й представлені на перших двох діаграмах (рис. 7.1).

На відміну від випадку  $e - e^+$ -анігіляції, коли дві кінцеві діаграми, що відрізнялися точками виходу фотонів, входять з одним знаком у випадку, коли кінцевими продуктами є ферміони, їх перестановка призводить до виникнення знака "мінус" перед діаграмою.

Введемо означення **множника симетрії** діаграми як коефіцієнта, що стоїть поблизу  $(-ie)^n$  у виразі для цієї діаграми та задається внеском всіх відповідних доданків (тих, що відрізняються лише зміною німих індексів підсумовування та інтегрування) у розкладі за теоремою Віка  $n$ -го порядку  $S$ -матриці ще до взяття середнього за початковим та кінцевим станами.

Наприклад, для діаграми  $e - e$ -розсіяння в другому порядку теорії збурень він буде дорівнювати  $1/2!$  (див. (7)). А в процесі  $e - e^+$ -анігіляції він дорівнює одиниці (див. (6.2)).

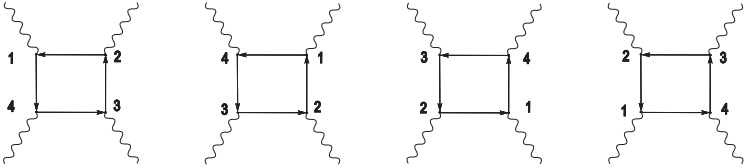
Оскільки множник симетрії знаходиться до взяття вакуумного середнього, то питання його знаходження зводиться до визначення кіль-

кості доданків з теореми Віка, що відповідають даній діаграмі. Якщо для діаграми  $n$ -го порядку таких доданків  $k$ , то їх внесок буде однаковим за рахунок зміни "німих" індексів інтегрування (підсумовування), а множник симетрії дорівнюватиме  $k/n!$ . Як вже зазначалося, множник симетрії майже завжди дорівнює одиниці за винятком деяких типів діаграм, частину з яких ми зараз розглянемо.

### Фотон-фотонне розсіяння

Розглянемо діаграму фотон-фотонного розсіяння  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma' + \gamma'$  в четвертому порядку теорії збурень і спробуємо знайти її множник симетрії.

Очевидно, існують  $4!$  варіанти розташування точок  $x^i$ . Однак, якщо раніше кожному з варіантів перестановки точок відповідав окремий доданок з теореми Віка, внесок кожного з яких був однаковим і, таким чином,  $n!$  у знаменнику зникав, то в даному випадку ситуація зміниться. Справа в тому, що для такого типу діаграм при циклічному зміщенні точок доданок у теоремі Віка не змінюється. Справді, діаграмам із циклічним розташуванням точок



відповідає лише один доданок з теореми Віка

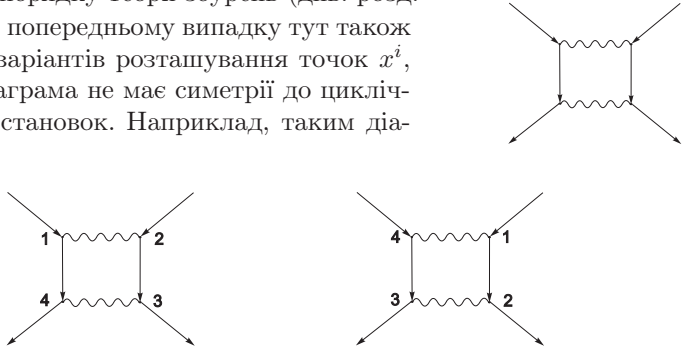
$$\hat{\Psi}^{(1)} \hat{\gamma}^\mu \hat{\Psi}^{(1)} \hat{A}_\mu^{(1)} \hat{\Psi}^{(2)} \hat{\gamma}^\nu \hat{\Psi}^{(2)} \hat{A}_\nu^{(2)} \hat{\Psi}^{(3)} \hat{\gamma}^\lambda \hat{\Psi}^{(3)} \hat{A}_\lambda^{(3)} \hat{\Psi}^{(4)} \hat{\gamma}^\sigma \hat{\Psi}^{(4)} \hat{A}_\sigma^{(4)} .$$

Оскільки будь-якій діаграмі можна зіставити 4 циклічно ідентичних, то загальна кількість доданків з теореми Віка буде в 4 рази меншою від кількості варіантів розташування точок  $x^i$ . Всі ці доданки будуть давати однаковий внесок, оскільки будуть відрізнятися лише заміною індексів підсумовування та інтегрування. Тоді індекс діаграми буде  $(4!/4)/4! = 1/4$ .

Зазначимо, що для аналогічної  $n$ -точкової діаграми, що утворює замкнену фігуру з  $n$  внутрішніх ферміонних ліній, множник симетрії діаграми буде дорівнювати  $1/n$ .

### Електрон-електронне розсіяння в четвертому порядку

Розглянемо тепер індекс однієї з декількох діаграм (зображена праворуч), що відповідають за електрон-електронне розсіяння в четвертому порядку теорії збурень (див. розд. 5). Як і в попередньому випадку тут також існує  $4!$  варіантів розташування точок  $x^i$ , однак діаграма не має симетрії до циклічних перестановок. Наприклад, таким діаграмам:



будуть відповідати наступні різні доданки з теореми Віка, відповідно:

$$\overbrace{\hat{\Psi}^{(1)}\gamma^\mu\hat{\Psi}^{(1)}\hat{\Psi}^{(2)}\gamma^\nu\hat{\Psi}^{(2)}\hat{\Psi}^{(3)}\gamma^\chi\hat{\Psi}^{(3)}\hat{\Psi}^{(4)}\gamma^\sigma\hat{\Psi}^{(4)}} \times \overbrace{\hat{A}_\mu^{(1)}\hat{A}_\nu^{(2)}\hat{A}_\chi^{(3)}\hat{A}_\sigma^{(4)}}, \quad (7.6)$$

$$\overbrace{\hat{\Psi}^{(1)}\gamma^\mu\hat{\Psi}^{(1)}\hat{\Psi}^{(2)}\gamma^\nu\hat{\Psi}^{(2)}\hat{\Psi}^{(3)}\gamma^\chi\hat{\Psi}^{(3)}\hat{\Psi}^{(4)}\gamma^\sigma\hat{\Psi}^{(4)}} \times \overbrace{\hat{A}_\mu^{(1)}\hat{A}_\nu^{(2)}\hat{A}_\chi^{(3)}\hat{A}_\sigma^{(4)}}. \quad (7.7)$$

Однак для такого типу діаграм існує симетрія щодо відображення відносно вертикальної осі, що проходить через середину рисунка. Наприклад, далі наведені діаграми мають спільну схему спарювання (7.6).



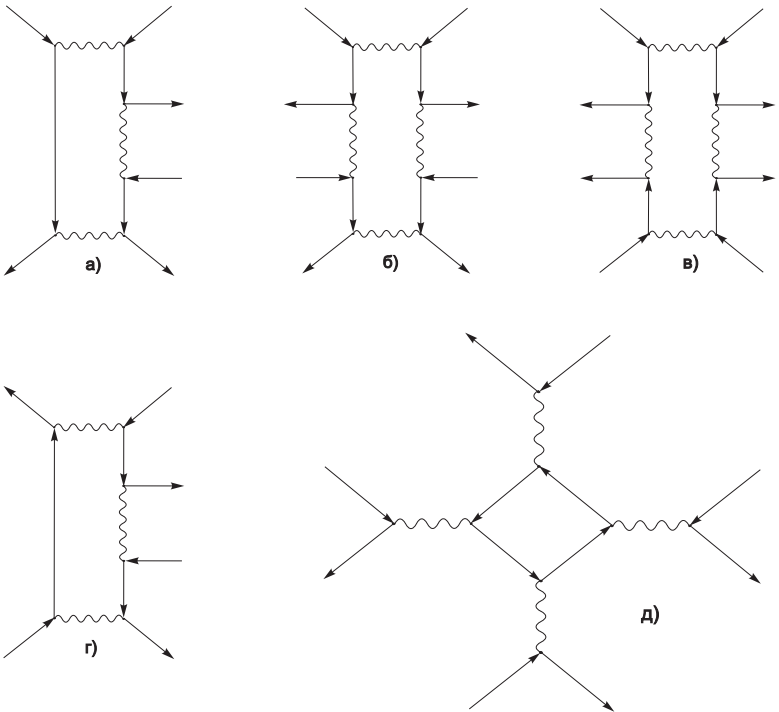
Оскільки будь-якій діаграмі можна зіставити дзеркальну, то загальна кількість доданків з теореми Віка буде в 2 рази меншою від кількості варіантів розташування точок  $x^i$ . Ці доданки будуть відрізнятися лише заміною індексів підсумовування та інтегрування, а отже, множник симетрії діаграми буде  $(4!/2)/4! = 1/2$ . Вираз для амплітуди можна отримати, використавши (7.6) та (5.4), (5.5):

$$\begin{aligned}
S_{fi, part}^{(4)} = & \frac{(-ie)^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_4 iD_{\mu\nu}^0(x_1 - x_2) iD_{\chi\sigma}^0(x_3 - x_4) \times \\
& \times \langle 0 | a_3 a_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi}^{(4)} \gamma^\sigma (-i) G(x_4 - x_1) \gamma^\mu \hat{\Psi}^{(1)} \times \right. \\
& \left. \times \hat{\Psi}^{(3)} \gamma^\chi (-i) G(x_3 - x_2) \gamma^\nu \hat{\Psi}^{(2)} \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle, \quad (7.8)
\end{aligned}$$

де позначення *part* (від англ. *partial* – частковий) означає, що для опису цього процесу в четвертому порядку теорії збурень ми взяли до розгляду лише один тип діаграм.

## Завдання

1. Отримайте формулу (7.3).
2. Зобразіть діаграми, що відповідають  $e - e$ -розсіянню в другому порядку теорії збурень (2.47). Порівняйте діаграми та вирази для  $e - e$  (2.47) та  $e - e^+$  (7.5) розсіяння. Знайдіть закономірності.
3. Отримайте формулу (7.8).
4. Переконайтеся, що множник симетрії діаграми для зображених процесів дорівнює: а) 1; б) 1/2; в) 1/4; г) 1/3; д) 1/4.



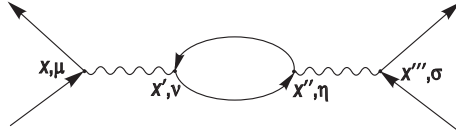


## РОЗДІЛ 8

### Ферміонні петлі. Теорема Фаррі

#### Ферміонні петлі

Розглянемо одну з діаграм четвертого порядку, що дає уточнення до електрон-електронного розсіяння та знайдемо на її прикладі вираз, який відповідатиме ферміонній петлі:



Згідно з теоремою Віка наведеній діаграмі відповідає вираз

$$S_{fi,part}^{(4)} = \frac{(-ie)^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' d^4x''' \times \quad (8.1)$$

$$\times \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}' \overbrace{\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}'' \hat{\Psi}'' \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \gamma^\sigma \hat{\Psi}''} \hat{\Psi}''' \right] \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \overbrace{\hat{A}_\mu \hat{A}'_\nu \hat{A}''_\eta \hat{A}'''_\sigma} | 0 \rangle,$$

де ми врахували, що хоча існує  $4!$  варіанти розстановок точок  $x, \dots, x'''$ , їм можна зіставити лише  $4!/2$  різних доданків з теореми Віка. Справді, діаграмам, що відрізняються дзеркальним відображенням відносно вертикальної осі по центру рисунка, відповідає один доданок з теореми Віка.

Розглянемо внутрішню частину, що відповідає петлі. Явно вкажемо внутрішні індекси підсумовування, що дозволить переставити множники в необхідному нам порядку згідно з (5.4), (5.5):

$$\begin{aligned} \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}' \overbrace{\hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}'' \hat{\Psi}'' \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \gamma^\sigma \hat{\Psi}''} \hat{\Psi}''' \right] &= -\hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu_{\alpha\beta} \overbrace{\hat{\Psi}' \gamma^\eta \hat{\Psi}'' \gamma^\sigma \hat{\Psi}''} \hat{\Psi}''' \right] = \\ &= -\hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}' \gamma^\nu_{\alpha\beta} (-i) G_{\beta\xi}(x' - x'') \gamma^\eta_{\xi\chi} (-i) G_{\chi\alpha}(x'' - x') \hat{\Psi}''' \gamma^\sigma \hat{\Psi}''' \right] = \\ &= -(-i)^2 \text{Tr} [\gamma^\nu G(x' - x'') \gamma^\eta G(x'' - x')] \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi}' \hat{\Psi}''' \gamma^\sigma \hat{\Psi}''' \right]. \quad (8.2) \end{aligned}$$

Отже, ферміонній петлі відповідає згортка  $\gamma$ -матриць та функцій Гріна. Множник  $(-1)$  завжди буде виникати в будь-якій замкненій ферміонній петлі, оскільки петлі завжди відповідатиме вираз, подібний до виразу (8.2) лише з більшою кількістю сусідніх спарених функцій, і ми завжди будемо переносити першу функцію до останньої з використанням (5.4), (5.5).

Більш точно, для математичного запису ферміонної петлі слід обрати будь-яку точку на петлі<sup>1</sup>, зіставити їй  $\gamma$ -матрицю і рухатись проти напрямку ферміонних ліній, поки не повернемося в початкову точку. Ферміонним лініям слід зіставити функції Гріна з множником  $(-i)$ , точкам —  $\gamma$ -матриці. Кінцевий вираз для петлі слід взяти під знак згортки та помножити на мінус одиницю.

З урахуванням (8.2) ферміонна частина виразу (8.1):

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}'' \gamma^\eta \hat{\Psi}''' \gamma^\sigma \hat{\Psi}'''' \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle = \quad (8.3) \\ & = -(-i)^2 \text{Tr}[\gamma^\nu G(x' - x'') \gamma^\eta G(x'' - x')] \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}''' \gamma^\sigma \hat{\Psi}'''' \right] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | 0 \rangle \end{aligned}$$

містить той самий вираз під знаком вакуумного усереднення, що й у процесі  $e - e$ -розсіяння в другому порядку теорії збурень (2.22).

Використавши (2.22), (8.1), (8.3), отримаємо

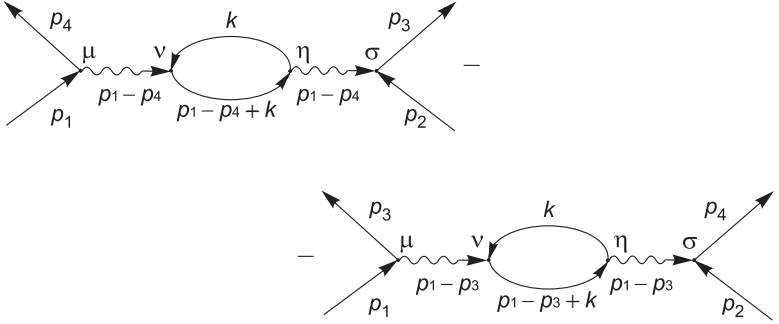
$$\begin{aligned} S_{fi}^{(4)} &= \frac{(-ie)^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' d^4x''' d_{\mu\nu}^0(x-x') \cdot i D_{\eta\sigma}^0(x''-x''') \times \\ & \quad \times (-1)(-i)^2 \text{Tr}[\gamma^\nu G(x' - x'') \gamma^\eta G(x'' - x')] \times \\ & \quad \times \left[ -(\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_3''' \gamma^\sigma \psi_1''') + (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_4''' \gamma^\sigma \psi_1''') - \right. \\ & \quad \left. - (\bar{\psi}_4''' \gamma^\sigma \psi_2''') (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) + (\bar{\psi}_3''' \gamma^\sigma \psi_2''') (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) \right]. \quad (8.4) \end{aligned}$$

Можна показати, що внески двох останніх рядків є однаковими, тоді

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(4)} &= (-ie)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' d^4x''' D_{\mu\nu}^0(x-x') D_{\eta\sigma}^0(x''-x''') \times \\ & \quad \times (-1) \text{Tr}[\gamma^\nu G(x' - x'') \gamma^\eta G(x'' - x')] \times \\ & \quad \times \left[ (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_4''' \gamma^\sigma \psi_1''') - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}_3''' \gamma^\sigma \psi_1''') \right]. \quad (8.5) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Під знаком згортки матриці можна циклічно переставляти.

При переході в імпульсний простір зафіксуємо вхідні лінії  $p_1, p_2$  та отримаємо два варіанти розстановки зовнішніх ліній  $p_3, p_4$ , що будуть відрізнятися знаком. При розстановці імпульсів на петлі виникає невизначений, довільний імпульс  $k$ . Тобто при переході від координатного до імпульсного представлення не всі інтеграли беруться завдяки наявності дельта-функцій у вершинах і в даному випадку, залишається інтеграл за  $k$ . Тоді згідно з наведеними нижче діаграмами



та з урахуванням (2.46), (4.14) отримаємо

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(4)} &= (-ie)^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \\
 &\times \left\{ \frac{\bar{v}_4 \gamma^\mu v_1 (-g_{\mu\nu})}{(p_4 - p_1)^2} (-1) \text{Tr} \left[ \gamma^\nu \frac{m + \not{k}}{m^2 - k^2} \gamma^\eta \frac{m + \not{p}_1 - \not{p}_4 + \not{k}}{m^2 - (p_1 - p_4 + k)^2} \right] \frac{\bar{v}_3 \gamma^\sigma v_2 (-g_{\sigma\eta})}{(p_4 - p_1)^2} - \right. \\
 &- \left. \frac{\bar{v}_3 \gamma^\mu v_1 (-g_{\mu\nu})}{(p_3 - p_1)^2} (-1) \text{Tr} \left[ \gamma^\nu \frac{m + \not{k}}{m^2 - k^2} \gamma^\eta \frac{m + \not{p}_1 - \not{p}_3 + \not{k}}{m^2 - (p_1 - p_3 + k)^2} \right] \frac{\bar{v}_4 \gamma^\sigma v_2 (-g_{\sigma\eta})}{(p_3 - p_1)^2} \right\} = \\
 &= -e^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left\{ \frac{\bar{v}_4 \gamma_\nu v_1}{(p_4 - p_1)^2} \text{Tr} \left[ \gamma^\nu \frac{m + \not{k}}{m^2 - k^2} \gamma^\eta \frac{m + \not{p}_1 - \not{p}_4 + \not{k}}{m^2 - (p_1 - p_4 + k)^2} \right] \frac{\bar{v}_3 \gamma_\eta v_2}{(p_4 - p_1)^2} - \right. \\
 &- \left. \frac{\bar{v}_3 \gamma_\nu v_1}{(p_3 - p_1)^2} \text{Tr} \left[ \gamma^\nu \frac{m + \not{k}}{m^2 - k^2} \gamma^\eta \frac{m + \not{p}_1 - \not{p}_3 + \not{k}}{m^2 - (p_1 - p_3 + k)^2} \right] \frac{\bar{v}_4 \gamma_\eta v_2}{(p_3 - p_1)^2} \right\}. \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

### Теорема Фаррі

Теорема Фаррі стверджує, що у квантовій електродинаміці при розгляді різних процесів не треба враховувати внесок діаграм із замкненими ферміонними петлями, що містять непарну кількість ферміонних ліній.

Безпосередній розрахунок таких діаграм виходить за межі даного курсу, однак із загальних міркувань можна показати, що теорема справедлива. Розглянемо, наприклад,  $N$ -вершинну ферміонну петлю із зовнішніми реальними або віртуальними фотонами. Фактично, дана діаграма описує перетворення фотонів, що входять, у ті, що виходять. Якщо число  $N$  непарне, то парна кількість фотонів перетворюється на непарну, або навпаки. Фотони є зарядово непарними, а отже, закон збереження зарядової парності забороняє такі процеси.

Математично, вищенаведені міркування можна представити таким чином. Внесок від ферміонної петлі задається виразом, що пропорційний згортці

$$F_N = \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} G(p_1) \gamma^{\mu_2} G(p_2) \dots \gamma^{\mu_N} G(p_N)]. \quad (8.7)$$

Замінімо кожен із множників на  $\gamma^\mu \rightarrow U_C^{-1} \gamma^\mu U_C$ ,  $G(p) \rightarrow U_C^{-1} G(p) U_C$ , де  $U_C$  – матричний оператор зарядового спряження (Д5.1.34). Значення (8.7), очевидно, при цьому не зміниться. З іншого боку,

$$U_C^{-1} \gamma^\mu U_C = -(\gamma^\mu)^T, \quad U_C^{-1} G(p) U_C = \frac{m - p_\nu (\gamma^\nu)^T}{m^2 - p^2} = G^T(-p). \quad (8.8)$$

Тоді

$$\begin{aligned} F_N &= (-1)^N \text{Tr} [(\gamma^{\mu_1})^T G^T(-p_1) (\gamma^{\mu_2})^T G^T(-p_2) \dots (\gamma^{\mu_N})^T G^T(-p_N)] = \\ &= (-1)^N \text{Tr} \left[ (G(-p_N) \gamma^{\mu_N} G(-p_{N-1}) \dots \gamma^{\mu_2} G(-p_1) \gamma^{\mu_1})^T \right] = \\ &= (-1)^N \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} G(-p_N) \gamma^{\mu_N} G(-p_{N-1}) \dots \gamma^{\mu_2} G(-p_1)]. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Остання згортка відповідає петлі, в якій напрямок ферміонних ліній змінено на протилежний. Значення виразу при цьому не має змінитися. Отже,  $F_N = (-1)^N F_N$ , тобто для непарної кількості точок  $N$  у ферміонній петлі  $F_N = 0$ .

З наведеного розгляду ферміонних петель також випливає, що для петель з парною кількістю ферміонних ліній внесок від петлі з одним

напрямок ферміонних ліній дорівнює внеску від петлі з протилежним напрямком ферміонних ліній. Продемонструємо це на прикладі петлі з трьох ферміонних ліній. Оберемо напрямок внутрішніх ліній в петлі проти годинникової стрілки (див. діаграму (а)). Даній петлі відповідає вираз (8.7)

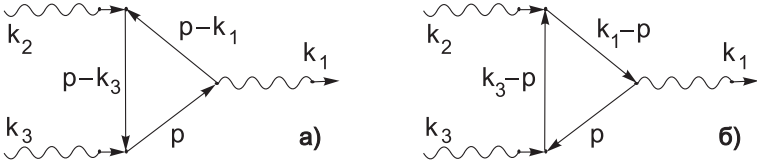
$$F_3 = \text{Tr}[\gamma^\mu G(p - k_3)\gamma^\chi G(p - k_1)\gamma^\nu G(p)]. \quad (8.10)$$

З іншого боку, згідно з (8.9) вираз для петлі можна записати у вигляді

$$F_3 = -\text{Tr}[\gamma^\mu G(-p)\gamma^\chi G(k_1 - p)\gamma^\nu G(k_3 - p)], \quad (8.11)$$

якому можна зіставити діаграму (б), де напрямок внутрішніх ліній у петлі змінено на протилежний.

Оскільки амплітуда представленого процесу отримується шляхом інтегрування за внутрішнім 4-імпульсом у межах  $-\infty < p < \infty$ , то заміною змінної інтегрування  $p \rightarrow -p$  отримуємо, що внесок від (8.10) дорівнює внеску від (8.11) з протилежним знаком. Отже, амплітуда процесу, зображеному на діаграмі (а) або (б), дорівнює нулю.



### Завдання

1. Покажіть, що внески останнього та передостаннього рядків у виразі (8.4) однакові.
2. На прикладі петлі з чотирьох ферміонних ліній покажіть незалежність амплітуди процесу від напрямку ліній у петлі.
3. Згідно з теоремою Фаррі процес розпаду одного фотона на два фотона є забороненим. Однак, розгляньте цей процес у третьому порядку теорії збурень, проведіть інтегрування за просторовими координатами та зведіть амплітуду процесу до інтеграла за 4-імпульсом.

## РОЗДІЛ 9

### Правила діаграмної техніки Фейнмана. Приклади для процесів четвертого порядку. Перехресна інваріантність

#### Правила діаграмної техніки Фейнмана

З розд. 5 видно, що теорема Віка дозволяє записати ряд теорії збурень для  $\hat{S}$ -матриці за допомогою діаграм. Підсумовуючи розд. 5 – 8, сформулюємо правила діаграмної техніки Фейнмана:

1. При розгляді конкретного процесу за допомогою теорії збурень необхідно взяти до розгляду лише ті діаграми (доданки з теореми Віка), в яких кількість ферміонних та фотонних зовнішніх ліній (неспарених операторних функцій) співпадає з відповідною сумарною кількістю початкових та кінцевих продуктів реакції. Діаграми із замкненими ферміонними петлями, що містять непарну кількість ферміонних ліній, враховувати не потрібно.
2. Знайти множник симетрії для кожної діаграми.
3. Безпосередньо провести усереднення за початковим та кінцевим станами системи від дозволених доданків з теореми Віка та завдяки цьому виписати діаграми з усіма дозволеними варіантами зіставлення початкових і кінцевих продуктів реакції зовнішнім лініям діаграм (виписати всі варіанти розгалуження діаграм).

Виконана процедура усереднення за початковим і кінцевим станами системи забезпечує правильну розстановку знаків між діаграмами та правильний напрямок ліній для кожної з діаграм. При цьому автоматично мають виконуватися такі правила.

- Кожна з вершин діаграми має містити одну фотонну лінію (напрямок може бути довільним) та по одній ферміонній лінії, що входить та виходить з неї.
- Якщо одна діаграма отримується з іншої перестановкою двох зовнішніх фотонних ліній, то її знак не змінюється.

- Якщо одна діаграма отримується з іншої перестановкою двох зовнішніх ферміонних ліній, з'являється множник  $(-1)$ .
  - Напрямки зовнішніх ліній мають відповідати процесу, що розглядається. Напрямки внутрішніх фотонних ліній можуть бути обрані довільним чином. Напрямок ліній у ферміонній петлі можна обрати довільним чином.
4. Для зовнішніх ліній кожної діаграми треба проставити значення 4-імпульсів та поляризації (спіральності) відповідних продуктів реакції. Слід проставити довільні різні позначення для 4-імпульсів кожної внутрішньої лінії діаграми. За ними далі буде проводитися інтегрування. У кожній вершині слід довільним чином поставити літеру. За ними далі буде вестися підсумовування. Літери у вершинах не мають повторюватися.
  5. Кожній діаграмі слід зіставити математичну формулу для середнього від  $S$ -матриці. Кожній лінії та точці (вершині) на діаграмі зіставляється її математичний еквівалент за наведеними далі правилами. Слід розпочинати із зовнішньої ферміонної лінії, що виходить, і рухатись по ферміонних лініях проти їх напрямку, включаючи внески від вершин. Результат слід домножити на внутрішні фотонні лінії в діаграмі, ферміонні петлі, зовнішні фотонні лінії та підсумувати за індексами, що повторюються.

Правила відповідності:

для зовнішньої електронної лінії<sup>1</sup>, що виходить з точки  $\lambda$   
(електрон з 4-імпульсом  $p_1$  та спіральністю  $\mu_1$  виходить з точки  $\lambda$ )

$$\lambda \bullet \xrightarrow{(p_1, \mu_1)} \bar{v}_{p_1}^{\mu_1};$$

для зовнішньої позитронної лінії, що виходить з точки  $\lambda$   
(позитрон з 4-імпульсом  $p_1$  та спіральністю  $\mu_1$  входить у точку  $\lambda$ )

$$\lambda \bullet \xrightarrow{(-p_1, \mu_1)} \bar{v}_{-p_1}^{\mu_1};$$

---

<sup>1</sup>В літературі зустрічається протилежний варіант вибору напрямку стрілок в ферміонних лініях. При цьому, фізично, такі діаграми будуть описувати розповсюдження по лініям не електронів, а позитронів.

для зовнішньої електронної лінії, що входить у точку  $\lambda$   
(електрон з 4-імпульсом  $p_1$  та спіральністю  $\mu_1$  входить у точку  $\lambda$ )

$$\begin{array}{c} (\rho_1, \mu_1) \\ \longrightarrow \bullet \lambda \end{array} \quad v_{p_1}^{\mu_1};$$

для зовнішньої позитронної лінії, що входить у точку  $\lambda$   
(позитрон з 4-імпульсом  $p_1$  та спіральністю  $\mu_1$  виходить з точки  $\lambda$ )

$$\begin{array}{c} (-\rho_1, \mu_1) \\ \longrightarrow \bullet \lambda \end{array} \quad v_{-p_1}^{\mu_1};$$

для зовнішньої фотонної лінії, що виходить з точки  $\eta$   
(фотон з 4-імпульсом  $k_1$  та поляризацією  $\lambda_1$  виходить з точки  $\eta$   
( $\eta$  відповідає номеру компоненти 4-вектора))

$$\begin{array}{c} (k_1, \lambda_1) \\ \bullet \rightsquigarrow \end{array} \quad \epsilon_{\eta}^{*\lambda_1}(\vec{k}_1);$$

для зовнішньої фотонної лінії, що входить у точку  $\eta$   
(фотон з 4-імпульсом  $k_1$  та поляризацією  $\lambda_1$  входить у точку  $\eta$   
( $\eta$  відповідає номеру компоненти 4-вектора))

$$\begin{array}{c} (k_1, \lambda_1) \\ \rightsquigarrow \bullet \eta \end{array} \quad \epsilon_{\eta}^{\lambda_1}(\vec{k}_1);$$

для внутрішньої ферміонної лінії (віртуальний ферміон)

$$\begin{array}{c} p \\ \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \quad -iG(p) \int d^4 p;$$

для внутрішньої фотонної лінії (віртуальний фотон)

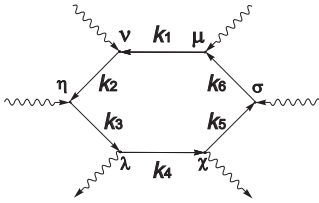
$$\begin{array}{c} k \\ \bullet \rightsquigarrow \bullet v \end{array} \quad iD_{\mu\nu}^0(k) \int d^4 k;$$

для вершини (без урахування ферміонних та фотонних ліній)

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \swarrow \\ \mu \\ \swarrow \quad \searrow \\ p_2 \quad \bullet \rightsquigarrow \quad k \end{array} \quad (-ie)\gamma^{\mu}\delta(p_1 + k - p_2);$$



для ферміонної петлі: для прикладу петлі з 6 вершин, без внеску фотонних ліній, відповідає



$$\begin{aligned}
 & -(-ie)^6 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_2 \dots \times \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_6 \\
 & \times \text{Tr} [\gamma^\mu (-i)G(k_6) \gamma^\sigma (-i)G(k_5) \gamma^\chi \times \\
 & \quad \times (-i)G(k_4) \gamma^\lambda (-i)G(k_3) \gamma^\eta \times \\
 & \quad \times (-i)G(k_2) \gamma^\nu (-i)G(k_1)],
 \end{aligned}$$

де ми для спрощення запису опустили  $\delta$ -функції в кожній із вершин (див. детальніше розд. 8)

6. Кінцевий результат для кожної з діаграм слід помножити на

$$\eta C \cdot \frac{(2\pi)^{4(n-k)}}{(\sqrt{2V})^{N_i+N_f} \prod_{\alpha=1}^{N_i} \sqrt{\varepsilon_\alpha} \prod_{\beta=1}^{N_f} \sqrt{\varepsilon_\beta}}, \quad (9.1)$$

де  $N_i$  – кількість початкових продуктів реакції,  $N_f$  – кількість кінцевих продуктів; індекс  $\alpha$  відповідає початковим продуктам реакції, індекс  $\beta$  – кінцевим;  $n$  – кількість вершин у діаграмі,  $k$  – кількість внутрішніх ліній,  $\eta$  – множник симетрії,  $C$  – коефіцієнт діаграми. У результаті інтегрування за віртуальними 4-імпульсами обов'язково має виникнути дельта-функція, що виражає закон збереження 4-імпульсу реакції в цілому.

Поява індексу діаграми  $C$  пов'язана з тим, що серед діаграм розгалуження, отриманих в п. 3, можуть бути діаграми, що відрізняються лише заміною німих індексів підсумовування та інтегрування. Внесок від них буде однаковим. У результаті певний фізичний процес можна описати за допомогою меншої кількості діаграм, але з іншими коефіцієнтами. Коефіцієнт діаграми можна не вводити (вважати  $C = 1$ ), якщо безпосередньо враховувати внески всіх розгалужень діаграм.

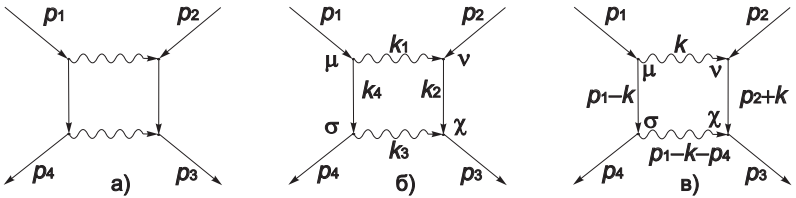
7. Як альтернативний варіант, замість проведення інтегрування за всіма внутрішніми лініями, можна проставити 4-імпульси для кожної внутрішньої лінії діаграми згідно із законом збереження енергії-імпульсу в кожній вершині (цим буде враховано інтегрування за дельта-функціями у вершинах), а лише за тими

4-імпульсами, які не можна визначити, слід провести інтегрування. У цьому випадку кінцевий результат необхідно також, окрім множника (9.1), додатково помножити на дельта-функцію  $\delta\left(\sum_{\beta=1}^{N_f} p_{f\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N_i} p_{i\alpha}\right)$ , аргумент якої визначається законом збереження енергії-імпульсу реакції в цілому.

8. Середнє від  $S$ -матриці є сумою середніх від  $S$ -матриці в усіх порядках теорії збурень.

Отже, правила відповідності дозволяють за заданими діаграмами швидко відновити формулу для амплітуди процесу з точністю до загального знака амплітуди. Для кращого розуміння діаграмної техніки Фейнмана ми продемонструємо її застосування двома подальшими прикладами.

**Приклад 1** Знайти амплітуду процесу представленого діаграмою а):



*Перший спосіб.* Розглянемо спочатку більш громіздкий спосіб для кращого розуміння діаграмної техніки.

Отже, згідно з наведеними вище п. 3 – 4 проставимо індекси в кожній вершині та позначимо довільним чином 4-імпульси для кожної внутрішньої лінії (див. діаграму (б)). Тоді згідно з п. 5 та 6 отримаємо матричний елемент переходу

$$\begin{aligned}
 S_{fi, part}^{(4)} = & (-ie)^4 \cdot \frac{C}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{4(4-4)}}{(\sqrt{2V})^4 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_3 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k_4 \times \\
 & \times \bar{v}_4 \gamma^\sigma (-i) G(k_4) \gamma^\mu v_1 \cdot \bar{v}_3 \gamma^\chi (-i) G(k_2) \gamma^\nu v_2 \cdot i D_{\mu\nu}^0(k_1) \cdot i D_{\sigma\chi}^0(k_3) \times \\
 & \times \delta(p_1 - k_1 - k_4) \cdot \delta(k_4 - p_4 - k_3) \cdot \delta(p_3 - k_3 - k_2) \cdot \delta(k_2 - k_1 - p_2),
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

де ми врахували, що множник симетрії цієї діаграми  $\eta = 1/2$  (див. розд. 7).

*Другий спосіб.* Запишемо результат без використання інтегрування за дельта-функціями. Для початку зазначимо, що ця діаграма має 4 внутрішні лінії та 4 точки, тобто 4 дельта-функції. Одна дельта-функція забезпечить виконання закону збереження енергії-імпульсу реакції в цілому, тобто залишаться три дельта-функції (три рівняння) для визначення чотирьох імпульсів, що відповідають внутрішнім лініям. Тобто не вистачає одного рівняння для однозначного визначення 4-імпульсів внутрішніх ліній. Тому 4-імпульс однієї з внутрішніх ліній довільно позначимо як  $k$ , після чого легко знаходимо інші 4-імпульси згідно із законом збереження енергії-імпульсу в кожній точці (див. діаграму (в)). Тоді згідно п. 7 проведемо інтегрування за  $k$  та отримаємо

$$S_{fi, part}^{(4)} = (-ie)^4 \cdot \frac{C}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{4(4-4)} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(\sqrt{2V})^4 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \times \\ \bar{v}_4 \gamma^\sigma (-i) G(p_1 - k) \gamma^\mu v_1 \cdot \bar{v}_3 \gamma^\chi (-i) G(p_2 + k) \gamma^\nu v_2 \cdot i D_{\mu\nu}^0(k) \cdot i D_{\sigma\chi}^0(p_1 - k - p_4). \quad (9.3)$$

Як у формулі (9.2), так і в (9.3) невизначеним залишився коефіцієнт діаграми  $C$  та її знак. Проілюструємо процедуру їх знаходження на другому прикладі.

**Приклад 2.** Розглянемо детально процес фотон-фотонного розсіяння в четвертому порядку теорії збурень. У розд. 7 ми знайшли множник симетрії цього процесу,  $\eta = 1/4$ . Тепер будемо знаходити всі варіанти розгалуження та коефіцієнти діаграм. Отже, вираз для амплітуди фотон-фотонного розсіяння в четвертому порядку має вигляд:

$$S_{fi}^{(4)} = \frac{(-ie)^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \times \\ \times \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu^{(1)} \hat{A}_\nu^{(2)} \hat{A}_\chi^{(3)} \hat{A}_\sigma^{(4)} \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle T^{\mu\nu\chi\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (9.4)$$

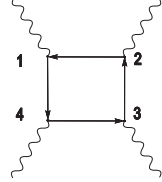
де тезор  $T^{\mu\nu\chi\sigma}$  відповідає виразу для петлі з 4-х ферміонних ліній і згідно з правилами діаграмної техніки Фейнмана дорівнює

$$T^{\mu\nu\chi\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overbrace{\hat{\Psi}^{(1)}\gamma^\mu\hat{\Psi}^{(1)}\hat{\Psi}^{(2)}\gamma^\nu\hat{\Psi}^{(2)}\hat{\Psi}^{(3)}\gamma^\chi\hat{\Psi}^{(3)}\hat{\Psi}^{(4)}\gamma^\sigma\hat{\Psi}^{(4)}} =$$

$$= -(i)^4 Tr [\gamma^\mu G(x_1 - x_2)\gamma^\nu G(x_2 - x_3)\gamma^\chi G(x_3 - x_4)\gamma^\sigma G(x_4 - x_1)] \quad (9.5)$$

для діаграми, що зображена праворуч.

Розглянемо вакуумне середнє,  
щоб коректно розставити зовнішні  
лінії:



$$\langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{A}_\mu^{(1)} \hat{A}_\nu^{(2)} \hat{A}_\chi^{(3)} \hat{A}_\sigma^{(4)} \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \left( \hat{c}_\alpha \varphi_\mu^\alpha(x_1) + \hat{c}_\alpha^+ \varphi_\mu^{*\alpha}(x_1) \right) \left( \hat{c}_\beta \varphi_\nu^\beta(x_2) + \hat{c}_\beta^+ \varphi_\nu^{*\beta}(x_2) \right) \times \right.$$

$$\times \left. \left( \hat{c}_\eta \varphi_\chi^\eta(x_3) + \hat{c}_\eta^+ \varphi_\chi^{*\eta}(x_3) \right) \left( \hat{c}_\xi \varphi_\sigma^\xi(x_4) + \hat{c}_\xi^+ \varphi_\sigma^{*\xi}(x_4) \right) \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta \hat{c}_\eta^+ \hat{c}_\xi^+ \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^\alpha(x_1) \varphi_\nu^\beta(x_2) \varphi_\chi^\eta(x_3) \varphi_\sigma^{*\xi}(x_4) +$$

$$+ \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_\eta \hat{c}_\xi \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{\alpha*}(x_1) \varphi_\nu^{\beta*}(x_2) \varphi_\chi^\eta(x_3) \varphi_\sigma^{*\xi}(x_4) +$$

$$+ \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_\eta \hat{c}_\xi \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^\alpha(x_1) \varphi_\nu^{\beta*}(x_2) \varphi_\chi^{*\eta}(x_3) \varphi_\sigma^\xi(x_4) +$$

$$+ \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta \hat{c}_\eta^+ \hat{c}_\xi^+ \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{\alpha*}(x_1) \varphi_\nu^\beta(x_2) \varphi_\chi^\eta(x_3) \varphi_\sigma^{*\xi}(x_4) +$$

$$+ \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta \hat{c}_\eta \hat{c}_\xi \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{\alpha*}(x_1) \varphi_\nu^{\beta*}(x_2) \varphi_\chi^{*\eta}(x_3) \varphi_\sigma^\xi(x_4) +$$

$$+ \langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\beta^+ \hat{c}_\eta \hat{c}_\xi \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle \varphi_\mu^{\alpha*}(x_1) \varphi_\nu^{\beta*}(x_2) \varphi_\chi^\eta(x_3) \varphi_\sigma^\xi(x_4). \quad (9.6)$$

Можна показати, що кожен із цих доданків дає чотири очевидних варіанти розташування зовнішніх ліній, наприклад:

$$\langle 0 | \hat{c}_3 \hat{c}_4 \hat{N} \left[ \hat{c}_\alpha \hat{c}_\beta \hat{c}_\eta^+ \hat{c}_\xi^+ \right] \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ | 0 \rangle = (\delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 2} + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 1}) (\delta_{\eta 3} \delta_{\xi 4} + \delta_{\eta 4} \delta_{\xi 3}).$$

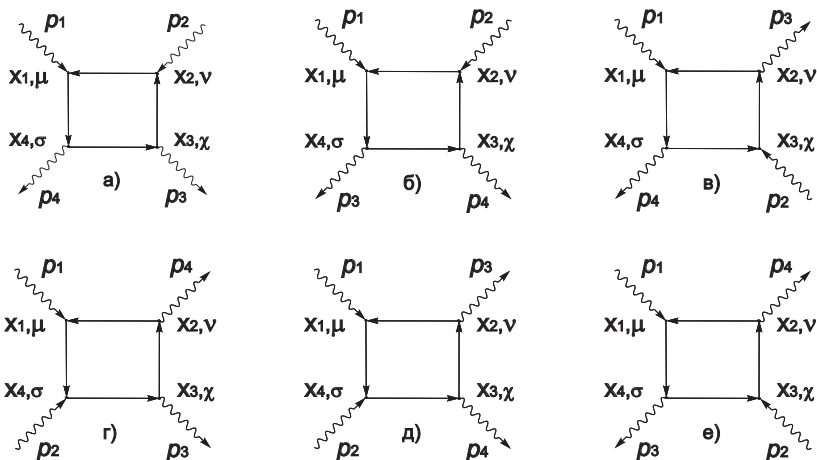
Таким чином, вакуумне середнє дає всі можливі 4! варіанти розташування зовнішніх ліній.

Враховуючи на те, що  $T^{\mu\nu\chi\sigma}$  являє собою добуток матриць, які можна циклічно переставляти під знаком  $Tr$ , з 24 доданків у (9.6) можна залишити лише шість, а весь вираз помножити на чотири. Справа в тому, що доданки, які відрізняються циклічною перестановкою зовнішніх ліній, дають однаковий внесок (див. Додаток до

розділу на сторінці 108), тоді

$$S_{fi}^{(4)} = (-ie)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 T^{\mu\nu\chi\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \\ \times [\varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^2(x_2) \varphi_\chi^{*3}(x_3) \varphi_\sigma^{*4}(x_4) + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^2(x_2) \varphi_\chi^4(x_3) \varphi_\sigma^{*3}(x_4) + \\ + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^{*3}(x_2) \varphi_\chi^2(x_3) \varphi_\sigma^{*4}(x_4) + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^4(x_2) \varphi_\chi^{*3}(x_3) \varphi_\sigma^2(x_4) + \\ + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^{*3}(x_2) \varphi_\chi^4(x_3) \varphi_\sigma^2(x_4) + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^4(x_2) \varphi_\chi^2(x_3) \varphi_\sigma^{*3}(x_4)], \quad (9.7)$$

що відповідає нижченаведеним шістьом діаграмам з коефіцієнтами  $C = 4$ :

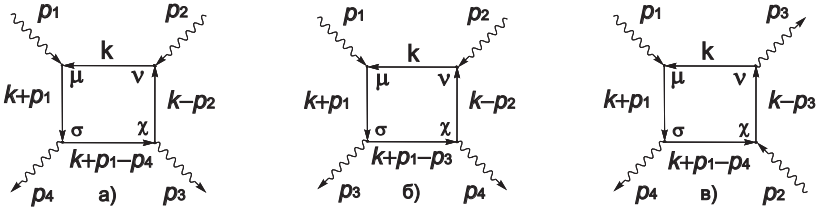


Із наведених графічних зображень легко побачити, що діаграми (а, б, в) відрізняються від діаграм (г, д, е) дзеркальним відображенням відносно осі, що проходить через верхню ліву та нижню праву вершини відповідної діаграми та зміною напрямків внутрішніх ліній. Отже, їх внесок має бути однаковим. Тоді, процес фотон-фотонного розсіяння може бути описаний лише за допомогою трьох діаграм (наприклад тих, що зображені у верхньому ряду) з коефіцієнтами  $C = 8$ , чому буде відповідати наступний вираз для середнього  $\hat{S}$ -матриці:

$$S_{fi}^{(4)} = -2e^4 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 \times$$

$$\begin{aligned} & \times Tr [\gamma^\mu G(x_1 - x_2) \gamma^\nu G(x_2 - x_3) \gamma^\chi G(x_3 - x_4) \gamma^\sigma G(x_4 - x_1)] \times \\ & \times [\varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^2(x_2) \varphi_\chi^{*3}(x_3) \varphi_\sigma^{*4}(x_4) + \\ & + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^2(x_2) \varphi_\chi^{*4}(x_3) \varphi_\sigma^{*3}(x_4) + \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^{*3}(x_2) \varphi_\chi^2(x_3) \varphi_\sigma^{*4}(x_4)]. \quad (9.8) \end{aligned}$$

Для переходу до імпульсного простору необхідно проставити внутрішні імпульси на діаграмах (а, б, в), як зображено далі, та врахувати (2.7), (4.14):



$$\begin{aligned} S_{fi}^{(4)} &= -2e^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \times \\ & \times \left\{ \frac{Tr [\not{\epsilon}^{\lambda_1}(m+k) \not{\epsilon}^{\lambda_2}(m+k-p_2) \not{\epsilon}^{*\lambda_3}(m+k+p_1-p_4) \not{\epsilon}^{*\lambda_4}(m+k+p_1)]}{(m^2-k^2)(m^2-(k-p_2)^2)(m^2-(k+p_1-p_4)^2)(m^2-(k+p_1)^2)} + \right. \\ & + \frac{Tr [\not{\epsilon}^{\lambda_1}(m+k) \not{\epsilon}^{\lambda_2}(m+k-p_2) \not{\epsilon}^{*\lambda_4}(m+k+p_1-p_3) \not{\epsilon}^{*\lambda_3}(m+k+p_1)]}{(m^2-k^2)(m^2-(k-p_2)^2)(m^2-(k+p_1-p_3)^2)(m^2-(k+p_1)^2)} + \\ & \left. + \frac{Tr [\not{\epsilon}^{\lambda_1}(m+k) \not{\epsilon}^{*\lambda_3}(m+k-p_3) \not{\epsilon}^{\lambda_2}(m+k+p_1-p_4) \not{\epsilon}^{*\lambda_4}(m+k+p_1)]}{(m^2-k^2)(m^2-(k-p_3)^2)(m^2-(k+p_1-p_4)^2)(m^2-(k+p_1)^2)} \right\}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} & T^{\mu\nu\chi\sigma}(p_2, p_1, p_4) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{Tr [\gamma^\mu(m+k) \gamma^\nu(m+k-p_2) \gamma^\chi(m+k+p_1-p_4) \gamma^\sigma(m+k+p_1)]}{(m^2-k^2)(m^2-(k-p_2)^2)(m^2-(k+p_1-p_4)^2)(m^2-(k+p_1)^2)}, \end{aligned}$$

вираз (9.9) запишеться як

$$S_{fi}^{(4)} = -2e^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \{ T^{\mu\nu\chi\sigma}(p_2, p_1, p_4) \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\nu^{\lambda_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\chi^{*\lambda_3}(\vec{p}_3) \epsilon_\sigma^{*\lambda_4}(\vec{p}_4) + \\ & + T^{\mu\nu\chi\sigma}(p_2, p_1, p_3) \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\nu^{\lambda_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\sigma^{*\lambda_3}(\vec{p}_3) \epsilon_\chi^{*\lambda_4}(\vec{p}_4) + \\ & + T^{\mu\nu\chi\sigma}(p_3, p_1, p_4) \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\chi^{\lambda_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\nu^{*\lambda_3}(\vec{p}_3) \epsilon_\sigma^{*\lambda_4}(\vec{p}_4) \}. \quad (9.10) \end{aligned}$$

Виділивши окремо частину, що характеризує початковий та кінцевий стани частинок, що розсіюються, можна ввести тензор фотон-фотонного розсіяння четвертого рангу  $J^{\mu\nu\chi\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ :

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(4)} &= -2e^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} e_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\nu^{\lambda_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\chi^{*\lambda_3}(\vec{p}_3) \epsilon_\sigma^{*\lambda_4}(\vec{p}_4) \times \\ & \times \{ T^{\mu\nu\chi\sigma}(p_2, p_1, p_4) + T^{\mu\nu\sigma\chi}(p_2, p_1, p_3) + T^{\mu\chi\nu\sigma}(p_3, p_1, p_4) \} = \\ & = -2e^4 \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} e_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1) \epsilon_\nu^{\lambda_2}(\vec{p}_2) \epsilon_\chi^{*\lambda_3}(\vec{p}_3) \epsilon_\sigma^{*\lambda_4}(\vec{p}_4) \times \\ & \times J^{\mu\nu\chi\sigma}(p_1, p_2, p_3, p_4). \quad (9.11) \end{aligned}$$

Розрахунок величини  $J^{\mu\nu\chi\sigma}$  потребує знання техніки обчислення інтегралів за 4-імпульсом та виходить за межі цього посібника.

Зазначимо, тензор фотон-фотонного розсіяння четвертого рангу  $J^{\mu\nu\chi\sigma}$  вводиться для зручності розрахунків та наочності отриманих результатів. Для знаходження  $S_{fi}^{(4)}$  ми могли б напяму скористатися виразами (9.4) та (9.6). У цьому випадку ми б отримали правильну кінцеву відповідь, витративши більше часу.

### Перехресна інваріантність

Аналізуючи правила діаграмної техніки Фейнмана можна побачити таку симетрію. Будь-якій зовнішній лінії, що входить у певну точку, може відповідати як частинка, що входить у цю точку, так і античастинка, що з неї виходить. І навпаки, кожній зовнішній лінії, що виходить з певної точки, може відповідати як частинка, що виходить, так і античастинка, що входить у цю точку.

Для заміни в певному процесі частинки на античастинку потрібно замінити на діаграмі позначення для лінії початкового стану цієї частинки з 4-імпульсом  $p$  та квантовим числом спіральності  $\mu$ , якій відповідає  $v_p^\mu$ , на позначення для кінцевого стану античастинки з  $-p$  та  $v_{-p}^\mu$ . А також замінити позначення для лінії кінцевого стану частинки з  $p'$ ,  $\mu'$  та  $\bar{v}_p^{\mu'}$ , на позначення для початкового стану античастинки

з  $-p'$  та  $\bar{v}_{-p'}$ . Якщо треба замінити античастинку на частинку, то необхідно зробити те саме, але навпаки. Потрібно змінювати лише позначення, напрямки ліній залишаються незмінними.

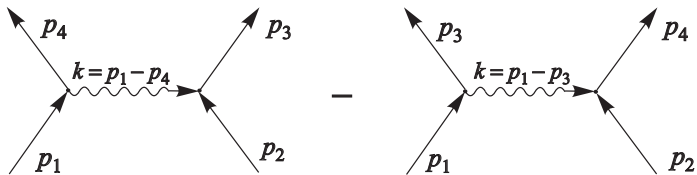
У випадку фотонів, чії античастинки і частинки співпадають, наведено вище залишається в силі, але початковий фотон з  $k$  та певною поляризацією, що входить, слід замінити на кінцевий фотон, що виходить з  $-k$  і має протилежну поляризацію. Справді, щоб замінити фотон (фотонну лінію), що входить у точку з 4-імпульсом  $k$ , на фотон (лінію), що виходить із точки з тим самим 4-імпульсом, слід замінити  $\epsilon_{\eta}^{\lambda}(\vec{k})$  на  $\epsilon_{\eta}^{*\lambda}(\vec{k})$ , а це еквівалентно заміні  $k \rightarrow -k$ ,  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , якщо не змінювати напрямку лінії.

Ця симетрія дозволяє легко знайти амплітуду процесу, що відповідає діаграмам за участю античастинок (частинок), якщо відома амплітуда процесу за участю частинок (античастинок). Потрібно зробити лише наведені вище перепозначення. При цьому ми фактично переходимо від одного перехресного каналу реакції до інших.

Дана властивість дає більше можливості ніж СРТ-теорема, згідно з якою амплітуда процесу не зміниться, якщо початковий стан замінити кінцевим та змінити всі частинки на античастинки. Справа в тому, що вказана властивість  $\hat{S}$ -матриці дозволяє не тільки глобально змінювати всі частинки на античастинки, але й робити це окремо для кожного з продуктів реакції.

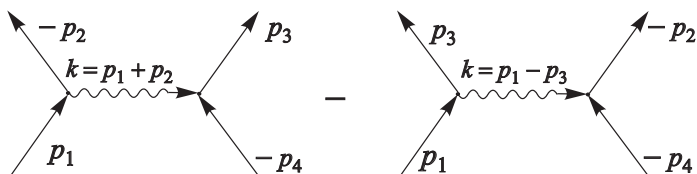
Для ілюстрації наведемо процеси  $e - e^-$  та  $e - e^+$ -розсіяння. У процесі  $e - e^-$ -розсіяння ми хочемо замінити початковий електрон  $p_2$  на позитрон, і кінцевий електрон  $p_4$  на позитрон.

Для  $e - e^-$ -розсіяння маємо (2.47):



Для  $e - e^+$ -розсіяння маємо (рис. 9.2 та (7.5)):



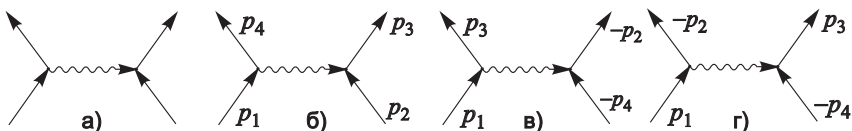


Як бачимо, процес  $e - e^+$ -розсіяння отримується з діаграм  $e - e^-$ -розсіяння шляхом заміни позначень  $p_2 \rightarrow -p_4$  та  $p_4 \rightarrow -p_2$ . Така сама заміна перетворює вирази для амплітуди розсіяння (2.47) на (7.5).

Оскільки в процесах з тотожними частинками знак амплітуди є довільним (див. розд. 2), то при порівнянні результатів для амплітуд процесів, отриманих згідно з діагратною технікою Фейнмана та наведеному вище механізмі переходу до процесів з античастинками (частинками), може виникнути зміна знака, що не є суттєвим.

### Просторово-часові діаграми Фейнмана

Як ми щойно мали змогу перекопатися, якщо діаграма подана без підписів та без пояснень, то не можна однозначно сказати, який процес вона представляє. Одну й ту саму діаграму можна трактувати по-різному. Наприклад, схематичній діаграмі (а) можна зіставити електрон-електронне, позитрон-позитронне та електрон-позитронне розсіяння.



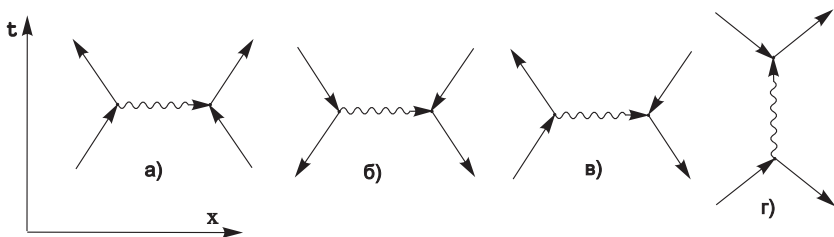
Для позбавлення неоднозначностей необхідно зробити підписи до ліній і спрямувати фотонні лінії в напрямку, що відповідає фізичному процесу<sup>1</sup>. Тоді, діаграми (б), (в) представлятимуть процеси  $e - e^-$  та  $e - e^+$ -розсіяння. У них зрозуміло, що є початковими, а що кінцевими продуктами реакції. Діаграма (г) представляє  $e - e^+$ -розсіяння шляхом анігіляції. Враховуючи напрямок внутрішньої фотонної лінії робимо висновок, що початковими станами є електронний стан  $p_1$  та позитронний стан  $p_2$ .

<sup>1</sup>Нагадуємо, напрямок внутрішніх фотонних ліній може бути довільно обраним.

Існує альтернативний метод представлення діаграм, так звані просторово-часові діаграми Фейнмана, що дозволяє уникнути неоднозначностей у їх трактуванні, не використовуючи підписи. Це ті самі діаграми, що ми до цього використовували, але розташовані в системі відліку, де вісь часу напрямлена вертикально вгору, а одна з просторових осей праворуч.

У таких позначеннях легко записати розвиток у часі фізичного процесу (слід рухатись уздовж часової осі). Частинці відповідає лінія (вектор), чия проекція на часову вісь додатна (частинка рухається в часі в додатному напрямку), а проекція на просторову вісь визначає просторовий напрямок руху частинки. Античастинці, як видно з розд. 6, відповідає лінія (вектор), чия проекція на часову вісь від'ємна (античастинка рухається в часі у від'ємному напрямку), а проекція на просторову вісь протилежна просторовому напрямку руху античастинки. Тоді нижченаведеним діаграмам відповідатимуть такі процеси: (а) – електрон-електронне розсіяння, (б) – позитрон-позитрон розсіяння, (в) – електрон-позитронне розсіяння шляхом обміну віртуальним фотоном, (г) – електрон-позитронне розсіяння шляхом анігіляції.

У цьому посібнику ми не будемо використовувати даний формалізм, оскільки завжди безпосередньо вказуємо, який саме процес розглядається.



### Розрахунок у вищих порядках теорії збурень. Загальне обговорення проблеми

Діаграмна техніка Фейнмана дозволяє записати амплітуду фізичного процесу в довільному порядку теорії збурень. До кінця 30-х років ХХ-го століття розрахунки окремих процесів проводилися лише в першому неznикаючому наближенні по теорії збурень, в так званому скелетному наближенні. Вважалося, що в наступних наближеннях

можна буде розраховувати процеси з довільною точністю. Однак, в 1937-1939 роках Фелікс Блох, Арнольд Нордчек та Віктор Вайскопф показали, що врахування наступних наближень (петльові поправки до внутрішніх фотонних та ферміонних ліній, поправки до вершини) призводить до появи нескінченних величин. Дану проблему було подолано лише в кінці 40-х років в роботах Ганса Бете, Річарда Фейнмана, Джуліана Швінгера, Синітіро Томонаги та Фрімена Дайсона, завдяки створенню теорії перенормування, що дозволяє виділити фізичні кінцеві поправки з нескінченних величин. Розгляд теорії перенормування виходить за межі цього посібника.

Припустимо тепер, що ми навчилися обчислювати кінцеві значення поправок у вищих порядках теорії збурень. Кожна така поправка до фізичного процесу з фіксованою кількістю початкових та кінцевих частинок зводиться до введення в діаграму процесу додаткової внутрішньої лінії (з двома точками). За рахунок цього її амплітуда змінюється в  $e^2$  разів (насправді, зручно проводити розклад по сталій тонкій структурі  $\alpha$ ). Амплітуда процесу буде представляти собою суму діаграм з усе більшою кількістю внутрішніх ліній і являтиме собою суми членів  $\sim \alpha^n$ . Оскільки наступні члени будуть меншими за попередні, то можна припустити, що доданки з вищими ступенями по константі  $\alpha$  можуть бути відкинуті. Саме завдяки цьому, розрахунки в скелетному наближенні дають гарну точність, зокрема теоретичний розрахунок магнітного моменту електрона узгоджується з експериментально відомим його значенням до десятого знаку після коми.

Потрібно додатково вказати на два моменти.

По-перше, в КЕД насправді утворюються не збіжні, а асимптотично збіжні ряди. Справа у тому, що зі збільшенням порядку теорії збурень дуже сильно ( $\sim n!$ ) збільшується кількість діаграм, що описують процес в  $n$ -тому порядку теорії збурень. Це перекриває ефект від малого множника  $\alpha^n$  і починаючи з деякого значення порядку теорії збурень (для КЕД це  $n \sim 1/\alpha \simeq 137$ ) ряд теорії збурень стає розбіжним. Прикладом є ряд  $\sum n! \alpha^n$ , який спочатку нібито збігається до певного значення, а потім сильно зростає. Особливістю асимптотичних рядів є те, що вони можуть забезпечити лише деяку кінцеву точність наближення, що залежить від  $n$ . Для таких рядів часткові суми з тим більшою точністю відповідають реальному значенню, чим менше значення параметру  $\alpha$ . В КЕД мале значення константи тонкої структури дозволяє проводити розрахунки по теорії збурень аж

до порядків  $n \sim \alpha^{-1}$  з надзвичайно високою точністю [7].

По-друге. Згідно теорії перенормування заряд електрона (константа тонкої структури) змінює своє значення при збільшенні енергії частинки в реакції, зокрема вона логарифмічно зростає, див., наприклад, [16]. Відповідно, при певних значеннях енергії константа зв'язку  $\alpha$  перестає бути достатньо малою. Зокрема при енергіях порядку 100 GeV значення константи тонкої структури стає  $\alpha^{-1} \simeq 128$ , що підтверджується в експериментах на сучасних прискорювачах. Константа тонкої структури буде порядку одиниці при масштабі енергій суттєво більших за планківський масштаб, коли вже повинна буде проявитися нова фізика.

### Додаток до розділу

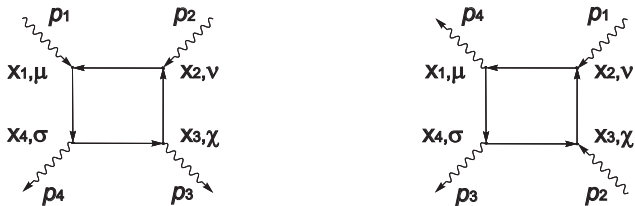
Покажемо, що доданки, які відрізняються циклічною перестановкою зовнішніх ліній, дають однаковий внесок. Розглянемо це твердження на прикладі двох доданків з (9.4):

$$\frac{(-ie)^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 T^{\mu\nu\chi\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4) \varphi_\mu^1(x_1) \varphi_\nu^2(x_2) \varphi_\chi^{*3}(x_3) \varphi_\sigma^{*4}(x_4) \quad (9.12)$$

та

$$\frac{(-ie)^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 T^{\mu\nu\chi\sigma}(x_1, x_2, x_3, x_4) \varphi_\mu^{*4}(x_1) \varphi_\nu^1(x_2) \varphi_\chi^2(x_3) \varphi_\sigma^{*3}(x_4), \quad (9.13)$$

що відрізняються циклічною перестановкою зовнішніх ліній і представлені діаграмами:



Використаємо (9.5) і зробимо в (9.13) заміну індексів підсумову-

вання

$$\begin{aligned}
 (9.13) = /\mu\nu\chi\sigma \rightarrow \sigma\mu\nu\chi/ &= -\frac{(-ie)^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 \times \\
 &\times Tr [\gamma^\sigma G(x_1 - x_2) \gamma^\mu G(x_2 - x_3) \gamma^\nu G(x_3 - x_4) \gamma^\chi G(x_4 - x_1)] \times \\
 &\times \varphi_\sigma^{*4}(x_1) \varphi_\mu^1(x_2) \varphi_\nu^2(x_3) \varphi_\chi^{*3}(x_4), \quad (9.14)
 \end{aligned}$$

циклічно переставивши матриці під знаком  $Tr$ :

$$\begin{aligned}
 (9.14) &= -\frac{(-ie)^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_4 \times \\
 &\times Tr [\gamma^\mu G(x_2 - x_3) \gamma^\nu G(x_3 - x_4) \gamma^\chi G(x_4 - x_1) \gamma^\sigma G(x_1 - x_2)] \times \\
 &\times \varphi_\mu^1(x_2) \varphi_\nu^2(x_3) \varphi_\chi^{*3}(x_4) \varphi_\sigma^{*4}(x_1). \quad (9.15)
 \end{aligned}$$

Проробивши заміну  $x_2, x_3, x_4, x_1 \rightarrow x_1, x_2, x_3, x_4$  переконуємося, що вираз (9.13) справді дорівнює виразу (9.12).

### Завдання

1. Покажіть, що з (9.2) випливає (9.3).
2. Покажіть, що внесок діаграм (а) та (г) на стор. 101 однаковий.
3. Продовжіть розгляд електрон-електронного розсіяння в четвертому порядку теорії збурень з розд. 7. Доведіть до інтеграла за віртуальним 4-імпульсом. Вкажіть, чому дорівнюють коефіцієнти відповідних діаграм.
4. Запишіть амплітуду процесу утворення  $e-e^+$ -пари при зіткненні двох фотонів за допомогою правил перехресної інваріантності.
5. Запишіть просторово-часові діаграми Фейнмана  $e-\gamma$ -розсіяння,  $e^+ - \gamma$ -розсіяння,  $e - e^+$ -анігіляції, гальмівного випромінювання електрона.

## РОЗДІЛ 10

### Процеси в зовнішніх полях

Квантова теорія поля за наявності зовнішніх полів є надзвичайно цікавою та великою темою, якій окремо присвячено багато книг. Вона здатна описати такі ефекти, як зміна структури вакууму (поляризація вакууму), народження частинок з вакууму, поява бозонної конденсації, спонтанне порушення або відновлення симетрії та ін. Безумовно, наявність зовнішнього поля впливає також на перебіг реакцій та розпадів частинок.

Як приклад розглянемо декілька найпростіших процесів у КЕД за наявності зовнішніх електромагнітних класичних полів у нижчих порядках теорії збурень і подивимось, як при цьому модифікуються правила діаграмної техніки Фейнмана.

#### Зовнішні класичні та квантовані поля

Для початку розглянемо умови, за яких квантоване електромагнітне поле можна розглядати як класичне.

Квантоване електромагнітне поле задається оператором  $\hat{A}_\nu$  (2.6), комутаційними співвідношеннями між операторами народження-знищення квантів поля  $\hat{c}_\alpha$ ,  $\hat{c}_\beta^+$  (Д4.3.17) та правилами дії цих операторів на стан системи. За допомогою  $\hat{A}_\nu$  будуються оператори електричної та магнітної напруженості  $\hat{\vec{E}}$ ,  $\hat{\vec{H}}$ .

З курсу теорії поля відомо вираз для оператора енергії електромагнітного поля, що міститься в кубі з розмірами  $L \times L \times L$ , як сума операторів енергій для кожного фотона окремо:

$$\hat{E} = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n_1, n_2, n_3} \hat{N}_{\vec{k}(\vec{n}), \lambda} k^0(\vec{n}), \quad (10.1)$$

де складові вектора  $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$  пробігають дискретні значення від нуля до нескінченності ( $n^\alpha = 0, 1, \dots, \infty$ ),  $k^\alpha = (2\pi/L)n^\alpha$ ,  $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2}$ ,  $\hat{N}_{\vec{k}(\vec{n}), \lambda} = \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}), \lambda}^+ \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}), \lambda}$  — оператор кількості частинок у стані з поляризацією  $\lambda$  та імпульсом  $\vec{k}$ . Енергія системи, що міститься в обмеженій області простору, є дискретною!

Очевидно, що дискретність спектра, наявна для квантованих систем, не буде відчуватися за умови  $\frac{\Delta E}{E} \ll 1$ , тобто при великій кількості фотонів або значній інтенсивності електромагнітного поля. Зазначимо, що  $\hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ - \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ = 1$  і за великої кількості фотонів ( $\hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \simeq \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \hat{c}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ = \hat{N}_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+$ ) комутаційними співвідношеннями між операторами можна знехтувати, й оператори переходять у  $c$ -числа, тобто  $c_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}^+ \simeq c_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda} = \sqrt{N_{\vec{k}(\vec{n}),\lambda}}$ .

Якщо розглядати поле в релятивістській квантовій теорії, то його стан буде постійно змінюватися за рахунок квантових флуктуацій (наприклад, завдяки взаємодії з вакуумом електрон-позитронного поля, процесам фотон-фотонного розсіяння або утворенню  $e - e^+$ -пар при зіткненні фотонів), тому класичне поле слід розуміти як усереднене за часом значення квантованого поля з великою інтенсивністю.

Зробимо тепер кількісну оцінку, за яких умов електромагнітне поле можна вважати класичним. Для цього розглянемо електромагнітне поле усереднене за часом  $\Delta t$ , який обов'язково менший від часу, протягом якого поле істотно змінюється. Якщо представити електромагнітне поле ( $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  компоненти) через розклад у ряд Фур'є за часом, то в результаті усереднення "виживуть" лише доданки, для яких  $\omega \Delta t \lesssim 1$ , оскільки доданки з вищими частотами за рахунок множника  $\sim e^{-i\omega t}$  дадуть нульовий внесок.

Отже, процедура усереднення за часом змінює стан фізичної системи. Після її виконання ми можемо розглядати в системі лише фотони з частотами  $\omega \lesssim \omega'$ , де  $\omega' = 1/\Delta t$  та відповідно з імпульсами  $p$  аж до значень  $p \lesssim p'$ , де  $p' = \hbar\omega'/c$ . Зазначені фотони згідно зі співвідношенням невизначеності Гейзенберга  $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$  (де  $\Delta p \sim p'$ ), будуть локалізовані в межах області  $V_\gamma \sim (\hbar/\Delta p)^3 \sim (\hbar/p')^3 = (c/\omega')^3 \sim \lambda'^3$ , де  $\lambda'$  — довжина хвилі фотона з частотою  $\omega'$ .

Загальну кількість фотонів у повному об'ємі системи  $V$  можна оцінити як відношення повної енергії електромагнітного поля в цьому об'ємі до середнього значення енергії одного фотона ( $\sim \hbar\omega'$ ):

$$N_\gamma \sim \frac{(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)V}{\hbar\omega'}$$

В якості критерію класичності зовнішнього поля можна вимагати виконання умови, щоб в об'ємі  $V_\gamma$  містилося багато фотонів. У нашому

випадку кількість фотонів в області  $V_\gamma$  становить:

$$n_\gamma = N_\gamma \frac{V_\gamma}{V} \sim (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \frac{c^3}{\hbar \omega'^4} = (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \frac{c^4}{\omega'^4 \hbar c} = (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \frac{(c\Delta t)^4}{\hbar c},$$

а умова класичності електромагнітного поля набуває вигляду

$$\vec{E}^2 + \vec{H}^2 \gg \hbar c / (c\Delta t)^4. \quad (10.2)$$

Проаналізуємо наведений вираз. Оскільки  $\Delta t$  можна спрямувати до нескінченності лише у випадку стаціонарного поля (тоді  $|\vec{E}| \gg 0$ ), то стаціонарне поле завжди є класичним. Зазначимо, що із (10.2) випливає, що нестаціонарне слабке поле не може бути класичним. У загальному ж випадку нестаціонарне поле може розглядатися як класичне лише тоді, коли воно є достатньо сильним, щоб задовольняти умову (10.2). Зазначимо, що параметр  $\Delta t$  не є однозначною величиною і фізично визначає значення частот фотонів

В подальшому під словом *зовнішнє* класичне поле будемо розуміти усереднене значення квантованого поля достатньої інтенсивності, що не зазнає змін у процесі реакції та задовольняє умову (10.2).

Зовнішнє класичне поле задається неквантованим 4-потенціалом  $A_\nu^{ext}(x)$ . Оператор гамільтоніана в представленні взаємодії має форму:

$$\hat{H}_i = \hat{j}^\nu (\hat{A}_\nu + A_\nu^{ext}) = e \cdot \hat{\Psi} \gamma^\nu \hat{\Psi} (\hat{A}_\nu + A_\nu^{ext}), \quad (10.3)$$

тобто в ряді теорії збурень слід замінити  $\hat{A}_\nu \rightarrow \hat{A}_\nu + A_\nu^{ext}$ .

Вкажемо на загальну властивість зовнішніх класичних полів. Оскільки доданок  $A_\nu^{ext}$  не є оператором, він не може утворювати спарювання з іншими операторами, тобто  $A_\nu^{ext}$  буде представляти зовнішні, а не внутрішні лінії діаграми.

### Однофотонна анігіляція за наявності зовнішнього поля

Як відомо, процес  $e - e^+$ -анігіляції в один фотон є забороненим законами збереження енергії-імпульсу. Розглянемо цей процес за наявності зовнішнього поля. У першому порядку теорії збурень цей процес неможливий. У другому порядку маємо:

$$S_{fi}^{(2)} = \langle (k_1, \lambda_1) | \hat{S}^{(2)} | (p_2, \mu_2); (p_1, \mu_1) \rangle =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{T} \left[ \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right] (\hat{A}_\mu + A_\mu^{ext}) \times \right. \\
&\quad \left. \times \hat{N} \left[ \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] (\hat{A}'_\nu + A'^{ext}_\nu) \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{T} \left[ \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right] \hat{N} \left[ \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \times \\
&\quad \times \langle 0 | \hat{c}_1 \hat{T} \left[ (\hat{A}_\mu + A_\mu^{ext}) (\hat{A}'_\nu + A'^{ext}_\nu) \right] | 0 \rangle. \quad (10.4)
\end{aligned}$$

Ферміонну частина легко знайти за теоремою Віка (5.3) та (5.4):

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | \hat{T} \left[ \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right] \hat{N} \left[ \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{N} \left[ \overline{\hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}'} \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&= \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi}' \gamma^\nu \hat{\Psi}' \hat{\Psi} \gamma^\mu \hat{\Psi} \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&\quad = \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi} \gamma^\mu (-i) G(x - x') \gamma^\nu \hat{\Psi}' \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle + \\
&\quad + \langle 0 | \hat{N} \left[ \hat{\Psi}' \gamma^\nu (-i) G(x' - x) \gamma^\mu \hat{\Psi} \right] \hat{b}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&= -i [\bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \psi'_1 + \bar{\psi}'_{-2} \gamma^\nu G(x' - x) \gamma^\mu \psi_1]. \quad (10.5)
\end{aligned}$$

Фотонна частина:

$$\begin{aligned}
\hat{T} \langle 0 | \hat{c}_1 (\hat{A}_\mu + A_\mu^{ext}) (\hat{A}'_\nu + A'^{ext}_\nu) | 0 \rangle &= \hat{T} [\langle 0 | \hat{c}_1 \hat{A}_\mu A'^{ext}_\nu | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{c}_1 A_\mu^{ext} \hat{A}'_\nu | 0 \rangle] = \\
&= \hat{T} [\varphi_\mu^{*1} A'^{ext}_\nu + A_\mu^{ext} \varphi'^{*1}_\nu] = \varphi_\mu^{*1} A'^{ext}_\nu + A_\mu^{ext} \varphi'^{*1}_\nu, \quad (10.6)
\end{aligned}$$

де ми прибравли оператор хронологічного впорядкування, оскільки він зводиться до заміни  $x \rightarrow x'$ ,  $\mu \rightarrow \nu$ , відносно якої функція симетрична.

Отже,

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= -i \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \quad (10.7) \\
&\{ \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \psi'_1 + \bar{\psi}'_{-2} \gamma^\nu G(x' - x) \gamma^\mu \psi_1 \} (\varphi_\mu^{*1} A'^{ext}_\nu + A_\mu^{ext} \varphi'^{*1}_\nu) = \\
&= -i (-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \bar{\psi}_{-2} \gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu \psi'_1 (\varphi_\mu^{*1} A'^{ext}_\nu + A_\mu^{ext} \varphi'^{*1}_\nu).
\end{aligned}$$

Ця формула дуже схожа на вираз для  $e^-$ -анігіляції у два фотони (6.5) і переходить в нього, якщо замінити  $A^{ext}$  на фотон, що вилітає. Отже, правила Фейнмана залишаються в силі, якщо замість фотона розуміти зовнішнє поле  $A^{ext}$ .

Для переходу в імпульсний простір запишемо перетворення Фур'є для зовнішнього поля<sup>1</sup> (див. (2.33)):

$$\begin{cases} A_\nu^{ext}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k A_\nu^{ext}(k) e^{-ikx} \\ A_\nu^{ext}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4x A_\nu^{ext}(x) e^{ikx}. \end{cases} \quad (10.8)$$

З урахуванням (2.4) – (2.6), (4.13) запишемо (10.7) в імпульсному просторі:

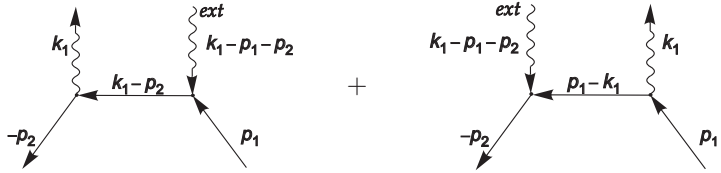
$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \frac{\bar{v}_{-2} e^{-ip_2x}}{\sqrt{2V\varepsilon_2}} \gamma^\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) e^{-ip(x-x')} \gamma^\nu \times \\ &= \frac{v_1 e^{-ip_1x'}}{\sqrt{2V\varepsilon_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda_1} e^{ik_1x}}{\sqrt{2V\omega_1}} A_\nu^{ext}(k) e^{-ikx'} + A_\mu^{ext}(k) e^{-ikx} \frac{\epsilon_\nu^{*\lambda_1} e^{ik_1x'}}{\sqrt{2V\omega_1}} \right) = \\ &= \frac{-i(-ie)^2}{\sqrt{(2V)^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega_1}} \bar{v}_{-2} \left[ \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \frac{m + \not{k}_1 - \not{p}_2}{m^2 - (k_1 - p_2)^2} \not{A}^{ext}(k_1 - p_1 - p_2) + \right. \\ &\quad \left. + \not{A}^{ext}(k_1 - p_1 - p_2) \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}_1}{m^2 - (p_1 - k_1)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_1} \right] v_1. \quad (10.9) \end{aligned}$$

Отриманий вираз має багато спільного з виразом для  $e^-$ -анігіляції у два фотони (6.7), однак має й принципову відмінність — відсутність дельта-функції, що виражає закон збереження енергії-імпульсу. Справді, у (10.9)  $p_1 + p_2 \neq k_1$ , однак закон збереження енергії-імпульсу реакції у цілому виконується завдяки внеску зовнішнього поля.

Можна сказати, що розклад (10.8) насправді виражає потенціал  $A^{ext}$  як суперпозицію віртуальних фотонів з різними  $k$ , а в реакції бере участь один із цих фотонів з необхідними характеристиками.

<sup>1</sup>Оскільки в правилах Фейнмана фотону, що входить у точку, відповідає  $e^{-ikx}$ , то фур'є-образ (10.8) відповідає лінії зовнішнього поля, що входить. Цю особливість слід враховувати при простановці імпульсів на діаграмі.

Зауважимо, що (10.9) можна записати, скориставшись діаграмами



де імпульси розставляються згідно із законом збереження 4-імпульсу в кожній вершині, починаючи з вершини з реальними частинками. Правила відповідності для ліній стандартні, лінії з позначенням  $ext$  зіставляється відповідна фур'є-компонента зовнішнього класичного поля  $A_{\mu}^{ext}(k)/(2\pi)^4$ .

### Кулонівське розсіяння

Розглянемо процес розсіяння електрона електричним полем важкого нерухомого ядра. У цьому випадку поле ядра можна вважати зовнішнім стаціонарним класичним полем, а саме:

$$A_{\alpha}^{ext} = 0, \quad A_0^{ext} = \frac{Ze}{4\pi r}. \quad (10.10)$$

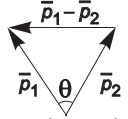
Перше незникаюче наближення буде в першому порядку теорії збурень. Якщо початковий стан електрона  $(p_1; \mu_1)$ , а кінцевий  $(p_2; \mu_2)$ , то отримаємо:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{N} [\hat{\Psi} \gamma^{\mu} \hat{\Psi}] (\hat{A}_{\mu} + A_{\mu}^{ext}) \hat{a}_1^{\dagger} | 0 \rangle = / (2.4) - (2.6) / = \\ &= (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{N} [\hat{\Psi} \gamma^{\mu} \hat{\Psi}] \hat{a}_1^{\dagger} | 0 \rangle A_{\mu}^{ext} = \\ &= (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \bar{\psi}_2 \gamma^{\mu} \psi_1 A_{\mu}^{ext} = / (10.8) / = \\ &= \frac{(-ie)}{2V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k d^4x \bar{v}_2 \gamma^{\mu} v_1 A_{\mu}^{ext}(k) e^{i(p_2 - p_1 - k)x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-ie)}{2V\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \bar{v}_2 \gamma^\mu v_1 A_\mu^{ext}(k) \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}) \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \omega) = \\
&= \left/ A_\mu^{ext}(k) = 2\pi\delta(\omega) \frac{Ze}{k^2} \delta_{\mu 0} \right/ = \\
&= 2\pi \frac{(-iZe^2)\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2V\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\bar{v}_2 \gamma^0 v_1}{k^2} \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 - \vec{k}) = \\
&= 2\pi \frac{(-iZe^2)\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2V\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \frac{\bar{v}_2 \gamma^0 v_1}{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}. \quad (10.11)
\end{aligned}$$

Тобто отримали, що у випадку стаціонарного поля віртуальний фотон зовнішнього поля не змінює енергію електрона, що розсіюється, а може змінювати лише напрямок його імпульсу. Тоді  $\vec{p}_1^2 = \vec{p}_2^2$ , отже квадрат переданого імпульсу електрона внаслідок взаємодії з електричним полем важкого ядра

$$\vec{q}^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2 = 4|\vec{p}_1|^2 \sin^2(\theta/2), \quad (10.12)$$



де  $\theta$  – кут між початковим та кінцевим імпульсами електрона. Тоді

$$S_{fi}^{(1)} = 2\pi \frac{(-iZe^2)\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2V\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \cdot \frac{\bar{v}_2 \gamma^0 v_1}{\vec{q}^2}. \quad (10.13)$$

### Завдання

1. Як відомо, процеси за участю реальних частинок у КЕД в першому порядку теорії збурень є забороненими законами збереження енергії-імпульсу. Розгляньте  $e - e^+$ -анігіляцію в реальний фотон у першому порядку теорії збурень з гамільтоніаном взаємодії (10.3) методом безпосереднього усереднення за початковим та кінцевим станами.
2. Як треба змінити перетворення Фур'є (10.8), щоб зовнішньому полю відповідала лінія, що виходить з діаграми?
3. Чи може формальний математичний розклад (10.8) виражати суперпозицію реальних фотонів?

4. Розгляньте перехресний процес до однофотонної  $e-e^+$ -анігіляції, а саме, гальмівне випромінювання електрона в зовнішньому полі. Запишіть амплітуду процесу.
5. Знайдіть фур'є-образ потенціалу (10.10).
6. Знайдіть явний вигляд кулонівського потенціалу в координатному просторі та його фур'є-образ у випадку, коли фотон буде мати масу.
7. Чи можна вважати світло від лампи денного світла зовнішнім класичним полем?

## РОЗДІЛ 11

### Взаємодія електронів із ферміонами інших поколінь, зі скалярними та векторними частинками. Приклади процесів у стандартній моделі

У цьому розділі ми вийдемо за межі квантової електродинаміки, щоб показати, яким чином видозмінюються правила діаграмної техніки Фейнмана у випадку більш загальної теорії взаємодіючих полів.

Важливу роль при побудові техніки Фейнмана в процесах за участі полів (частинок) різного типу відіграє те, що вторинно квантовані оператори різних типів фермі- та бозе-полів (наприклад, електронного та мюонного) антикомутують, оператори фермі- та бозе-полів комутують між собою (ми це вже використовували в КЕД для перестановки місцями операторів електрон-позитронного та електромагнітного полів), та оператори різних типів бозе-полів також комутують між собою (наприклад, оператори полів  $Z$  та  $W^\pm$  бозонів). Це призводить до того, що спарювання між вторинно квантованими полями різного типу дорівнюють нулю і не може бути внутрішньої лінії, одна половина якої електронна, а інша, скажімо, мюонна.

Для прикладу розглянемо такі процеси в рамках стандартної моделі фізики елементарних частинок (СМ): електрон-мюонне розсіяння та розсіяння електрона на нейтрино в другому порядку теорії збурень, розпад бозона Хіґса (кванта нейтрального масивного скалярного поля) та  $Z$ -бозона (кванта нейтрального масивного векторного поля) на електрон-позитронну пару в першому порядку теорії збурень.

Ми не будемо виписувати весь лагранжіан СМ, оскільки це виходить за межі курсу, а лише запишемо окремі його доданки, що нам знадобляться. Повний лагранжіан СМ наведено, наприклад, в [5].

#### Взаємодія електронів із ферміонами інших поколінь на прикладі електрон-мюонного розсіяння

Для опису електрон-мюонного розсіяння ( $e + \mu \rightarrow e' + \mu'$ ) на-самперед треба розширити гамільтоніан взаємодії (1.47) і включити до нього доданок, що описує взаємодію з мюонами. Цей доданок є в

лагранжіані СМ, хоча і з загальних міркувань зрозуміло<sup>1</sup>, що він повинен мати таку саму форму, що й доданок електрон-позитронної та електромагнітної взаємодії. Частина лагранжіана СМ, що відповідає за електромагнітну взаємодію, має вигляд

$$\mathcal{L}_{int}(x) = e \sum_f q_f \bar{f} \gamma^\mu f A_\mu, \quad (11.1)$$

де сума йде за всіма ферміонами  $f$  (електрон, мюон, тау-лептон, відповідні нейтрино, а також шість кварків);  $e$  – додатне число, електричний заряд протона;  $eq_f$  – електричний заряд інших ферміонів ( $q_e = -1$ ).

Для опису процесу взаємодії у квантовій теорії поля в рамках теорії збурень треба перейти до представлення взаємодії та зробити поля операторними:

$$\hat{\mathcal{L}}_{i,int}(x) = e \sum_f q_f \hat{f} \gamma^\mu \hat{f} \hat{A}_\mu, \quad (11.2)$$

де  $\hat{f}$ ,  $\hat{A}_\mu$  – вторинно квантовані вільні ферміонні та електромагнітні поля. Тоді згідно (1.55) розклад  $\hat{S}$ -матриці матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{T} e^{-ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}[\hat{e}(x)\gamma^\nu \hat{e}(x) + \hat{\mu}(x)\gamma^\nu \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{A}_\nu(x)} = \\ &= \hat{1} + (-ie) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}[\hat{e}(x)\gamma^\nu \hat{e}(x) + \hat{\mu}(x)\gamma^\nu \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{A}_\nu(x) + \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{T} \left\{ \hat{N}[\hat{e}(x)\gamma^\nu \hat{e}(x) + \hat{\mu}(x)\gamma^\nu \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{A}_\nu(x) \times \right. \\ &\quad \left. \times \hat{N}[\hat{e}(x')\gamma^\nu \hat{e}(x') + \hat{\mu}(x')\gamma^\nu \hat{\mu}(x') + \dots] \hat{A}_\nu(x') \right\} + \dots, \quad (11.3) \end{aligned}$$

де  $\hat{e}(x)$ ,  $\hat{\mu}(x)$  – вільні вторинно квантовані електронні та мюонні поля, відповідно.

Розглянемо електрон-мюонне розсіяння, звертаючи увагу на те, як модифікуються правила діаграмної техніки Фейнмана. Будемо розв'я-

<sup>1</sup>Мюон – елементарна частинка, що має однаковий з електроном електричний заряд і спин, а відрізняється від нього масою та лептонним зарядом.

зувати задачу, ніби не знаємо фейнманівських правил, а потім проаналізуємо результат.

Позначимо початковий стан електрона  $(p_1; \mu_1)$ , а кінцевий  $(p_3; \mu_3)$ ; для стану мюона, відповідно,  $(p_2; \mu_2)$  та  $(p_4; \mu_4)$ . Початковий та кінцевий стан у представленні чисел заповнення мають вигляд (див. умову (7.1)):

$$\begin{aligned} |(p_2, \mu_2); (p_1, \mu_1)\rangle &= \hat{d}_2^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle; \\ |(p_4, \mu_4); (p_3, \mu_3)\rangle &= \hat{d}_4^+ \hat{a}_3^+ |0\rangle \Rightarrow \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | = \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{d}_4, \end{aligned} \quad (11.4)$$

де  $\hat{a}_i, \hat{a}_i^+$  – оператори знищення, народження електронів,  $\hat{d}_i, \hat{d}_i^+$  – оператори знищення, народження мюонів.

Щоб не плутатися далі в позначеннях, запишемо функцію електрон-позитронного поля у вигляді (див. (2.4), (2.5), (2.7)):

$$\begin{aligned} \hat{e}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},\mu}^{\mu} v_k^{\mu} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k},\mu}^{\pm} v_{-k}^{\mu} e^{ikx} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi} e_{\chi}(x) + \hat{b}_{\chi}^+ e_{-\chi}(x) \right), \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},\mu}^{\pm} \bar{v}_k^{\mu} e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k},\mu}^{\mu} \bar{v}_{-k}^{\mu} e^{-ikx} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{a}_{\chi}^+ \bar{e}_{\chi}(x) + \hat{b}_{\chi} \bar{e}_{-\chi}(x) \right), \end{aligned} \quad (11.6)$$

та за аналогією функцію вторинно квантованого мюонного поля:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{d}_{\vec{k},\mu}^{\mu} V_k^{\mu} e^{-ikx} + \hat{f}_{\vec{k},\mu}^{\pm} V_{-k}^{\mu} e^{ikx} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{d}_{\chi} \mu_{\chi}(x) + \hat{f}_{\chi}^+ \mu_{-\chi}(x) \right), \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{d}_{\vec{k},\mu}^{\pm} \bar{V}_k^{\mu} e^{ikx} + \hat{f}_{\vec{k},\mu}^{\mu} \bar{V}_{-k}^{\mu} e^{-ikx} \right) = \\ &= \sum_{\chi} \left( \hat{d}_{\chi}^+ \bar{\mu}_{\chi}(x) + \hat{f}_{\chi} \bar{\mu}_{-\chi}(x) \right), \end{aligned} \quad (11.8)$$



де  $\hat{f}_i, \hat{f}_i^+$  – оператори знищення, народження антимюонів;  $V_{\pm k}^\mu$  – од-ночастинкові функції мюона та антимюона відповідно.

Для початку відзначимо, що в першому порядку теорії збурень електрон-мюонної взаємодії немає, оскільки електронні та мюонні доданки входять у  $\hat{S}$ -матрицю окремо. Отже, взаємодія може виникнути, лише починаючи з другого порядку теорії збурень, що узгоджується з фейнманівськими правилами, оскільки мають бути чотири зовнішні лінії.

У другому порядку  $\hat{S}$ -матриці

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \langle (p_3, \mu_3); (p_4, \mu_4) | \hat{S}^{(2)} | (p_2, \mu_2); (p_1, \mu_1) \rangle = \\ &= \hat{T} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{d}_4 \hat{N} [\hat{e}(x) \gamma^\nu \hat{e}(x) + \hat{\mu}(x) \gamma^\nu \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{A}_\nu(x) \times \\ &\quad \times \hat{N} [\hat{e}(x') \gamma^\eta \hat{e}(x') + \hat{\mu}(x') \gamma^\eta \hat{\mu}(x') + \dots] \hat{A}_\eta(x') \hat{d}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Очевидно, внесок буде лише від двох доданків:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \hat{T} \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\ &\quad \times \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{d}_4 \left\{ \hat{N} [\hat{e}(x) \gamma^\nu \hat{e}(x)] \hat{A}_\nu(x) \hat{N} [\hat{\mu}(x') \gamma^\eta \hat{\mu}(x')] \hat{A}_\eta(x') + \right. \\ &\quad \left. + \hat{N} [\hat{\mu}(x) \gamma^\nu \hat{\mu}(x)] \hat{A}_\nu(x) \hat{N} [\hat{e}(x') \gamma^\eta \hat{e}(x')] \hat{A}_\eta(x') \right\} \hat{d}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Згідно з теоремами Віка (5.2), (5.3), вираз (11.10) можна представити через суму спарювань. Будемо міркувати наступним чином: по-перше, у реакції немає вільних фотонів, тобто за операторами електромагнітного поля має бути спарювання; по-друге, потрібно компенсувати дію операторів народження-знищення  $\hat{a}_1^+, \hat{d}_2^+, \hat{a}_3, \hat{d}_4$ . Для цього необхідно залишити вільними дві електронні та дві мюонні лінії. Зауважимо, що це також узгоджується з правилами діаграмної техніки Фейнмана. Отже,

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \left\{ \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{d}_4 \hat{N} [\hat{e}(x) \gamma^\nu \hat{e}(x) \hat{\mu}(x') \gamma^\eta \hat{\mu}(x')] \hat{d}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle 0 | \hat{a}_3 \hat{d}_4 \hat{N} [\hat{\mu}(x) \gamma^\nu \hat{\mu}(x) \hat{e}(x') \gamma^\eta \hat{e}(x')] \hat{d}_2^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \right\} iD_{\nu\eta}^0(x-x'). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Для обчислення цього виразу потрібно використати (11.5) – (11.8) та згадати, що для ферміонів оператори народження-знищення частинок різного сорту антикомутують. Виявляється, що внесок двох доданків однаковий і дорівнює:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\
 &\times (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{i(p_3 - p_1)x} (\bar{V}_4 \gamma^\eta V_2) e^{i(p_4 - p_2)x'} i D_{\nu\eta}^0(x - x') = /(\mathbf{2.33})/ = \\
 &= \frac{i(-ie)^2}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4p \times \\
 &\times (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) e^{i(p_3 - p_1 - p)x} (\bar{V}_4 \gamma^\eta V_2) e^{i(p_4 - p_2 + p)x'} \frac{D_{\nu\eta}^0(p)}{(2\pi)^4}. \quad (11.12)
 \end{aligned}$$

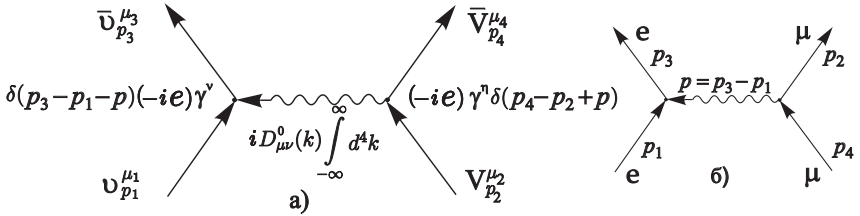
Інтегрування за координатами  $x$  та  $x'$  приводить до появи дельта-функцій:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= \frac{i(-ie)^2 (2\pi)^8}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) \delta(p_3 - p_1 - p) \times \\
 &\times (\bar{V}_4 \gamma^\eta V_2) \delta(p_4 - p_2 + p) \frac{D_{\nu\eta}^0(p)}{(2\pi)^4}. \quad (11.13)
 \end{aligned}$$

Провівши інтегрування за 4-імпульсом остаточно отримаємо:

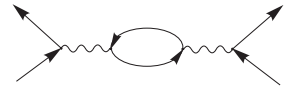
$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(2)} &= i(-ie)^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} (\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) (\bar{V}_4 \gamma^\eta V_2) D_{\nu\eta}^0(p_3 - p_1) = \\
 &= ie^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \cdot \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\nu v_1) (\bar{V}_4 \gamma^\eta V_2)}{(p_3 - p_1)^2}. \quad (11.14)
 \end{aligned}$$

Очевидно, формула (11.13) збігається із формулою для фейнманівської діаграми процесу (діаграми (а), (б) на наступній сторінці), записаної згідно з правилами, наведеними в розд. 9, де ми додали лінії, що відповідають новим частинкам — мюонам. Необхідно також вказати на відсутність множника  $1/2!$ , що, як і раніше, пов'язано із симетрією щодо заміни  $x \leftrightarrow x'$ .



Порівнюючи даний результат із формулами  $e-e$ - та  $e-e^+$ -розсіяння (див. діаграми на с. 104) зазначимо, що  $e-\mu$ -розсіяння відрізняється від них відсутністю діаграми, де в одній точці стикаються електронна та мюонні лінії. Так і має бути, інакше ми мали б процеси перетворення  $e \leftrightarrow \mu$  при випромінюванні фотона однією із частинок, що заборонено законом збереження лептонного числа<sup>1</sup>. У процесі розрахунку такі діаграми зникають при переході від (11.9) до (11.10). Математично це пов'язано з тим, що оператори різних полів антикомутують і відповідні вакуумні середні дорівнюють нулю. Очевидно, така ситуація відбудеться і при взаємодії електрона з будь-яким іншим зарядженим ферміоном.

Слід зауважити, що хоча в першому незникаючому наближенні (другий порядок  $\hat{S}$ -матриці) ми використовували вторинно квантовані функції лише електронних та мюонних полів, у вищих порядках теорії збурень будуть задіяні вторинно квантовані функції всіх інших ферміонних полів. Зокрема, у внутрішніх ферміонних петлях будуть пробігати віртуальні частинки всіх інших ферміонних полів.



**Висновок.** При взаємодії електрона з іншими ферміонами, фейнманівські правила залишаються в силі, якщо розширити кількість використаних ліній на ті, що відповідають іншим частинкам. Ці лінії

<sup>1</sup>В рамках СМ лептонне число зберігається, однак в кінці 1990-х рр. експериментально [22, 23] був зафіксований факт нейтринних осциляцій, тобто процес, коли нейтрино одного аромату можуть самовільно переходити в стан з іншим ароматом. Це означає, що нейтрино насправді є масивними частинками, а не безмасовими як у СМ. Для опису масивних нейтрино може бути застосований як діраковський, так і майоранівський формалізм. Якщо буде доведено, що нейтрино є майоранівськими частинками, це означатиме, що лептонне число не буде зберігатися [5, 24].

можуть бути як зовнішніми, так і внутрішніми. При цьому необхідно слідкувати за тим, що деякі діаграми можуть бути заборонені згідно з певними законами збереження.

### Взаємодія електронів із ферміонами інших поколінь на прикладі електрон-нейтринної взаємодії

Взаємодія електрично заряджених лептонів з електрично нейтральними лептонами (нейтрино) описується наступним доданком у СМ:

$$\mathcal{L}_{int} = -A \sum_n (\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n W_\mu^-), \quad (11.15)$$

де сума ведеться за всіма лептонними поколіннями ( $n = 1, 2, 3$  – електронне, мюонне та тау-лептонів покоління),  $W^\pm$  – масивне векторне заряджене поле ( $(W^-)^* = W^+$ ), константа  $A = e/(2\sqrt{2} \sin \theta_w)$ , де  $\theta_w$  – кут Вайнберга,  $\sin^2 \theta_w = 0.231$ .

Зазначимо, що (11.15) можна записати в симетричній формі як

$$\mathcal{L}_{int} = -A \sum_n (j_{(n)}^\mu W_\mu^+ + h.c.), \quad (11.16)$$

де позначення  $h.c.$  означає операцію ермітового спряження, а струм  $j_{(n)}^\mu = \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n$  – є так званим *зарядженим* струмом. Справді, якщо у випадку електромагнітної взаємодії (див. (11.1)) у кожній точці діаграми закон збереження заряду виконувався лише завдяки лініям струмів (*нейтральні* струми) і переносник взаємодії (калібрувальне поле  $A_\mu$ ) був електрично нейтральним, то для взаємодії (11.15) ситуація інша – закон збереження електричного заряду в кожній точці діаграми забезпечується лише одночасним внеском струму  $j_{(n)}^\mu$  та переносника взаємодії (калібрувальне поле  $W^\pm$ -бозонів є зарядженим).

Для опису процесу взаємодії у квантовій теорії поля в рамках теорії збурень треба перейти в представлення взаємодії та зробити поля операторними, тобто польові функції слід замінити вторинно квантованими операторами відповідних вільних полів. Також треба записати  $\hat{S}$ -матрицю та її розклад згідно з (1.55).

Розглянемо реакцію, під час якої електрон та мюонне нейтрино переходять у мюон та електронне нейтрино ( $e + \nu_\mu \rightarrow \mu + \nu_e$ ). Для цього

нам знадобиться явний вираз для вторинно квантованого електронного, мюонного (11.5) – (11.8) і нейтринних полів. Поля нейтрино  $\nu_n$  входять у (11.15) як ферміонні поля з  $m = 0$  (див. Д.5.4). Запишемо їх згідно з (Д5.4.2):

$$\begin{cases} \hat{\nu}_n = \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{s}_{(n)\vec{k},\xi} \nu_{(n)k}^{\xi} e^{-ikx} + \hat{t}_{(n)\vec{k},\xi}^+ \nu_{(n)-k}^{\xi} e^{ikx} \right), \\ \hat{\bar{\nu}}_n = \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{s}_{(n)\vec{k},\xi}^+ \bar{\nu}_{(n)k}^{\xi} e^{ikx} + \hat{t}_{(n)\vec{k},\xi} \bar{\nu}_{(n)-k}^{\xi} e^{-ikx} \right), \end{cases} \quad (11.17)$$

де ми формально використали  $\hat{s}$  ( $\hat{s}^+$ ) та  $\hat{t}$  ( $\hat{t}^+$ ) з відповідними індексами для позначення операторів народження-знищення нейтрино та антинейтрино різних поколінь та різних кіральностей<sup>1</sup> ( $\xi$ ).

Позначимо початковий стан електрона ( $p_1; \mu_1$ ), а кінцевий стан мюона ( $p_3; \mu_3$ ); початковий стан мюонного нейтрино<sup>2</sup> ( $p_2; -1$ ), а кінцевий стан електронного нейтрино ( $p_4; -1$ ). Початковий та кінцевий стани у представленні чисел заповнення мають вигляд

$$\begin{aligned} |(p_2; -1); (p_1, \mu_1)\rangle &= \hat{s}_{\mu,2}^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle; \\ |(p_4; -1); (p_3, \mu_3)\rangle &= \hat{s}_{e,4}^+ \hat{d}_3^+ |0\rangle \Rightarrow \langle (p_3, \mu_3); (p_4; -1) | = \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{s}_{e,4}. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Зазначимо, що умова (7.1) тут не спрацьовує, оскільки за відсутності взаємодії  $\langle f | \hat{1} | i \rangle = 0$ , а отже, порядок розташування операторів у (11.18) є довільним.

Перше незникаюче наближення буде в другому порядку теорії збурень:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \langle (p_3, \mu_3); (p_4; -1) | \hat{S}^{(2)} | (p_2; -1); (p_1, \mu_1) \rangle = \\ &= \frac{(-iA)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{T} \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{s}_{e,4} \times \end{aligned}$$

<sup>1</sup>У СМ нейтрино з правою кіральністю не існують. Однак формальний розклад на ліво- та правокіральної нейтрино використовувати можна. Множник  $1 - \gamma^5 = 2\hat{P}_-$  у (11.15) одночасно виділяє з нейтринної та лептонної функції лише частини з лівою кіральністю. Завдяки цьому нейтрино з правою кіральністю не ввійдуть у доданок взаємодії.

<sup>2</sup>Кіральність нейтрино, що бере участь у реакціях СМ, дорівнює  $(-1)$ .

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \hat{\nu}_e(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x) \hat{W}_\chi^+(x) + \hat{e}(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_e(x) \hat{W}_\chi^-(x) + \right. \\
& + \hat{\nu}_\mu(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\mu}(x) \hat{W}_\chi^+(x) + \hat{\mu}(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x) \hat{W}_\chi^-(x) + \dots \left. \right\} \times \\
& \times \left\{ \hat{\nu}_e(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x') \hat{W}_\xi^+(x') + \hat{e}(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_e(x') \hat{W}_\xi^-(x') + \right. \\
& + \hat{\nu}_\mu(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\mu}(x') \hat{W}_\xi^+(x') + \hat{\mu}(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x') \hat{W}_\xi^-(x') + \dots \left. \right\} \times \\
& \times \hat{s}_{\mu,2}^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle, \quad (11.19)
\end{aligned}$$

де ми не брали вирази для струмів під знак нормального впорядкування.

Зробимо маленький відступ та роз'яснимо цей момент. Нагадаємо, що для квантової електродинаміки ми вимагали нормального впорядкування оператора струму з вимоги, щоб струм у вакуумі дорівнював нулю (див. (1.55)). У випадку взаємодії (11.15) відповідний струм у вакуумі автоматично дорівнює нулю й оператор нормального впорядкування не є обов'язковим. Різниця між випадком, коли ми поставимо його чи ні, проявиться в теоремі Віка, а саме в тому, чи буде існувати спарювання між елементами струму в одній точці. Однак, оскільки оператори народження ферміонних полів різних типів антикомутують, то легко показати, що спарювання між різними елементами струму як в одній, так і в різних точках, тобто, наприклад, між  $\hat{\nu}_e(x)$  та  $\hat{e}(x')$ , дорівнює нулю.

У (11.19) внесок, очевидно, буде лише від двох доданків:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \langle (p_3, \mu_3); (p_4; -1) | \hat{S}^{(2)} | (p_2; -1); (p_1, \mu_1) \rangle = \\
&= \frac{(-iA)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \hat{T} \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{s}_{e,4} \times \\
&\times \left\{ \hat{\nu}_e(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x) \hat{W}_\chi^+(x) \cdot \hat{\mu}(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x') \hat{W}_\xi^-(x') + \right. \\
&+ \hat{\mu}(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x) \hat{W}_\chi^-(x) \cdot \hat{\nu}_e(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x') \hat{W}_\xi^+(x') \left. \right\} \times \\
&\times \hat{s}_{\mu,2}^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle. \quad (11.20)
\end{aligned}$$

Згідно з теоремами Віка (5.2), (5.3) вираз (11.20) можна представити через суму спарювань. Нам необхідно залишити вільними зовнішні

лінії електрона, мюона та їх нейтрино, а лінії  $W$ -бозону треба зробити внутрішніми, тобто провести за ними спарювання. Отже,

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-iA)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \times \\
&\times \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{s}_{e,4} \hat{N} \left\{ \hat{\nu}_e(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x) \cdot \hat{\mu}(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x') \cdot \overline{\hat{W}_\chi^+(x) \hat{W}_\xi^-(x')} + \right. \\
&+ \left. \hat{\mu}(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x) \cdot \hat{\nu}_e(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x') \cdot \overline{\hat{W}_\chi^-(x) \hat{W}_\xi^+(x')} \right\} \hat{s}_{\mu,2}^+ \hat{a}_1^+ | 0 \rangle = \\
&= / \overline{\hat{W}_\chi^+(x) \hat{W}_\xi^-(x')} = \overline{\hat{W}_\chi^-(x) \hat{W}_\xi^+(x')} = / (0.30), (D2.24) / = i D_{\xi\chi}(x - x') / = \\
&= \frac{(-iA)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' i D_{\xi\chi}(x - x') \times \\
&\times \left\{ \langle 0 | \hat{s}_{e,4} \hat{\nu}_e(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x) \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{\mu}(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x') \hat{s}_{\mu,2}^+ | 0 \rangle + \right. \\
&+ \left. \langle 0 | \hat{d}_3 \hat{\mu}(x) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \hat{\nu}_\mu(x) \hat{s}_{\mu,2}^+ | 0 \rangle \langle 0 | \hat{s}_{e,4} \hat{\nu}_e(x') \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \hat{e}(x') \hat{a}_1^+ | 0 \rangle \right\} = \\
&= \frac{(-iA)^2}{2! \sqrt{2V \varepsilon_1 2V \varepsilon_2 2V \varepsilon_3 2V \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' i D_{\xi\chi}(x - x') \times \\
&\times \left\{ \bar{\nu}_{e,4} e^{ip_4 x} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) v_1 e^{-ip_1 x} \cdot \bar{V}_3 e^{ip_3 x'} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2} e^{-ip_2 x'} + \right. \\
&+ \left. \bar{V}_3 e^{ip_3 x} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2} e^{-ip_2 x} \cdot \bar{\nu}_{e,4} e^{ip_4 x'} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) v_1 e^{-ip_1 x'} \right\}. \quad (11.21)
\end{aligned}$$

Останній рядок відрізняється від передостаннього заміною  $x \leftrightarrow x'$ ,  $\xi \leftrightarrow \chi$ , відносно якої пропагатор  $D_{\xi\chi}(x - x')$  є симетричним. Отже, зі знаменника зникає 2!:

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(2)} &= \frac{i(-iA)^2}{\sqrt{2V \varepsilon_1 2V \varepsilon_2 2V \varepsilon_3 2V \varepsilon_4}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\xi\chi}(k) e^{-ik(x-x')} \times \\
&\times \left\{ \bar{\nu}_{e,4} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) v_1 e^{-i(p_1 - p_4)x} \cdot \bar{V}_3 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2} e^{-i(p_2 - p_3)x'} \right\} = \\
&= -iA^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{2V \varepsilon_1 2V \varepsilon_2 2V \varepsilon_3 2V \varepsilon_4}} D_{\xi\chi}(p_4 - p_1) \times \\
&\times \bar{\nu}_{e,4} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) v_1 \cdot \bar{V}_3 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2}. \quad (11.22)
\end{aligned}$$

Очевидно, що дану формулу можна також записати за допомогою правил діаграмної техніки Фейнмана з розд. 9, якщо додати до них лінії відповідних ферміонів та замінити формулу, що відповідає точці: коефіцієнт  $(-ie)$  замінити на  $(-iA)$ , а матрицю  $\gamma^\mu$  замінити на комбінацію  $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ . Також слід змінити зміст внутрішньої хвилястої лінії, тепер вона відповідатиме пропагатору векторного масивного зарядженого поля  $W^\pm$ -бозону. При цьому, для внутрішніх ліній  $W^\pm$ -бозону

$$\begin{aligned} \overbrace{\hat{W}_\chi^-(x)\hat{W}_\xi^-(x')} &= \overbrace{\hat{W}_\chi^+(x)\hat{W}_\xi^+(x')} = 0 \\ \overbrace{\hat{W}_\chi^+(x)\hat{W}_\xi^-(x')} &= \overbrace{\hat{W}_\chi^-(x)\hat{W}_\xi^+(x')} = / (0.30), (D2.24) / = iD_{\chi\xi}(x - x'). \end{aligned}$$

### Ферміонний розпад Хігса на прикладі розпаду на $e - e^+$ -пару

Для розгляду процесу розпаду бозону Хігса на електрон-позитронну пару запишемо частину лагранжіана СМ, що відповідає за взаємодію хігсівського поля з ферміонами:

$$\mathcal{L}_{int} = - \sum_k \frac{m_k}{v} \bar{f}_k f_k \hat{h}, \quad (11.23)$$

де  $h$  – дійсне скалярне хігсівське поле, а сума проводиться за всіма ферміонами, що є в СМ, тобто за електронами, мюонами, тау-лептонами та шістьма кварками. Параметр  $v$  визначає мінімум хігсівського потенціалу й вважається рівним 247 Гев.

Як і раніше, для опису процесу взаємодії у квантовій теорії поля в рамках теорії збурень слід перейти до представлення взаємодії та зробити поля операторними

$$\hat{\mathcal{L}}_{i,int} = - \sum_k \frac{m_k}{v} \hat{f}_k \hat{f}_k \hat{h}, \quad (11.24)$$

де  $\hat{f}$  – вторинно квантовані вільні ферміонні поля,  $\hat{h}$  – скалярне поле Хігса. Тоді згідно (1.55) розклад  $\hat{S}$ -матриці матиме вигляд<sup>1</sup>:

$$\hat{S} = \hat{T} e^{-\frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N} [m_e \hat{e}(x) \hat{e}(x) + m_\mu \hat{\mu}(x) \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{h}(x)} =$$

<sup>1</sup>Оператор нормального впорядкування тут є необхідним. Якщо його не вводити, то матимемо ненульове значення "скалярного" струму  $\hat{f}_k \hat{f}_k$  у вакуумі та згідно з теоремами Віка нефізичне ненульове спарювання між  $\hat{f}_k(x)$  та  $\hat{f}_k(x)$  в одній точці.



$$= \hat{1} + \left(\frac{-i}{v}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}[m_e \hat{e}(x) \hat{e}(x) + m_\mu \hat{\mu}(x) \hat{\mu}(x) + \dots] \hat{h}(x) + \dots, \quad (11.25)$$

де поле  $\hat{h}(x)$  визначається як (див. (Д3.1.3)):

$$\hat{h}(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{h}_{\vec{k}}^- e^{-i kx} + \hat{h}_{\vec{k}}^+ e^{i kx} \right), \quad (11.26)$$

в якому  $\hat{h}_{\vec{k}}^+, \hat{h}_{\vec{k}}^-$  — оператори народження, знищення бозонів Хігса з 4-імпульсом  $k$ .

Позначимо початковий стан бозона Хігса ( $p_1$ ), а електрона та позитрона в кінцевому стані як ( $p_2; \mu_2$ ) та ( $p_3; \mu_3$ ). Початковий та кінцевий стани в представленні чисел заповнення мають вигляд:

$$\begin{aligned} |(p_1)\rangle &= \hat{h}_1^+ |0\rangle; \\ \langle(p_2, \mu_2); (p_3, \mu_3)| &= \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{b}_3, \end{aligned} \quad (11.27)$$

де  $\hat{a}_i, \hat{b}_i$  ( $\hat{a}_i^+, \hat{b}_i^+$ ) — оператори знищення (народження) електронів та позитронів відповідно.

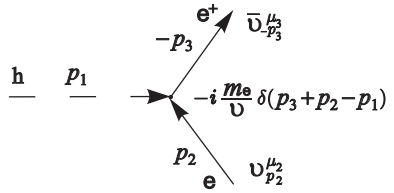
Перше незникаюче наближення буде вже в першому порядку  $S$ -матриці від доданка, що містить електрон-позитронне поле:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \langle(p_2, \mu_2); (p_3, \mu_3) | \hat{S}^{(1)} | (p_1)\rangle = \\ &= -i \frac{m_e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{b}_3 \hat{N}[\hat{e}(x) \hat{e}(x)] \hat{h}(x) \hat{h}_1^+ | 0\rangle = \\ &= /(\mathbf{11.5}), (\mathbf{11.6})/ = -i \frac{m_e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{\bar{v}_2 v_{-3}}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3}} e^{i(p_1 - p_2 - p_3)x} = \\ &= -i \frac{m_e}{v} \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3)}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3}} \bar{v}_2 v_{-3}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Очевидно, що цю формулу можна також записати за допомогою правил діаграмної техніки Фейнмана з розд. 9, якщо зробити такі зміни. По-перше, ввести лінію скалярного поля (пунктирна пряма). По-друге, змінити формулу, що відповідає точці: коефіцієнт  $(-ie)$  за-

мінити на  $(-i \cdot m_f/v)$  і забрати  $\gamma$ -матрицю.

Зрозуміло, що формули для розпаду бозона Хігса на інші ферміони відрізняються від (11.28) лише зміною параметра  $m_f$ . Отже, імовірність розпаду татиме зі зростанням маси ферміонів.



**Розпад Z-бозона на прикладі розпаду на  $e^- e^+$ -пару**

Розглянемо взаємодію векторного поля з ферміонним на прикладі розпаду Z-бозону. Відповідний лагранжіан взаємодії має вигляд:

$$\mathcal{L}_{int} = -B \sum_k \bar{f}_k \gamma^\mu (g_v^{fk} - g_a^{fk} \gamma^5) f_k Z_\mu, \tag{11.29}$$

де  $Z_\mu$  –  $\mu$ -та компонента дійсного (нейтрального) масивного векторного поля, а сума проводиться за всіма ферміонами, що є в СМ. Відповідний ферміонний струм, з яким взаємодіє Z-бозон, є нейтральним. Параметр  $B = e/\sin 2\theta_w$ , параметри  $g_v^{fk}$ ,  $g_a^{fk}$  визначаються типом ферміонів і є відомими в СМ, їх чисельне значення для нас зараз не є принциповим.

Перехід до вторинно квантованої теорії відбувається як і раніше

$$\hat{\mathcal{L}}_{i,int} = -B \sum_k \hat{\bar{f}}_k \gamma^\mu (g_v^{fk} - g_a^{fk} \gamma^5) \hat{f}_k \hat{Z}_\mu, \tag{11.30}$$

де  $\hat{f}$  – вторинно квантовані вільні ферміонні поля,  $\hat{Z}$  – векторне поле Z-бозона. Тоді згідно з (1.55) розклад  $\hat{S}$ -матриці матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{T} e^{-iB \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}[\hat{e} \gamma^\mu (g_v^e - g_a^e \gamma^5) \hat{e} + \dots]} \hat{Z}_\mu = \\ &= \hat{1} + (-iB) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{N}[\hat{e} \gamma^\mu (g_v^e - g_a^e \gamma^5) \hat{e} + \dots] \hat{Z}_\mu(x) + \dots, \end{aligned} \tag{11.31}$$

в якому поле  $\hat{Z}(x)$  визначається як (див. (Д4.1.12)):

$$\hat{Z}_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V \varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \hat{z}_{\lambda, \vec{k}} e^{-i k x} + \epsilon_\mu^{*\lambda}(\vec{k}) \hat{z}_{\lambda, \vec{k}}^+ e^{i k x} \right), \tag{11.32}$$

де  $\hat{z}_{\lambda, \vec{k}} (\hat{z}_{\lambda, \vec{k}}^+)$  є оператором знищення (народження) частинок з 4-імпульсом  $k$  та поляризацією  $\lambda$ .

Розглянемо розпад  $Z$ -бозона на електрон-позитронну пару. Позначимо початковий стан  $Z$ -бозона  $(p_1; \lambda_1)$ , а електрона та позитрона в кінцевому стані як  $(p_2; \mu_2)$  та  $(p_3; \mu_3)$ . Потрібно зробити все аналогічно до попереднього випадку розпаду бозона Хігса, тоді отримуємо:

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} &= \langle (p_2, \mu_2); (p_3, \mu_3) | \hat{S}^{(1)} | (p_1; \lambda_1) \rangle = \\
 &= (-iB) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \langle 0 | \hat{a}_2 \hat{b}_3 \hat{N} [\hat{e}(x) \gamma^\mu (g_v^e - g_a^e \gamma^5) \hat{e}(x)] \hat{Z}_\mu(x) \hat{z}_1^+ | 0 \rangle = \\
 &= (-iB) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{\bar{v}_2 \gamma^\mu (g_v^e - g_a^e \gamma^5) v_{-3} \epsilon_\mu^{\lambda_1}(\vec{p}_1)}{\sqrt{2V \epsilon_1 2V \epsilon_2 2V \epsilon_3}} e^{-i(p_1 - p_2 - p_3)x} = \\
 &= (-iB) \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3)}{\sqrt{2V \epsilon_1 2V \epsilon_2 2V \epsilon_3}} \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1}(\vec{p}_1) (g_v^e - g_a^e \gamma^5) v_{-3}. \quad (11.33)
 \end{aligned}$$

Очевидно, дану формулу можна також записати за допомогою правил діаграмної техніки з розд. 9, якщо замінити формулу, що відповідає точці: коефіцієнт  $(-ie)$  замінити на  $(-iB)$ , а матрицю  $\gamma^\mu$  замінити на комбінацію  $\gamma^\mu (g_v^e - g_a^e \gamma^5)$ . Також слід змінити зміст внутрішньої хвилястої лінії: тепер вона відповідатиме пропагатору векторного масивного нейтрального поля  $Z$ -бозона.

*Отже, правила діаграмної техніки Фейнмана справді можуть бути використані в СМ. Необхідно лише ввести додаткові лінії, що відповідають новим типам полів та змінити формулу, яка відповідає точці. Зазначимо, що в цьому випадку спарювання між вторинно квантованими функціями різних типів полів дають нульове значення.*

## Завдання

1. Покажіть перехід від (11.11) до (11.13).
2. Схематично зобразіть всі можливі діаграми  $e - \mu$ -розсіяння в четвертому порядку теорії збурень.

3. Розгляньте процес  $e - \mu^+$ -розсіяння в другому порядку теорії збурень врахувавши, що переносником взаємодії можуть бути як фотони так і  $Z$ -бозони. Запишіть амплітуду процесу.
4. Розгляньте процес  $e - e^+$  анігіляції з подальшим утворенням пари  $\mu - \mu^+$  в другому порядку теорії збурень врахувавши, що переносником взаємодії можуть бути як фотони так і  $Z$ -бозони. Запишіть амплітуду процесу.
5. Доведіть співвідношення  $\overline{\hat{W}_\chi^-(x)\hat{W}_\xi^-(x')} = \overline{\hat{W}_\chi^+(x)\hat{W}_\xi^+(x')} = 0$ .
6. Виходячи з (11.22) запишіть діаграму реакції  $e + \nu_\mu \rightarrow \mu + \nu_e$ . Вкажіть, який саме з двох наявних  $W^\pm$  бозонів бере участь у реакції, а також чому відсутня діаграма, в якій лінії виходу кінцевих продуктів реакції переставлені місцями.
7. Запишіть діаграми та амплітуди розсіяння  $e + \nu_e \rightarrow e' + \nu_e'$  за участі нейтральних та заряджених векторних бозонів у другому та четвертому порядках теорії збурень.
8. Виходячи з (11.33), запишіть діаграму розпаду  $Z$ -бозона на  $e - e^+$ -пару.

## ЧАСТИНА II

ІМОВІРНІСТЬ РОЗПАДУ ТА ПЕРЕРІЗ  
РОЗСІЯННЯ ЧАСТИНОК.  
ПРИКЛАДИ РОЗРАХУНКІВ

## РОЗДІЛ 12

### Імовірність розпаду та переріз розсіяння частинок. Умова унітарності

Розглянемо два найбільш важливих випадки опису взаємодії частинок згідно з формулою (1.43). По-перше, процеси розпаду однієї частинки на дві та на три частинки. По-друге, процес взаємодії (розсіяння) двох частинок, що призводить до зміни їх станів.

#### Розпад однієї частинки на дві

Розглянемо розпад однієї частинки на дві. Тобто  $N_i = 1$ ,  $N_f = 2$ . Нехай перша частинка має 4-імпульс  $E_1$ ,  $\vec{p}_1$ , а дві утворені:  $E_3$ ,  $\vec{p}_3$  та  $E_4$ ,  $\vec{p}_4$ . Тоді ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу (1.43) дорівнюватиме

$$\begin{aligned} \frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} &= \frac{|M_{fi}|^2}{2E_i} d\Phi_2 = / (1.44) / = \\ &= \frac{\delta(E_1 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{E_1 E_3 E_4} d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Розглянемо процес розпаду в системі центра інерції, тобто, коли початкова частинка перебуває в стані спокою:  $\vec{p}_1 = 0$ ,  $E_1 = M$ , де  $M$  – маса початкової частинки. Тоді

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(M - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{ME_3 E_4} d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4 = B d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4, \quad (12.2)$$

де літерою  $B$  для зручності позначимо частину виразу для ймовірності переходу, що не включає в себе диференціали за імпульсами кінцевих частинок.

Отриманий вираз (12.2) визначає ймовірність розпаду однієї частинки на дві інші з характеристиками  $p_3$  та  $p_4$ , що задані з точністю  $d\vec{p}_3$ ,  $d\vec{p}_4$ . Однак цей вираз має явний недолік: його важко порівняти з величинами, що експериментально спостерігаються внаслідок наявності дельта-функцій. Це природно, оскільки в (12.2) забагато зайвої

інформації. Величини  $p_3$ ,  $p_4$  не є довільними, а пов'язані законами збереження, що містяться в аргументах дельта-функцій.

Справді, якщо знаємо  $\vec{p}_4$ , то однозначно відомо й  $\vec{p}_3$ . Отже, будемо вимірювати лише  $\vec{p}_3$ , не звертаючи уваги яким буде  $\vec{p}_4$ . Математично це буде відповідати визначенню імовірності переходу системи у стан з фіксованим значенням  $\vec{p}_3$  та в усі стани за  $\vec{p}_4$ , тобто інтегруванню по  $d^3\vec{p}_4$ . При цьому фізичне значення  $\vec{p}_4$  автоматично отримується завдяки наявності відповідної дельта-функції:

$$\int d^3\vec{p}_4 [B d^3\vec{p}_3] = \frac{\delta(M - E_3 - E_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \left. \frac{|M_{fi}|^2}{M E_3 E_4} \right|_{\vec{p}_3 = -\vec{p}_4} \cdot d^3\vec{p}_3. \quad (12.3)$$

Тепер необхідно позбавитися від дельта-функції від енергії, тобто знайти ймовірність переходу в усі можливі стани за сумарною енергією кінцевих частинок проінтегрувавши за  $d(E_3 + E_4)$ . Для цього зазначимо, що

$$\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \Rightarrow |\vec{p}_3|^2 = |\vec{p}_4|^2 \Rightarrow |\vec{p}_3| |d\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| |d\vec{p}_4|; \quad (12.4)$$

$$E_3^2 = \vec{p}_3^2 + m_3^2 \Rightarrow |E_3| |dE_3| = |\vec{p}_3| |d\vec{p}_3|; \quad (12.5)$$

$$E_4^2 = \vec{p}_4^2 + m_4^2 \Rightarrow |E_4| |dE_4| = |\vec{p}_4| |d\vec{p}_4|. \quad (12.6)$$

Тоді

$$d(E_3 + E_4) = \frac{|\vec{p}_3| |d\vec{p}_3|}{E_3} + \frac{|\vec{p}_4| |d\vec{p}_4|}{E_4} = \left( \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} \right) |\vec{p}_3| |d\vec{p}_3| \Rightarrow \quad (12.7)$$

$$d\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 |d\vec{p}_3| d\Omega_3 = \frac{E_3 E_4}{E_3 + E_4} d(E_3 + E_4) |\vec{p}_3| d\Omega_3, \quad (12.8)$$

і вираз (12.3) можна записати як

$$\int [B d^3\vec{p}_3] d^3\vec{p}_4 = \frac{\delta(M - E_3 - E_4) d(E_3 + E_4)}{2^5 \pi^2} \cdot \left. \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{M(E_3 + E_4)} \right|_{\vec{p}_3 = -\vec{p}_4}. \quad (12.9)$$

Провівши інтегрування за  $d(E_3 + E_4)$ , отримаємо ймовірність розпаду за одиницю часу початкової частинки на дві частинки, одна з яких має імпульс, що за модулем дорівнює  $|\vec{p}_3|$ , а за напрямком знаходиться в межах тілесного кута  $d\Omega_3$ :

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{M^2}. \quad (12.10)$$

Значення модуля імпульсу, спільне для обох частинок, легко знайти із закону збереження енергії, враховуючи, що  $|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$ :

$$M = \sqrt{m_3^2 + |\vec{p}_3|^2} + \sqrt{m_4^2 + |\vec{p}_3|^2}. \quad (12.11)$$

Воно визначається винятково значеннями мас кінцевих частинок і становить

$$|\vec{p}_3| = \frac{M}{2} S(M, m_3, m_4), \quad (12.12)$$

де  $S(M, m_3, m_4)$  – безрозмірна функція, що менша від одиниці:

$$S(M, m_3, m_4) = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_3 + m_4}{M}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_3 - m_4}{M}\right)^2\right]} \theta(M - m_3 - m_4). \quad (12.13)$$

Оскільки найменше можливе значення для модуля імпульсу  $|\vec{p}_3|$  це нуль, то з (12.11) випливає, що процес розпаду частинки з масою  $M$  на частинки з масами  $m_3$  та  $m_4$  є енергетично дозволеним лише за умови  $M \geq m_3 + m_4$ , що явно враховується у (12.13) завдяки наявності  $\theta$ -функції Хевісайда.

Повна ймовірність розпаду за одиницю часу буде, відповідно,

$$\Gamma = \int d\Gamma. \quad (12.14)$$

У випадку, коли ймовірність розпаду не залежить від напрямку<sup>1</sup>, в якому частинки розлітаються, вираз (12.10) можна проінтегрувати за тілесним кутом та отримати значення повної ширини двочастинкового розпаду частинки з масою  $M$  у системі центра інерції на частинки з масами  $m_3$  та  $m_4$  у вигляді

$$\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3|}{8\pi M^2} = \frac{1}{16\pi M} \cdot |M_{fi}|^2 S(M, m_3, m_4), \quad (12.15)$$

де при обчисленні функції  $|M_{fi}|^2$  треба використовувати значення модуля імпульсу частинок, що розлітаються (12.12). Зазначимо, що у

<sup>1</sup>Для частинок зі спіном з певною поляризацією в загальному випадку зазначена умова не виконується, оскільки величина  $|M_{fi}|^2$  може залежати від кута між напрямком спіну початкової частинки та напрямком імпульсу частинок, що розлітаються.



випадку, коли в кінцевому стані буде дві тотожні частинки, згідно з розд. 1, результат вираз для ширини розпаду слід розділити на 2.

Якщо частинка може розпадатися по декількох каналах реакції, то повна ймовірність розпаду буде

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i, \quad (12.16)$$

де  $\Gamma_i$  – ймовірність розпаду в  $i$ -му каналі.

Отже, розпад частинок характеризується ймовірністю розпаду за одиницю часу  $\Gamma$  (шириною розпаду). Її можна розуміти як відношення кількості частинок, що розпалися за одиницю часу до загальної кількості частинок.

Розглянемо систему з багатьох частинок ( $N$ ), що розпадається. Очевидно, що зміна кількості частинок з часом пропорційна кількості цих частинок з коефіцієнтом пропорційності  $\Gamma$ :

$$dN/dt = -\Gamma N. \quad (12.17)$$

Отже, кількість частинок, що не розпалися до певного моменту часу  $t$ :

$$N = N_0 e^{-\Gamma(t-t_0)}, \quad (12.18)$$

де  $N_0$  – початкова кількість частинок у момент часу  $t_0$ . Значимо, що розпад частинки має ймовірносний характер – формула (12.22) описує розпад сукупності частинок, а коли саме розпадеться конкретно виділена частинка не відомо.

Очевидно, що ширина розпаду має розмірність оберненого часу або енергії. Загальноновживаним є вимірювання ширини розпаду частинок в енергетичних одиницях (MeV, GeV тощо). Характерний час життя частинки визначається як

$$\tau = 1/\Gamma. \quad (12.19)$$

В загальному випадку, коли нестабільна частинка масою  $M$  та з енергією  $E$  рухається зі швидкістю  $v$  то, згідно з теорією відносності, її час життя зростає

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau, \quad (12.20)$$

де  $\beta = v/c$ ,  $c$  – швидкість світла. Ймовірність того, що частинка буде існувати протягом часу  $t_0$  і не розпадеться визначається як

$$P = e^{-t_0\Gamma/\gamma} = e^{-t_0\Gamma M/E}. \quad (12.21)$$

Поряд з визначенням характерного часу життя для нестабільної частинки, що рухається зі швидкістю  $v$ , зручно також ввести поняття характерної довжини пробігу, яку проходить частинка перед тим як розпадеться:

$$L = \tau\gamma v = \tau|\vec{p}|/M, \quad (12.22)$$

та ввести ймовірність того, що при проходженні шляху  $x_0$  вона не розпадеться:

$$P = e^{-x_0\Gamma/(v\gamma)} = e^{-x_0\Gamma M/|\vec{p}|} = e^{-x_0/L}. \quad (12.23)$$

Поняття довжини пробігу є надзвичайно важливим з практичної точки зору, адже воно безпосередньо визначає на якій відстані від області народження нестабільних частинок слід ставити детектори для реєстрації цих частинок або продуктів їх розпаду.

### Розпад однієї частинки на три частинки

Розглянемо розпад однієї частинки на три частинки, тобто  $N_i = 2$ ,  $N_f = 3$ . Нехай початкова частинка має масу  $M$  та 4-імпульс  $P$ , а три нових частинки мають маси  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  та 4-імпульси  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .

Відразу зазначимо, що якщо всі частинки, що беруть участь у реакції безспінові, або процес усереднений за спіновими індексами, то розпад характеризується лише двома незалежними кінематичними змінними. Справді, стан трьох кінцевих частинок повністю визначається векторами їх імпульсів, отже маємо  $3 \times 3 = 9$  змінних. На них накладається 4 обмеження, що визначаються законами збереження енергії та імпульсу. Якщо перейти у систему відліку, де початкова частинка покоїться, то стає зрозумілим, що розпад на три частинки є ізотропним і не залежить від початкової орієнтації системи відліку. Це означає, що слід відняти ще три змінні (три кутові змінні), що характеризують орієнтацію системи як цілого. В результаті отримуємо  $9 - 4 - 3 = 2$  незалежні змінні. За звичай, в якості двох незалежних кінематичних змінних обирають дві лоренц-інваріантні величини з трьох наступних:

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2; \quad m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2; \quad m_{13}^2 = (p_1 + p_3)^2, \quad (12.24)$$

де  $m_{ij}$  – ефективні маси, що пов’язані між собою співвідношенням

$$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (12.25)$$

де  $s = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = P^2 = M^2$ .

Ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу (1.43) дорівнюватиме

$$\begin{aligned} \frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} &= d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{2E} d\Phi_3 = / (1.44) / = \\ &= \frac{|M_{fi}|^2}{2E} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \delta(E - E_1 - E_2 - E_3) \frac{1}{8(2\pi)^9} \frac{d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{p}_3}{E_1 E_2 E_3}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Розглянемо процес розпаду в системі центра інерції, тобто, коли початкова частинка перебуває в стані спокою:  $\vec{P} = 0$ ,  $E = M$  та проінтегруємо за  $d\vec{p}_2$ :

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{16M(2\pi)^5} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3) \frac{d\vec{p}_1 d\vec{p}_3}{E_1 E_2 E_3}, \quad (12.27)$$

де  $\vec{p}_2 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_3)$  та

$$E_2^2 = m_2^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_3)^2 = m_2^2 + \vec{p}_1^2 + \vec{p}_3^2 + 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta_{13}. \quad (12.28)$$

Врахувавши (12.4), запишемо тепер  $d\vec{p}_1 d\vec{p}_3$  в сферичній системі відліку

$$d\vec{p}_1 d\vec{p}_3 = |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| d\Omega_1 |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega_3 = |\vec{p}_1| E_1 dE_1 d\Omega_1 |\vec{p}_3| E_3 dE_3 d\Omega_3, \quad (12.29)$$

де  $d\Omega_1 = \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$ ,  $d\Omega_3 = \sin \theta_{13} d\theta_{13} d\varphi_3$ , кути  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  обрані відносно довільної вісі у просторі, кути  $\theta_{13}$ ,  $\varphi_3$  обрані відносно напрямку вектора  $\vec{p}_1$ . Тоді отримаємо

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{16M(2\pi)^5} \delta(E - E_1 - E_2 - E_3) \frac{|\vec{p}_1| dE_1 d\Omega_1 |\vec{p}_3| dE_3 d\Omega_3}{E_2}. \quad (12.30)$$

Згідно з виразом (12.28) зміна значення кута  $\theta_{13}$ , при сталих значеннях модулів імпульсів, призводить до зміни енергії 2 частинки:

$$\sin \theta_{13} d\theta_{13} = \frac{E_2 dE_2}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|}. \quad (12.31)$$

Використавши цей факт, зведемо інтегрування за  $\theta_{13}$  до інтегрування за  $dE_2$  та отримаємо:

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{16M(2\pi)^5} dE_1 dE_3 d\varphi_3 d\Omega_1. \quad (12.32)$$

Вважаючи, що  $|M_{fi}|^2$  не залежить від кутових величин, проінтегруємо за кутовими змінними та отримаємо

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{8M(2\pi)^3} dE_1 dE_3. \quad (12.33)$$

Замість інтегрування за енергіями частинок, можна перейти до інтегрування за ефективними масами, згідно зі співвідношеннями (12.24):  $m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3$ , тобто  $dm_{12}^2 = -2MdE_3$ . Аналогічно отримуємо  $dm_{23}^2 = -2MdE_1$ . Отже, можна записати

$$d\Gamma = \frac{|M_{fi}|^2}{32M^3(2\pi)^3} dm_{12}^2 dm_{23}^2. \quad (12.34)$$

Отже ми справді отримали залежність ширини розпаду лише від двох кінематичних параметрів ( $E_1, E_3$  або  $m_{12}, m_{23}$ ). Визначимо діапазон можливих значень нових змінних:  $m_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2 = (P - p_k)^2$ . Очевидно, що найменше значення  $m_{ij}^2$  буде для нерухомих частинок  $\min(p_i + p_j)^2 = (m_i + m_j)^2$ , а максимальне значення визначається  $(P - p_k)^2 = (M - m_k)^2$ , отже

$$(m_1 + m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq (M - m_3)^2, \quad (12.35)$$

$$(m_3 + m_2)^2 \leq m_{23}^2 \leq (M - m_1)^2. \quad (12.36)$$

Співвідношення (12.28) визначає граничні (мінімальне та максимальне) значення енергії  $E_2$ :

$$E_2^2_{max/min} = m_2^2 + \vec{p}_1^2 + \vec{p}_3^2 \pm 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| = m_2^2 + E_1^2 - m_1^2 + E_3^2 - m_3^2 \pm 2|\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \quad (12.37)$$

З системи рівнянь, що записана у системі відліку, де початкова частинка нерухома

$$m_{12}^2 = (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3, \quad (12.38)$$

$$m_{23}^2 = (P - p_1)^2 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1, \quad (12.39)$$

$$m_{13}^2 = (P - p_2)^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_2, \quad (12.40)$$

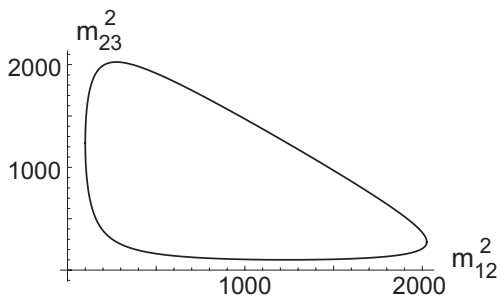
можна виразити енергії частинок через ефективні маси:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_{23}^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_{13}^2}{2M}, \quad E_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - m_{12}^2}{2M}. \quad (12.41)$$

Згідно з (12.25) параметр  $m_{13}^2$  можна виразити через інші ефективні маси:  $m_{13}^2 = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_{12}^2 - m_{23}^2$ . Підставивши вирази для енергій частинок (виражені через ефективні маси) у співвідношення (12.37), що визначає граничні значення енергії частинок, ми отримуємо вираз від двох параметрів  $m_{12}^2$  та  $m_{23}^2$ , з якого можна явним чином виразити граничні значення параметра  $m_{23}^2$  через  $m_{12}^2$ :

$$m_{23}^2_{\max/\min} = \frac{M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_{12}^2}{2} + \frac{(M^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_1^2) \pm \sqrt{\lambda(M^2, m_3^2, m_{12}^2)\lambda(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2)}}{2m_{12}^2}, \quad (12.42)$$

де  $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ . Графічні представлення області дозволених кінематичних параметрів, що описують тричастинковий розпад, отримали назву *діаграм Даліца*. Співвідношення (12.42) безпосередньо дозволяють побудувати діаграму Даліца в площині параметрів  $(m_{12}^2, m_{23}^2)$ , див. рис. 12.1. Область дозволених параметрів знаходиться всередині отриманого трикутника. Значення параметрів ззовні наведеного трикутника не є фізичними, оскільки суперечать законам збереження енергії-імпульсу в реакції.



**Рис. 12.1.** Діаграма Даліца для розпаду частинки масою 50 МеВ на три частинки з рівними масами 5 МеВ.

Сама по собі форма діаграми Даліца може сказати лише про маси кінцевих частинок. Набагато цікавішим є розподіл подій в межах діаграми Даліца, тобто які значення точок  $m_{12}^2$ ,  $m_{23}^2$  більше або менше реалізуються в експериментах. Це визначається залежністю  $M_{fi}^2$  від зазначених координат та дією законів збереження (дискретні симетрії). Розгляд цих питань виходить за межі даного курсу, див. детальніше [20].

### Розсіяння частинок

Розглянемо процес розсіяння однієї частинки на іншій. Нехай до взаємодії частинки характеризуються 4-імпульсом і масою  $(p_1, m_1)$  та  $(p_2, m_2)$ , а після взаємодії –  $(p_3, m_3)$  та  $(p_4, m_4)$ , відповідно. Тобто  $N_i = 2$ ,  $N_f = 2$ , тоді ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу (1.43) дорівнюватиме:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)}{V 2^6 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4}{E_1 E_2 E_3 E_4}. \quad (12.43)$$

Розглянемо процес у системі центра інерції:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \frac{\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)}{V 2^6 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4}{E_1 E_2 E_3 E_4}. \quad (12.44)$$

За аналогією з проробленим вище описом розпаду частинки вираз (12.44) можна проінтегрувати за  $d^3 \vec{p}_4$  і, враховуючи, що співвідношення (12.8) справедливе, і в цьому випадку, проінтегрувати за сумарною енергією кінцевих частинок. Таким чином, отримаємо ймовірність переходу за одиницю часу двох початкових частинок у дві кінцеві частинки, одна з яких має імпульс, що за модулем дорівнює  $|\vec{p}_3|$ , а за напрямком знаходиться в межах тілесного кута  $d\Omega_3$ :

$$d\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{V} \cdot \frac{1}{2^6 \pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{E_1 E_2 E}, \quad (12.45)$$

де  $E = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$  – інваріант руху в системі.

З явного вигляду (12.45) випливає, що дана величина не є однозначно заданою (величина  $V$  може бути задана довільно великою). Більш того, коли зробити фізичний перехід  $V \rightarrow \infty$ , то ймовірність

процесу буде прямувати до нуля. У цьому немає нічого дивного, оскільки в нашій постановці задачі в початковому стані ми мали дві частинки, що довільно розташовані в нескінченно великому просторі. Ми довільно задали напрямок їх імпульсів і при цьому, звичайно, ймовірність того, що ці частинки підійдуть одна до одної на якусь кінцеву відстань, на якій вони зможуть провзаємодіяти, прямує до нуля. Тобто співвідношення (12.45) не придатне для практичного використання, і його потрібно довізначити.

**Задаємо визначення перерізу розсіяння [10].** У випадку, коли потік частинок летить на нерухому незмінну мішень (так званий розсіювальний центр) переріз розсіяння визначається як відношення кількості частинок  $N$ , що розсіялись за одиницю часу, до загальної кількості частинок  $N_0$ , що проходять за одиницю часу через одиницю поверхні площі поперечного перерізу пучка  $S$  (тобто до поверхневої густини частинок за одиницю часу  $n = N_0/S$ ):

$$\sigma = \frac{N}{n} = \frac{N}{N_0} S, \quad [\sigma] = [\text{довжина}]^2. \quad (12.46)$$

Тоді, якісно можна розуміти величину перерізу розсіяння як прицільної площі ( $N = \text{формально} = n\sigma$ ), в яку має потрапити частинка, щоб хоч якось змінити свої характеристики (розсіятися).

Вводять також поняття диференційного перерізу розсіяння  $d\sigma$ , що визначається як  $d\sigma = dN/n$ , де  $dN$  — кількість частинок, що розсіялись за одиницю часу та мають певні виділені характеристики (наприклад, розсіялись у певному кутовому діапазоні). Величина  $d\sigma$  повністю визначається законом взаємодії частинок з мішенню і є головною характеристикою процесу розсіяння.

У випадку зіткнення пучків частинок визначення перерізу розсіяння модифікується. Нехай існує один пучок частинок з об'ємною густиною частинок  $n_1$  (підкреслюємо, об'ємна, а не поверхнева густина, як в попередньому випадку) і швидкістю частинок в ньому  $v_1$  (4-імпульсом кожної з частинок пучка  $p_1$ ) та другий пучок з характеристиками, відповідно,  $n_2$ ,  $v_2$  ( $p_2$ ). Нехай частинки в цих пучках будуть напрямлені назустріч одна одній. У системі відліку, в якій частинки 2 нерухомі задача зводиться до зіткнення частинок пучка 1 з нерухомою мішенню. У цьому випадку кількість зіткнень, що відбуваються в об'ємі  $V$  впродовж часу  $t$ , дорівнює

$$N = \sigma v_{\text{відн}} n_1 n_2 V t, \quad (12.47)$$

де  $\sigma$  — переріз розсіяння, характеристика взаємодії частинок пучків між

собою,  $v_{\text{відн}}$  — швидкість частинок 1 у системі відліку, в якій частинки 2 нерухомі. В частковому випадку наведеного виразу, коли в пучку 1 знаходиться одна частинка ( $n_1 V = 1$ ) та кількість зіткнень  $N = 1$ , то вважаючи  $v_{\text{відн}} t = L$  отримуємо, що величина

$$L = \frac{1}{\sigma n_2} \quad (12.48)$$

є довжиною вільного пробігу частинки 1 в нерухомій мішені з концентрацією частинок  $n_2$ .

Кількість зіткнень є величиною інваріантною. Спробуємо записати її в довільній системі відліку у вигляді

$$N = A n_1 n_2 V t, \quad (12.49)$$

де  $A$  — величина, яку ми далі визначимо. Про  $A$  відомо лише те, що в системі спокою частинок мішені  $A = \sigma v_{\text{відн}}$ . **При цьому під  $\sigma$  ми будемо завжди мати на увазі переріз розсіяння в системі відліку, де мішень перебуває у спокої.**

Оскільки комбінація  $Vt^1$  є інваріантною величиною щодо перетворень Лоренца, то комбінація  $A n_1 n_2$  також має бути інваріантом. Відомо, що кількість частинок є інваріантом  $nV = inv$ , де об'єм змінюється як  $V = V_0 \sqrt{1 - v^2}$ , а знак 0 означає приналежність до системи спокою частинок. Отже густина частинок веде себе як  $n = n_0 / \sqrt{1 - v^2} = n_0 E / m$ , де  $E = m / \sqrt{1 - v^2}$  — енергією частинки. Тоді інваріантом буде також величина  $A E_1 E_2$ , де  $E_{1(2)}$  — енергії кожної з частинок першого (другого) пучка. Більш зручно записати інваріант у вигляді

$$A \frac{E_1 E_2}{p_1 p_2} = inv, \quad (12.50)$$

оскільки в системі спокою частинок 2 цей інваріант, як легко переконатись, дорівнює  $A$ . З іншого боку, у цій системі відліку  $A = \sigma v_{\text{відн}}$ . Отже, в довільній системі відліку

$$A = inv \frac{p_1 p_2}{E_1 E_2} = \sigma v_{\text{відн}} \frac{p_1 p_2}{E_1 E_2}. \quad (12.51)$$

Вираз для  $v_{\text{відн}}$  легко отримати, використавши 4-добуток  $p_1 p_2$ . У системі спокою частинки 2:

$$p_{1v} p_2^v = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1 - v_{\text{відн}}^2}} \Rightarrow v_{\text{відн}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2}}. \quad (12.52)$$

---

<sup>1</sup>При лоренцевих бустах  $V = V_0 \sqrt{1 - v^2}$ ,  $t = t_0 / \sqrt{1 - v^2}$ . Нижній знак 0 означає приналежність до системи спокою частинок.



Остаточно кількість зіткнень можна записати як

$$N = \sigma \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} n_1 n_2 V t, \quad (12.53)$$

звідки для перерізу розсіяння отримаємо

$$\sigma = \frac{N}{n_1 n_2 V t} \frac{E_1 E_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}. \quad (12.54)$$

У теорії поля взаємодія відбувається в усьому об'ємі  $V \rightarrow \infty$  за весь час  $T \rightarrow \infty$ , тоді

$$\sigma = \frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2} \frac{V E_1 E_2}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} = \frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2} \frac{1}{j}, \quad (12.55)$$

де  $N_1, N_2$  — кількість частинок у пучках,  $\frac{1}{T} \frac{N}{N_1 N_2}$  — імовірність переходу системи за одиницю часу з одного стану в інший (див. (1.43)), а  $j$  визначається як

$$j = \frac{I}{V E_1 E_2}, \quad \text{де } I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (12.56)$$

Зазначимо, що величини  $j$  та  $I$  визначаються лише за характеристиками двох частинок (однієї з частинок у першому та іншій в другому пучку).

Можна показати, що в системі центра інерції

$$I = |\vec{p}_1| (E_1 + E_2). \quad (12.57)$$

Враховавши, що  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ,  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$  та  $\vec{p} = E\vec{v}$  приходимо до висновку, що величина  $j$  за фізичним змістом є об'ємною густиною потоку частинок, що провзаємодіють:

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|}{V}, \quad (12.58)$$

де  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  — швидкості частинок<sup>1</sup>.

Зуважимо, що за допомогою визначення повного перерізу розсіяння (12.47) можна визначити довжину вільного пробігу  $l$  та характерний час між зіткненнями частинок  $\tau$ . Справді, щоб визначити зазначені характеристики для однієї частинки сорту 1 треба в (12.47) покласти  $n_1 V = 1$  та розглядати випадок, коли відбувається лише одне зіткнення, тоді

$$\tau_1 = \frac{1}{\sigma v_{\text{відн}} n_2}; \quad l_1 = v_{\text{відн}} \tau_1. \quad (12.59)$$

<sup>1</sup>Об'ємна густина потоку частинок, що летять назустріч одна одній,  $\vec{j} = n_1 \vec{v}_1 - n_2 \vec{v}_2$ . У випадку двох частинок  $n_1 = n_2 = N_{1,2}/V = 1/V$ , тобто  $\vec{j} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)/V$ . Тоді  $|\vec{j}| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|/V = (|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|)/V$ , що й узгоджується з (12.58)

Поняття диференційного перерізу розсіяння  $d\sigma$  вводиться аналогічно: замість  $N$  вводиться  $dN$ , що представляє кількість подій взаємодії, внаслідок яких частинки отримали певні виділені характеристики (наприклад, розсіялись у певному кутовому діапазоні).

Замість співвідношення (12.45), що виражає ймовірність переходу системи за одиницю часу з одного стану в інший, для опису взаємодії частинок будемо використовувати переріз розсіяння (12.55), (12.56), як відношення ймовірності переходу системи за одиницю часу зі стану  $i$  в стан  $f$  до об'ємної густини потоку частинок, що провзаємодіють

$$d\sigma = \frac{d\Gamma_{i \rightarrow f}}{j}. \quad (12.60)$$

Отже, розсіяння двох частинок у системі центра інерції (див. (12.56), (12.57)) описується диференційним перерізом розсіяння у формі

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = /(\text{12.45})/ = \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{|M_{fi}|^2}{E^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} d\Omega_3, \quad (12.61)$$

де  $E = E_1 + E_2$  — повна енергія системи. Якщо в результаті взаємодії тип частинок не змінився (не змінилися їх маси), то  $|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|$  і вираз для перерізу спрощується:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{E^2} d\Omega_3. \quad (12.62)$$

Зазначимо, що наведений вираз (12.60) можна застосовувати і у випадку, коли кількість початкових частинок  $N_i = 2$ , а кількість кінцевих частинок  $N_f$  будь-яка. Справді, дане визначення позбавляє від об'єму у виразі для ймовірності переходу (1.43), куди об'єм входить у ступені  $V^{1-N_i}$  незалежно від кількості кінцевих частинок  $N_f$ .

Зауважимо, якщо в кінцевому стані будуть  $N$  тотожних частинок, то згідно з розд. 1 результат інтегрування потрібно розділити на  $N!$ .

З явного визначення перерізу розсіяння (12.46) випливає, що його слід вимірювати в одиницях площі. У фізиці елементарних частинок, атомній та ядерній фізиці загальноновживаною одиницею виміру перерізу реакцій є барни<sup>1</sup>: 1 барн =  $10^{-24}$  см<sup>2</sup> = 100 фм<sup>2</sup>, що грубо відповідає площі перерізу атомного ядра (радіус протона  $\sim 1$  фм). Широко

<sup>1</sup>Барн походить від англ. *barn*, що означає комора, сарай. Назва пов'язана з тим, що більшість реакцій в ядерній фізиці мають переріз набагато менший за 1 барн. Для них величина 1 барн така ж велика як комора.

використовуються також похідні одиниці, наприклад: мегабарн (Мб,  $10^{-18}$  см<sup>2</sup>), кілобарн (кб,  $10^{-21}$  см<sup>2</sup>), мілібарн (мб,  $10^{-27}$  см<sup>2</sup>), мікробарн (мкб,  $10^{-30}$  см<sup>2</sup>), нанобарн (нб,  $10^{-33}$  см<sup>2</sup>), пікобарн (пб,  $10^{-36}$  см<sup>2</sup>), фемтобарн (фб,  $10^{-39}$  см<sup>2</sup>), аттобарн (аб,  $10^{-42}$  см<sup>2</sup>).

Корисно навести перехідне співвідношення між барами та енергетичними одиницями:

$$1 \text{ б} \approx 2.568 \cdot 10^3 \text{ GeV}^{-2}. \quad (12.63)$$

Вираз (12.55) корисно записати у вигляді

$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma_i N_1 N_2 j, \quad (12.64)$$

що визначає кількість подій в залежності від характеристик початкових пучків ( $i$  – канал реакції). Такий запис є зручним для аналізу (визначення перерізу) процесів, що можуть відбуватися при взаємодії одних і тих самих пучків початкових частинок. Наприклад, при  $e^-e^+$  або  $p-p^+$  зіткненнях на сучасних прискорювачах кінцеві продукти реакції містять майже всі частинки Стандартної моделі, див. детальніше розд.19. Тоді вираз (12.64) можна записати у вигляді

$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma_i L, \quad (12.65)$$

де величина  $L$  отримала назву світності (*luminosity*) та є характеристикою потоків взаємодіючих частинок. Вводять також інтегральну характеристику

$$N_i = \sigma_i \mathcal{L}, \quad (12.66)$$

де  $\mathcal{L}$  – інтегральна світність,  $N_i$  – кількість подій у каналі  $i$  протягом певного часу спостережень. З останнього визначення зрозуміло, що розмірність інтегральної світності є протилежною розмірності перерізу реакції. Світність вимірюють у барн<sup>-1</sup>.

Тоді знайшовши світність з даних по реакції, переріз якої добре відомий (наприклад, утворення  $\mu-\mu^+$  пари), переріз інших реакцій можна визначити знаючи лише кількість відповідних подій:

$$\sigma_x = N_x / \mathcal{L}. \quad (12.67)$$

### Розсіяння в зовнішньому постійному полі

Коли частинка розсіюється у зовнішньому постійному полі або у випадку, коли в системі центра інерції одна частинка з  $(E_{i1}, \vec{p}_{i1})$  розсіюється на набагато важчій від неї частинці <sup>1</sup>  $(E_{i2}, 0)$ , енергія легшої частинки не змінюється, а змінюється лише напрямом її імпульсу. Тому замість (1.34) потрібно представляти  $S$ -матрицю у вигляді

$$\hat{S}_{fi} = \delta_{fi} + i2\pi T_{fi} \delta \left( \sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right), \quad (12.68)$$

де ми врахували, що початкова частинка після взаємодії може розпастися на  $N_f$  кінцевих частинок.

Діючи за аналогією з (1.34) – (1.43), отримаємо ймовірність переходу за одиницю часу з початкового стану  $i$  в множину станів поблизу кінцевого стану  $f$ :

$$d\tilde{\Gamma}_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi) \left( \sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right)}{2V E_{i1}} |M_{fi}|^2 \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}}. \quad (12.69)$$

Переріз розсіяння отримується згідно з (12.60). У системі центра інерції  $j = |\vec{p}_{i1}|/(V E_{i1})$  згідно з (12.56), (12.57) у наближенні  $E_{i2} \rightarrow \infty$ :

$$d\sigma = \frac{d\tilde{\Gamma}_{i \rightarrow f}}{j} = \frac{(2\pi)\delta \left( \sum_{\beta=1}^{N_f} E_{f\beta} - E_{i1} \right)}{2|\vec{p}_{i1}|} |M_{fi}|^2 \prod_{\beta=1}^{N_f} \frac{d^3 \vec{p}_{f\beta}}{(2\pi)^3 2E_{f\beta}}. \quad (12.70)$$

У випадку пружнього розсіяння, тобто коли в кінцевому стані залишилась та сама частинка, можна записати  $d^3 \vec{p}_{f1} = |\vec{p}_{f1}|^2 d\vec{p}_{f1} d\Omega = |\vec{p}_{f1}| E_{f1} dE_{f1} d\Omega$  та  $|\vec{p}_{f1}| = |\vec{p}_{i1}|$ . Тоді, проінтегрувавши за енергією, отримаємо

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2} |M_{fi}|^2 d\Omega. \quad (12.71)$$

---

<sup>1</sup>У цьому випадку в системі центра інерції важча частинка може розглядатися як нерухоме джерело постійного зовнішнього поля.

### Кінематичні інваріанти

Якщо при розсіянні частинок у початковому та кінцевому станах перебувають по дві частинки, то незалежно від сорту частинок та закону їх взаємодії будуть виконуватися закони збереження чотири-імпульсу:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0, \quad (12.72)$$

де будь-які два 4-імпульси належать до початкових частинок ( $q_i^0 > 0$ ), а інші два — до кінцевих частинок ( $q_f^0 < 0$ ).

З даними чотирма частинками можливі такі реакції:

$$1 + 2 \rightleftharpoons 3 + 4 \quad (12.73)$$

$$1 + \bar{3} \rightleftharpoons \bar{2} + 4 \quad (12.74)$$

$$1 + \bar{4} \rightleftharpoons \bar{2} + 3, \quad (12.75)$$

де цифрами позначені відповідні частинки, а цифрами з рисками — античастинки.

Ці три реакції називають перехресними каналами однієї узагальненої реакції (див. розд. 9). Для реакції (12.73)  $q_1 = p_1$ ,  $q_2 = p_2$ ,  $q_3 = -p_3$ ,  $q_4 = -p_4$  і т.д. Наприклад, якщо частинки 1,3 електрони, а 2,4 фотони, то (12.73), (12.75) — це електрон-фотонне розсіяння, а реакція (12.74) — електрон-позитронна анігіляція або утворення фотонами електрон-позитронної пари (якщо стрілка в реакції зліва).

Із чотирьох 4-імпульсів можна утворити лише дві незалежні інваріантні величини. По-перше, рівність (12.72) зводить кількість незалежних параметрів до трьох. По-друге, з трьох величин, наприклад  $q_1, q_2, q_3$ , можна утворити шість інваріантів, серед яких  $q_1^2, q_2^2, q_3^2$  дорівнюють квадратам мас частинок, а інші ( $q_1 q_2, q_1 q_3, q_2 q_3$ ) пов'язані умовою

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2. \quad (12.76)$$

Як інваріантні параметри, керуючись зручністю використання, обирають не два, а три параметри, що отримали назву *змінних Мандельштама*:

$$s = (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2; \quad (12.77)$$

$$t = (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2; \quad (12.78)$$

$$u = (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2, \quad (12.79)$$

що пов'язані між собою співвідношенням

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (12.80)$$

Параметр  $s$  має простий фізичний зміст для реакції (12.73) у системі центра інерції, в якій

$$\begin{aligned} q_1 = p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad q_2 = p_2 = (E_2, -\vec{p}_1), \\ q_3 = -p_3 = (-E_3, -\vec{p}_3), \quad q_4 = -p_4 = (-E_4, \vec{p}_3). \end{aligned} \quad (12.81)$$

Тобто  $s$  є квадратом повної енергії початкових або кінцевих частинок у реакції  $s = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2$ . Аналогічний зміст мають параметри  $t, u$  для реакцій (12.74) та (12.75), відповідно. У зв'язку з цим реакції (12.73) – (12.75) називають реакціями  $s, t$  та  $u$  типу, відповідно.

Повернемося тепер до виразу для перерізу розсіяння в системі центра інерції у випадку, коли тип частинок при взаємодії не змінюється (12.62) (тобто нехай  $m_1 = m_3, m_2 = m_4$ , відповідно  $E_1 = E_3, E_2 = E_4$ ) і спробуємо записати вираз для перерізу в інваріантному вигляді.

В означенні (12.62) величина  $|M_{fi}|^2$  є інваріантом при перетвореннях Лоренца, а кутова частина  $d\Omega_3$  буде змінюватися при переході від однієї системи відліку до іншої. Щоб коректно записати кутову частину, використаємо означення

$$\begin{aligned} t = (q_1 + q_3)^2 = / (12.81) / = (p_1 - p_3)^2 = \\ = m_1^2 + m_2^2 - 2E_1^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos \theta, \end{aligned} \quad (12.82)$$

де  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{p}_1$  та  $\vec{p}_3$  (у системі центра інерції модулі імпульсів однакові  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$ ). Вважаючи, що енергії початкових частинок фіксовані, отримаємо

$$dt = 2|\vec{p}_1|^2 d(\cos \theta), \quad (12.83)$$

тобто

$$d\Omega_3 = \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\vec{p}_1|^2}. \quad (12.84)$$

Підставимо останній вираз у (12.62) та отримаємо диференціальний переріз розсіяння в інваріантній формі до перетворень Лоренца, що не змінюють напрямку відносного руху частинок<sup>1</sup>

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|M_{fi}|^2}{2|\vec{p}_1|^2 E^2} d\varphi d(-t) = \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t), \quad (12.85)$$

<sup>1</sup>При таких перетвореннях величина  $d\varphi$  не змінюється.

де ми використали (12.57).

На завершення зазначимо, що величину  $I$  можна також записати через кінематичні інваріанти

$$I^2 = [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]/4, \quad \text{де } s = (p_1 + p_2)^2. \quad (12.86)$$

У випадку взаємодії частинок з однаковими масами  $m$  маємо

$$I^2 = s[s - 4m^2]/4. \quad (12.87)$$

### Умова унітарності

Запишемо у явному вигляді умову унітарності матриці розсіяння (1.7) для  $S$  матриці у формі (1.34):

$$\begin{aligned} (SS^+)_{fi} &= \sum_n S_{fn} S_{ni}^+ = \sum_n S_{fn} S_{in}^* = \delta_{fi} = \\ &= \sum_n [\delta_{fn} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_n) T_{fn}] [\delta_{in} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_n) T_{in}^*] = \\ &= \sum_n \delta_{fn} \delta_{in} - \sum_n i \delta_{fn} (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_n) T_{in}^* + \sum_n i \delta_{in} (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_n) T_{fn} + \\ &\quad + \sum_n (2\pi)^8 \delta^4(P_f - P_n) \delta^4(P_i - P_n) T_{fn} T_{in}^* = \\ &= \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) [T_{fi} - T_{if}^*] + \\ &\quad + \sum_n (2\pi)^8 \delta^4(P_f - P_i) \delta^4(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^*. \quad (12.88) \end{aligned}$$

Звідки випливає

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(P_f - P_n) T_{nf}^* T_{ni}, \quad (12.89)$$

де остання рівність випливає з розгляду унітарності добутку  $S^+ S$ .

Особливий інтерес представляє випадок, коли після взаємодії частинка залишається у своєму попередньому стані  $i = f$  (напр., розсіяння на нульовий кут):

$$2Im[T_{ii}] = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(P_i - P_n) |T_{in}|^2, \quad (12.90)$$

де матриця  $T$  задається через амплітуду реакції згідно з (1.40), а підсумовування за  $n$  означає підсумовування за всіма можливими станами.

Проілюструємо корисність даного співвідношення для випадку, коли у початковому стані знаходиться одна частинка, яка може розпадатися на пари інших частинок. У цьому випадку матимемо

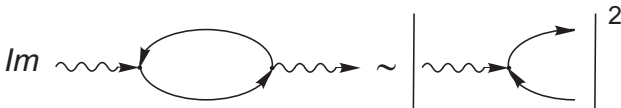
$$\begin{aligned} 2 \frac{Im[M_{ii}]}{2V E_i} &= (2\pi)^4 \sum_n \frac{|M_{in}|^2 \delta^4(P_i - P_n)}{(2V)^3 E_i E_{n_1} E_{n_2}} = \\ &= (2\pi)^4 \sum_{\lambda, k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{p}_{n_1}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{p}_{n_2}}{(2\pi)^3} \frac{|M_{in}|^2 \delta^4(P_i - P_n)}{(2V)^3 E_i E_{n_1} E_{n_2}} = /(\mathbf{12.1})/ = \\ &= \frac{1}{2^5 \pi^2 V} \sum_{\lambda, k} \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}_3| d\Omega_3}{E_i^2} = \sum_{\lambda, k} \int \frac{dW_{i \rightarrow f}}{TV}. \quad (12.91) \end{aligned}$$

де підсумовування за  $\lambda$  означає підсумовування за поляризацією частинок, підсумовування за  $k$  означає підсумовування за каналами реакції (напр., розпад на електрон-позитронну пару, мюон-антимюонну тощо).

Розглянувши реакцію в системі центру інерції  $E_i = M$  та повторивши розрахунки, що ми робили на початку розд., з урахуванням (12.10), отримуємо:

$$\frac{Im[M_{ii}]}{M} = \sum_k \Gamma_k, \quad (12.92)$$

де  $\Gamma_k$  – повна ширина реакції за каналом  $k$ . Іншими словами, наявність у амплітуди реакції  $i \rightarrow i$  уявної частини однозначно свідчить про те, що частинка у стані  $i$  є нестабільною та буде розпадається на інші частинки. Враховуючи, що величини у лівій та правій частинах виразу (12.90) повинні мати однакову точність за розкладом за сталою тонкої структури, приходимо до висновку, що матриця  $T_{in}$  у правій частині виразу повинна бути розрахована у двічі меншому порядку за сталою тонкої структури. Відповідно, сам вираз (12.90) у нашому випадку можна графічно розуміти як





Розглянемо тепер випадок, коли у початковому стані знаходяться дві частинки, які можуть розсіюватися лише на пари інших частинок. У цьому випадку, перейшовши до системи центру інерції, матимемо

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\text{Im}[M_{ii}]}{(2V)^2 E_{i_1} E_{i_2}} &= (2\pi)^4 \sum_n \frac{|M_{in}|^2 \delta^4(P_i - P_n)}{(2V)^4 E_{i_1} E_{i_2} E_{n_1} E_{n_2}} = \\
 &= (2\pi)^4 \sum_k \sum_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{p}_{n_1}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{p}_{n_2}}{(2\pi)^3} \frac{|M_{in}|^2 \delta^4(P_i - P_n)}{(2V)^4 E_{i_1} E_{i_2} E_{n_1} E_{n_2}} = /(\text{12.45})/ = \\
 &= \frac{1}{V} \sum_k \sum_\lambda \int d\Gamma_{i \rightarrow n} = \frac{1}{64V^2 \pi^2} \int d\Omega_{n_1} \frac{|M_{in}|^2 |\vec{p}_{n_1}|}{E_{i_1} E_{i_2} E_i}, \quad (\text{12.93})
 \end{aligned}$$

де підсумовування за  $\lambda$  означає підсумовування за поляризацією частинок, підсумовування за  $k$  означає підсумовування за каналами реакції,  $E_i = E_{i_1} + E_{i_2}$  – повна енергія системи двох частинок, а інтегрування за  $d\vec{p}_{n_1}$ ,  $d\vec{p}_{n_2}$  було проведено аналогічно як ми це робили на початку розд.

Домноживши обидві частини виразу (12.93) на обернену величину об'ємної густини потоку частинок (12.58)

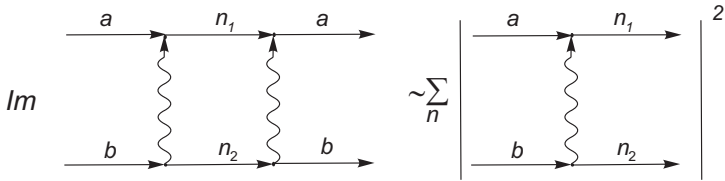
$$\frac{1}{j} = \frac{V E_{i_1} E_{i_1}}{|\vec{p}_{n_1}| (E_{i_1} + E_{i_2})} \quad (\text{12.94})$$

та використавши визначення перерізу розсіяння (12.61), отримаємо:

$$\text{Im}[M_{ii}] = 2 |\vec{p}_{i_1}| E_i \sum_k \sigma_{k t}, \quad (\text{12.95})$$

де  $\sigma_{k t}$  повний переріз розсіяння двох початкових частинок по  $k$ -му каналу реакції, а підсумовування відбувається за всіма каналами реакції. Зазначимо, що співвідношення (12.95) відоме у фізиці як *оптична теорема*. З явного вигляду (12.95) випливає, що наявність уявної частини в амплітуді розсіяння на нульовий кут однозначно призводить до того, що внутрішні лінії відповідної діаграми "розриваються" і у системі народжуються нові частинки.

Як і у попередньому випадку, вираз (12.90) для розсіяння двох частинок на нульовий кут можна графічно розуміти як

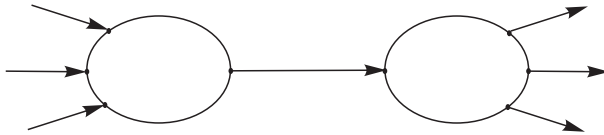


**Полюсні особливості амплітуд розсіяння**

Розглянемо питання, яке набуде принципової важливості при у третій частині даного посібника. Знайдемо полюсну структуру амплітуд розсіяння. Для цього розглянемо деяку реакцію  $i \rightarrow f$ , використаємо (12.89) та виділимо серед проміжних станів ( $n$ ) одночастинкові ( $n_1$ ) та неодночастинкові ( $n_2$ ):

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_{n_1} \delta^4(P_f - P_{n_1}) T_{fn_1} T_{in_1}^* + i(2\pi)^4 \sum_{n_2} \delta^4(P_f - P_{n_2}) T_{fn_2} T_{in_2}^* \tag{12.96}$$

У подальшому вклад неодночастинкових вкладів нас не буде цікавити і ми не будемо його розглядати.



**Рис. 12.2.** Схематичне зображення діаграми з одночастинковим проміжним станом.

Виділимо у  $T$  матрицях амплітуди реакції:

$$\begin{aligned} & \frac{M_{fi}}{\prod_i \sqrt{2VE_i} \prod_f \sqrt{2VE_f}} - \frac{M_{if}^*}{\prod_i \sqrt{2VE_i} \prod_f \sqrt{2VE_f}} = \\ & = i(2\pi)^4 \sum_{n_1} \delta^4(P_f - P_{n_1}) \frac{M_{fn_1}}{\sqrt{2VE_{n_1}} \prod_f \sqrt{2VE_f}} \cdot \frac{M_{in_1}^*}{\sqrt{2VE_{n_1}} \prod_i \sqrt{2VE_i}} \end{aligned} \tag{12.97}$$

та отримаємо

$$\begin{aligned} M_{fi} - M_{if}^* &= i(2\pi)^4 \sum_{n_1} \delta^4(P_f - P_{n_1}) \frac{M_{fn_1} M_{in_1}^*}{\sqrt{2VE_{n_1}} \sqrt{2VE_{n_1}}} = \\ &= i(2\pi)^4 \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V d\vec{p}_{n_1}}{(2\pi)^3} \delta^4(P_f - P_{n_1}) \frac{M_{fn_1} M_{in_1}^*}{2VE_{n_1}}. \end{aligned} \quad (12.98)$$

Врахуємо, що

$$2E_{n_1} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p_{n_1} \delta^4(p_{n_1}^2 - m^2) = \int d\vec{p}_{n_1}, \quad (12.99)$$

де ми врахували, що для вільної частинки у стані  $n_1$  виконується умова  $p_{n_1}^2 = m^2$ ,  $E_{n_1} > 0$  та

$$\delta[f(x)] = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}, \quad (12.100)$$

де  $x_k$  корені функції  $f(x)$ .

Взявши до уваги співвідношення (12.99), отримаємо

$$M_{fi} - M_{if}^* = 2\pi i \delta^4(p_{n_1}^2 - m^2) \sum_{\lambda} M_{fn_1} M_{in_1}^*, \quad (12.101)$$

де стани  $n_1$  та  $i, f$  пов'язані законами збереження енергії-імпульса.

Отриманий вираз не є зручним для аналізу. Згадаємо, що КЕД є теорією поля, що є інваріантною відносно  $C, P, T$  окремих перетворень. Зокрема, з  $P, T$  інваріантності випливає, що  $M_{fi} = M_{i'f'}$ , де стани  $f, i$  відрізняються від станів  $f', i'$  лише знаком спіральностей частинок (при тих самих імпульсах). Тоді для зазначених станів можна записати

$$M_{i'f'} - M_{f'i'}^* = 2\pi i \delta^4(p_{n_1}^2 - m^2) \sum_{\lambda} M_{i'n_1} M_{f'n_1}^*, \quad (12.102)$$

де ми залишаємо ті самі спіральні стани у станах  $n_1$ , бо по ним все одно відбувається підсумовування.

Додавши почленно два вирази (12.101) та (12.102), отримаємо

$$Im[\overline{M}_{fi}] = -\pi \delta^4(p_{n_1}^2 - m^2) R, \quad (12.103)$$

де величини

$$\overline{M}_{fi} = M_{fi} + M_{i'f'}, \quad R = - \sum_{\lambda} (M_{fn_1} M_{in_1}^* + M_{i'n_1} M_{f'n_1}^*), \quad (12.104)$$

є фактично амплітудами реакцій, що підсумовані за спіральностями кінцевих та початкових частинок.

Згадаємо тепер правило інтегрування з курсу теорії функцій комплексної змінної

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp i\pi f(0), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12.105)$$

де оператор  $\int$  означає інтегрування в сенсі головного значення по Коші, тобто

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{+\varepsilon}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x}.$$

Вираз (12.105) має корисний запис у операторному вигляді

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x). \quad (12.106)$$

Отже по уявній частині функції  $\overline{M}_{fi}$  (12.103) ми можемо відновити вигляд амплітуди реакції:

$$\overline{M}_{fi} = \frac{R}{p_{n_1}^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (12.107)$$

Зрозуміло, що той самий полюс буде і у амплітуди реакції  $M_{fi}$ , оскільки він не повинен залежати від спіральних станів.

Таким чином, ми приходимо до висновку, що амплітуда реакції має полюса у точках, коли квадрат 4-імпульсу віртуальної частинки (внутрішніх ліній) дорівнює квадрату маси відповідної реальної частинки.

## Завдання

1. Гіпотетична скалярна частинка  $X$  масою  $M = 500$  ГеВ у системі відліку, де вона по коїться, розпадається на дві нестабільні скалярні частинки  $Y$  з масами  $m = 1$  МеВ кожна. Ширина розпаду частинок  $Y$  відома:  $\Gamma_Y = 5 \cdot 10^{-11}$  ГеВ. Яку відстань у метрах пройдуть частинки  $Y$  перед тим, як розпадуться?
2. Чи можна у визначенні  $S = S'\theta(M - m_3 - m_4)$  (12.13) замінити  $\theta$ -функцію Хевісайда на умову дійсного значення функції  $S'$ ?
3. Побудуйте діаграму Даліца в координатах  $m_{12}^2, m_{23}^2$  для розпаду частинки масою 100 МеВ на три частинки з масами  $m_1 = 50$  МеВ,  $m_2 = m_3 = 5$  МеВ. Порівняйте з діаграмою на рис. 12.1.
4. Визначити повний переріз пружнього розсіяння частинок від абсолютно твердої важкої кулі радіуса  $R$ .
5. Визначити повний переріз розсіяння електронів на важкій зарядженій зарядом  $Q$  кулі радіуса  $R$  в класичному випадку.
6. Довести справедливість виразів (12.25) та (12.63).
7. Довести справедливість виразу (12.57).
8. Довести справедливість виразу (12.86).

## РОЗДІЛ 13

### Процеси резонансного розсіяння та розпаду

В цьому розділі буде розглядатися така взаємодія частинок, при якій народжується нова нестабільна частинка, яка в подальшому розпадається на інші частинки. Така ситуація досить часто зустрічається в експериментах на колайдерах. Більш того, переріз реакції при загальній енергії налітаючих частинок, що знаходиться в околі значення маси нестабільної проміжної частинки має легко спостережувану особливість – резонансний пік, що дозволяє встановити факт народження проміжної частинки в експериментах, її масу та час життя. Даний факт лежить в основі методу пошуку та дослідження нових частинок.

#### Розпад частинок в квантовій механіці

Нестабільна частинка в квантовій механіці, що утворилася в момент часу  $t = 0$ , характеризується тим, що квадрат модуля її хвильової функції зменшується з часом:

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(t=0)|^2 e^{-t/\tau}, \quad t > 0, \quad (13.1)$$

де  $\tau$  – величина з розмірністю часу, що отримала назву часу життя частинки. З даного виразу, зокрема впливає співвідношення (12.22). Ширина розпаду визначається як  $\Gamma = 1/\tau$ .

З іншого боку, часова залежність хвильової функції вільної частинки визначається як

$$\psi(t) = \psi(t=0)e^{-iE_\psi t} = \psi(t=0)e^{-iE_0 t - \Gamma t/2} = \psi(t=0)e^{-i(E_0 - i\Gamma/2)t}. \quad (13.2)$$

Отже для нестабільної частинки енергія є комплексною величиною:  $E_\psi = E_0 - i\Gamma/2$ .

Для Фур'є перетворення хвильової функції матимемо

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \frac{\psi(t=0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E - (E_0 - i\Gamma/2))t} \theta(t) = \\ &= \frac{i\psi(t=0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}, \quad (13.3) \end{aligned}$$

де  $\theta(t)$  – функція Хевісайда. Отже ми отримали

$$|\psi(E)|^2 = \frac{|\psi(t=0)|^2}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (13.4)$$

Останній вираз можна записати і в іншому вигляді, якщо домножити чисельник та знаменник виразу (13.3) на  $E + E_0$  та врахувати, що  $E + E_0 \simeq E$  (вважаємо, що  $\Gamma \ll E_0$ ), тоді отримуємо:

$$\psi(E) = \frac{i\psi(t=0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{2E}{E^2 - E_0^2 + iE\Gamma}, \quad (13.5)$$

звідки

$$|\psi(E)|^2 = \frac{|\psi(t=0)|^2}{2\pi} \frac{4E^2}{(E^2 - E_0^2)^2 - E^2\Gamma^2}. \quad (13.6)$$

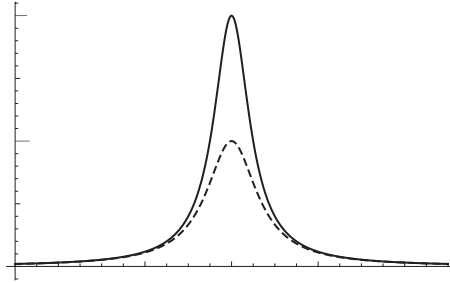
Зазначимо, що значення енергії  $E$  можна зіставити змінній Мандельштама  $s$ .

Корисно зазначити, що для стабільної частинки ( $\Gamma = 0$ ) матимемо лише один коефіцієнт Фур'є, котрий відповідає випадку  $E = E_0$ :

$$\psi(E) = \frac{\psi(t=0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E-E_0)t} = \sqrt{2\pi} \psi(t=0) \delta(E - E_0). \quad (13.7)$$

Ми приходимо до висновку, що стабільна частинка знаходиться в стані з визначеною енергією  $E = E_0$  протягом нескінченно великого часу, а нестабільна частинка може мати різні енергії в певному інтервалі  $\Delta E$ , але може розпастися в певному часовому інтервалі  $\Delta t$ . Ймовірність знайти нестабільну частинку з енергією  $E$  буде визначатися залежністю (13.4). Вона буде найбільшою при  $E = E_0$ , а при віддаленні енергії від значення  $E_0$  ймовірність знаходження такого стану системи швидко спадатиме, див. рис. 13.1. Невизначене значення енергії нестабільної частинки не повинно дивувати, оскільки це безпосередній наслідок співвідношення невизначеності Гайзенберга:  $\Delta E \cdot \Delta t \sim 1$ .

З явного вигляду залежності (13.4) випливає, що зі зменшенням ширини розпаду пік стає вищим, але в нижній частині має ту саму поведінку, що й пік з іншою шириною розпаду.



**Рис. 13.1.** Розподіл ймовірності  $(|\psi(E)|^2)$  знаходження нестабільної частинки в стані з певною енергією. Більш високому піку відповідає менша ширина розпаду.

### Розсіяння через проміжну нестабільну частинку

Для початку розглянемо процес зворотній до розпаду частинки, а саме розглянемо утворення частинки при взаємодії двох частинок, тобто коли  $N_i = 2$ ,  $N_f = 1$ . Нехай перша частинка має 4-імпульс  $E_A$ ,  $\vec{p}_A$  та масу  $m_A$ , друга –  $E_B$ ,  $\vec{p}_B$  та масу  $m_B$ , а частинка, що утворюється –  $E_R$ ,  $\vec{p}_R$  та масу  $M_R$ . Тоді ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу (1.43) дорівнюватиме

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \delta(E_A + E_B - E_R) \delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B - \vec{p}_R) \cdot \frac{\pi |M_{fi}|^2}{4VE_A E_B E_R} d^3 \vec{p}_R. \quad (13.8)$$

Перейдемо в систему центру інерції, коли  $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$ ,  $\vec{p}_R = 0$ ,  $E_R = M_R$  та проінтегруємо за  $d^3 \vec{p}_R$ , отримаємо:

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \int d\vec{p}_R \frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = \delta(E_A + E_B - M_R) \cdot \frac{\pi |M_{fi}|^2}{4VE_A E_B M_R} \Big|_{\vec{p}_R=0}. \quad (13.9)$$

Отриманий вираз має декілька проблем. По-перше, він містить у собі погано визначену величину – об'єм системи, що може прямувати до нескінченності. В принципі, це не дивно, адже ймовірність того, що дві частинки з довільними напрямками імпульсів запуснені з великої відстані провзаємодіють справді прямує до нуля. Отже замість розгляду ймовірності даного процесу коректно розглядати переріз відповідної реакції. По-друге, даний вираз містить  $\delta$ -функцію, що дає



або нуль, або нескінченність і не дозволяє провести порівняння з експериментом. Ми розглянемо як вирішити зазначену проблему трохи пізніше.

Переріз реакції, що розглядається, має вигляд:

$$\sigma(AB \rightarrow R) = \frac{\Gamma_{i \rightarrow f}}{j} = /(\mathbf{12.56}), (\mathbf{12.86})/ = \frac{\pi |M_{fi}|^2 \delta(E_A + E_B - M_R)}{4M_R I}. \quad (13.10)$$

Згадавши, що  $M_R^2 = (p_A + p_B)^2 = s$ ,  $E_A + E_B = \sqrt{s}$  та записавши  $\delta(\sqrt{s} - M_R) = 2\sqrt{s} \delta(s - M_R^2)$  (використали співвідношення:  $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) / |f'(x_i)|$ , де  $x_i$  – корені функції  $f(x)$ ), отримуємо

$$\sigma(AB \rightarrow R) = \frac{\pi |M_{fi}|^2 \delta(s - M_R^2)}{2I}. \quad (13.11)$$

Якщо вважати, що амплітуда процесу  $|\overline{M_{fi}}|^2$  розрахована для усереднених за поляризаціями станів початкових частинок та усередненого за поляризаціями стану кінцевої частинки, то для перерізу реакції утворення частинки  $R$  з усіма можливими поляризаційними станами завдяки взаємодії частинок  $A$  та  $B$  з усередненими поляризаційними станами матимемо

$$\sigma(AB \rightarrow R) = \frac{\pi(2S_R + 1) |\overline{M_{fi}}|^2 \delta(s - M_R^2)}{2I}, \quad (13.12)$$

де  $2S_R + 1$  – кількість поляризаційних станів частинки  $R$  (для фотона та глюона це 2),  $S_R$  – значення спіну частинки  $R$  за модулем.

Вираз для амплітуди  $|\overline{M_{fi}}|^2$  є тим самим, що визначає розпад частинки  $R$ , з усередненою поляризацією, на  $A$  та  $B$ :

$$\Gamma_{R \rightarrow AB} = /(\mathbf{12.15})/ = (2S_A + 1)(2S_B + 1) \frac{|\overline{M_{fi}}|^2 |\vec{p}_A|}{8\pi s}, \quad (13.13)$$

де множники  $(2S_A + 1)(2S_B + 1)$  визначають ймовірність розпаду у стани з усіма можливими поляризаціями частинок. Значення  $|\vec{p}_A|$  знайдемо з (12.12):

$$|\vec{p}_A| = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\left[1 - \frac{(m_A + m_B)^2}{s}\right] \left[1 - \frac{(m_A - m_B)^2}{s}\right]} = \frac{I}{\sqrt{s}}. \quad (13.14)$$

Підставивши вираз для  $|\overline{M_{fi}}|^2$  з (13.13) у вираз (13.12), отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma(AB \rightarrow R) &= \frac{4\pi^2(2S_R + 1)}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \cdot \frac{\Gamma_{R \rightarrow AB} s^{3/2} \delta(s - M_R^2)}{I^2} = \\ &= \frac{16\pi^2(2S_R + 1)}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \cdot \frac{\Gamma_{R \rightarrow AB} s^{3/2} \delta(s - M_R^2)}{[s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2]}.\end{aligned}\quad (13.15)$$

$\delta$ -функцію в останньому виразі слід замінити на  $\delta$ -подібну функцію:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.\quad (13.16)$$

В нашому випадку це буде

$$\delta(s - M_R^2) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{s} \Gamma_{tot}}{(s - M_R^2)^2 + s \Gamma_{tot}^2},\quad (13.17)$$

де  $\Gamma_{tot}$  – повна ширина розпаду частинки  $R$  з урахуванням всіх можливих каналів, а  $s \Gamma_{tot}$  вважається набагато меншою за масу частинки  $M_R$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma(AB \rightarrow R) &= 16\pi \frac{(2S_R + 1)}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)} \times \\ &\times \frac{\Gamma_{R \rightarrow AB} s^{3/2}}{[s - (m_A + m_B)^2][s - (m_A - m_B)^2]} \frac{\sqrt{s} \Gamma_{tot}}{(s - M_R^2)^2 + s \Gamma_{tot}^2}.\end{aligned}\quad (13.18)$$

Часто зустрічається ситуація, коли маси початкових частинок  $m_A, m_B$  набагато менші за масу  $M_R = \sqrt{s}$ , тоді наведений вираз суттєво спрощується:

$$\sigma(AB \rightarrow R) = 16\pi \frac{(2S_R + 1)C_R}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)C_A C_B} \frac{\Gamma_{R \rightarrow AB} \Gamma_{tot}}{(s - M_R^2)^2 + s \Gamma_{tot}^2},\quad (13.19)$$

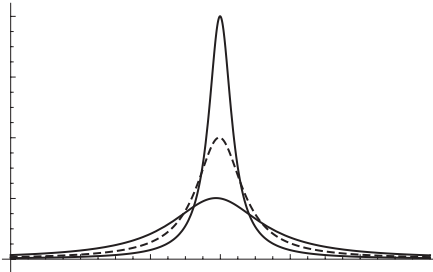
де ми зробили узагальнення для випадку, коли окрім різних поляризаційних станів існують різні кольорові стани частинок кількістю  $C$  (для кварків  $C_q = 3$ ).

Слід зауважити, що коли народження частинки  $R$  відбувається завдяки частинкам, що є тотожними  $A = B$ , то, згідно з твердженням

після виразу (1.43), у визначення ширини розпаду (13.13) слід додати двійку в знаменник правої частини. Це призведе, до зміни виразу (13.19), а саме:

$$\sigma(AA \rightarrow R) = 32\pi \frac{(2S_R + 1)C_R}{(2S_A + 1)^2 C_A^2} \frac{\Gamma_{R \rightarrow AA} \Gamma_{tot}}{(s - M_R^2)^2 + s\Gamma_{tot}^2}. \quad (13.20)$$

Залежність перерізу реакції утворення частинки від повної ширини розпаду  $\Gamma_{tot}$  (при інших однакових параметрах) наведено на рис. 13.2. З явного вигляду залежності (13.19) випливає, що зі зменшенням ширини розпаду пік стає вищим, а в нижній частині графіків поведінка функцій з різними значеннями  $\Gamma_{tot}$  суттєво відрізняється.



**Рис. 13.2.** Залежність перерізу реакції утворення частинки від повної ширини розпаду  $\Gamma_{tot}$  при інших однакових параметрах. Більш високому піку відповідає менша ширина розпаду. Графіку з найвищим піком відповідає ширина  $\Gamma_x$ , з середньою висотою піку – ширина  $2\Gamma_x$ , з найнижчим піком – ширина  $4\Gamma_x$ .

Таким чином ми отримали вираз для перерізу утворення реальної нестабільної частинки  $R$ . Розглянемо тепер як описувати процеси, у яких частинка  $R$  в подальшому розпадається. У випадку, коли частинка  $R$  може розпастися лише по одному можливому каналу  $R \rightarrow CD$  ( $\Gamma_{tot} = \Gamma_{R \rightarrow CD}$ ) є очевидним, що перерізи реакцій утворення  $R$  частинки та утворення  $R$  частинки з подальшим її розпадом будуть однаковими:

$$\sigma(AB \rightarrow R) = \sigma(AB \rightarrow R \rightarrow CD),$$

бо всі частинки  $R$ , врешті-решт, перейдуть у частинки  $C$  та  $D$ . Якщо ж частинка може розпадатися по декільком каналам з різною ши-

риною ( $\Gamma_{tot} = \sum \Gamma_f$ ), то більша кількість розпадів за одиницю часу буде у каналі з більшою шириною розпаду (меншим часом життя), тобто переріз має бути  $\sim \Gamma_f$ . Остаточно, переріз реакції з утворенням реальної частинки  $R$  та подальшим її розпадом за каналом  $f$  можна записати як

$$\begin{aligned} \sigma(AB \rightarrow R \rightarrow f) &= \sigma(AB \rightarrow R) \frac{\Gamma_f}{\Gamma_{tot}} = \\ &= 16\pi \frac{(2S_R + 1)C_R}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)C_A C_B} \frac{\Gamma_{R \rightarrow AB} \Gamma_{R \rightarrow f}}{(s - M_R^2)^2 + s\Gamma_{tot}^2}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

При цьому, очевидно,

$$\sum_f \sigma(AB \rightarrow R \rightarrow f) = \sigma(AB \rightarrow R). \quad (13.22)$$

Звичайно, вираз (13.21) справедливий лише в околі  $s \approx M_R^2$ .

Звертаємо увагу, що знаменники отриманих виразів для перерізів реакцій містять спільний множник зі знаменником виразу (13.6):  $(s - M_R^2)^2 + s\Gamma_{tot}^2$ . При цьому поява доданка  $s\Gamma_{tot}^2$ , з математичної точки зору, слугує для недопущення ситуації, коли у знаменнику виразів може виявитися нуль при  $s \rightarrow M_R^2$ . Зазначимо, що якщо в квантово-механічному підході ширина розпаду  $\Gamma$  є зовнішнім параметром, характеристикою частинки, що береться з експериментальних даних, то в квантовій теорії поля ширина розпаду може бути, в принципі, розрахована аналітично. По-перше, виходячи з явного вигляду лагранжіану взаємодії частинки згідно з (12.15). По-друге, згідно з оптичною теоремою, ширина розпаду визначається по уявній частині амплітуди реакції (12.92), яка визначається уявною частиною радіаційних поправок до пропагаторів відповідних полів в точці  $s = M_R$ , див., наприклад, (28.51). Якщо більш просто, то в КТП вираз для знаменника пропагатора природнім чином модифікується саме за рахунок радіаційних поправок, див., наприклад, (26.43).

### Розпад на нестабільні частинки

Розглянемо ситуацію, коли частинка  $A$  розпадається на дві частинки  $B$  та  $R$ , де частинка  $R$  є нестабільною та може розпастися по декільком каналам з шириною розпаду  $\Gamma_f$  (повна ширина розпаду  $\Gamma_{tot} = \sum \Gamma_f$ ).

Ширина розпаду  $A \rightarrow BR$  визначається згідно з (12.15).

### Завдання

1. Покажіть, що ширина піку на половині висоті на рис. 13.1 справді дорівнює ширині розпаду. Знайдіть відношення між ширинами розпаду для двох піків зображених на рис. 13.1.
2. Запишіть вираз для перерізу утворення гіпотетичної масивної нейтральної скалярної частинки  $S$  при взаємодії двох глюонів  $\sigma(gg \rightarrow S)$ . Вважати, що величини  $\Gamma_{S \rightarrow gg}$  та  $\Gamma_{tot}$  відомі. Лагранжіан взаємодії має вигляд  $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_S}{M_S} S G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ . Тензор  $G_{\mu\nu}^a$  визначається як  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ , де  $f^{abc}$  – структурні константи групи  $SU(3)$ .

## РОЗДІЛ 14

### Загальні питання обчислення $|M_{fi}|^2$

Для обчислення фізично спостережуваних величин, зокрема таких, як ймовірності розпаду або перерізу розсіяння частинок, виникає потреба знаходження квадрата модуля амплітуди розсіяння  $|M_{fi}|^2$  (див. (1.43)). При цьому потрібно знаходити квадрати модулів скалярів типу  $\bar{v}_1 Q v_2$ , де  $Q$  — певна комбінація  $\gamma$ -матриць, а  $v$  — одностинкові розв'язки, визначені в (2.7). Покажемо, як це зробити:

$$|\bar{v}_1 Q v_2|^2 = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_1 Q v_2)^* = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_1 Q v_2)^+, \quad (14.1)$$

де остання рівність справедлива, оскільки операція ермітового спряження включає в себе транспонування та комплексне спряження, а операція транспонування не змінює скалярну величину. Врахуємо, що

$$\begin{aligned} (\bar{v}_1 Q v_2)^* &= (\bar{v}_1 Q v_2)^+ = v_2^+ Q^+ \bar{v}_1^+ = \\ &= / \bar{v} = v^+ \gamma^0; \quad \gamma^0 \gamma^0 = I; \quad \gamma^{0+} = \gamma^0 / = \\ &= (v_2^+ \gamma^0) \gamma^0 Q^+ \gamma^0 v_1 = \bar{v}_2 \gamma^0 Q^+ \gamma^0 v_1 = \bar{v}_2 \bar{Q} v_1, \end{aligned} \quad (14.2)$$

де  $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$  — діраковськи спряжена матриця  $Q$ . Тоді

$$|\bar{v}_1 Q v_2|^2 = (\bar{v}_1 Q v_2)(\bar{v}_2 \bar{Q} v_1). \quad (14.3)$$

Використавши (Д5.2), легко перекоонатися у справедливості таких корисних співвідношень:

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu; \quad \bar{\gamma}^5 = -\gamma^5; \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^5} = \gamma^\mu \gamma^5; \quad \bar{a} = a^*; \quad \overline{a \not{b}} = \not{b}^* a^*; \quad \overline{a \not{b} \not{c}} = \not{c}^* \not{b}^* a^*. \quad (14.4)$$

#### Властивості добутоків $\gamma$ -матриць

Наведемо основні властивості добутоків  $\gamma$ -матриць, що нам знадобляться при розрахунку  $|M_{fi}|^2$ .

Можна показати, що результатом підсумовування за індексом, що повторюється ( $\mu$ ), у таких комбінаціях  $\gamma$ -матриць є:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I; \quad (14.5)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu; \quad (14.6)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu = 4g^{\lambda\nu} I; \quad (14.7)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda; \quad (14.8)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma), \quad (14.9)$$

де перший вираз явно впливає із (Д5.2). А для доведення справедливості наступних виразів треба, використовуючи (Д5.2), крайню праву матрицю  $\gamma^\mu$  пересунути до крайньої лівої матриці  $\gamma_\mu$ .

Домноживши (Д5.2) на компоненти  $a_\mu b_\nu$  довільних 4-векторів та підсумувавши за  $\mu, \nu$ , отримаємо

$$\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2ab, \quad (14.10)$$

а якщо  $a = b$ , то

$$\not{a} \not{a} = a^2. \quad (14.11)$$

Домноживши (14.6) – (14.9) на відповідні компоненти 4-векторів та підсумувавши за їхніми індексами, отримаємо

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2 \not{a}; \quad (14.12)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4ab; \quad (14.13)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}; \quad (14.14)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu = 2(\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}). \quad (14.15)$$

### Техніка обчислення згорток

Рівняння Дірака (Д5.1) є інваріантним відносно перетворень (Д5.9), тому фізичні результати, що можна отримати, базуючись на ньому, мають також виражатися через величини, інваріантні відносно перетворень (Д5.9). Такими інваріантами є зокрема згортки  $\gamma$ -матриць. Тому не дивно, що при обрахунку фізичних величин у КЕД, нам в подальшому знадобиться їх обчислювати. Покажемо, як це робити.

По-перше, згортка від добутку  $\gamma$ -матриць утворює завдяки властивостям згорток симетричний відносно циклічних перестановок тензор

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 1/4 \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}]. \quad (14.16)$$

Під знаком згортки перебувають  $\gamma$ -матриці, що не змінюються при переході до довільної системи відліку. Отже, такою властивістю має володіти й тензор  $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ . Тоді він повинен виражатися лише через метричний тензор  $g^{\mu\nu}$ , що має відповідні властивості.

Оскільки за допомогою метричного тензора можна виразити лише тензор парного рангу, то згортка від добутку непарної кількості  $\gamma$ -матриць має дорівнювати нулю (див. також властивості алгебри Дірака на с. 448):

$$Tr[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}] = 0. \quad (14.17)$$

Справедливість останнього твердження, до речі, можна показати й явно за допомогою матриці  $\gamma^5$ . Наприклад, у найпростішому випадку згортки від однієї  $\gamma$ -матриці:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu] &= / \gamma^5 \gamma^5 = 1/ = Tr[\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^5] = \\ &= / \gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu / = -Tr[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5] = \\ &= / T[ABC] = Tr[CAB] / = -Tr[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] = -Tr[\gamma^\mu] \Rightarrow Tr[\gamma^\mu] = 0. \end{aligned}$$

Взявши згортку від обох частин (Д5.2) і врахувавши  $Tr[I] = 4$ , отримаємо для згортки двох  $\gamma$ -матриць

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (14.18)$$

Покажемо, як знайти згортку чотирьох  $\gamma$ -матриць  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma]$ . Для цього використовуємо (Д5.2), перемістимо останню  $\gamma$ -матрицю до першої:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma = 2g^{\chi\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\chi \quad (14.19)$$

$$-\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\chi = -2g^{\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\chi + \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\chi \quad (14.20)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\chi = 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\chi - \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \quad (14.21)$$

та додамо почленно ліві та праві частини виразів (14.19) – (14.21):

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma = 2g^{\chi\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu - 2g^{\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\chi + 2g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\chi - \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi. \quad (14.22)$$

Візьмемо згортку ліворуч та праворуч і врахуємо, що під знаком згортки можна циклічно переставляти множники:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\chi \gamma^\sigma] &= Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] g^{\chi\sigma} - Tr[\gamma^\mu \gamma^\chi] g^{\nu\sigma} + Tr[\gamma^\nu \gamma^\chi] g^{\mu\sigma} = \\ &= /(14.18)/ = 4[g^{\mu\nu} g^{\chi\sigma} - g^{\mu\chi} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\chi}]. \quad (14.23) \end{aligned}$$



Отже,

$$T^{\mu\nu\chi\sigma} = g^{\mu\nu}g^{\chi\sigma} - g^{\mu\chi}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\chi}. \quad (14.24)$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\sigma\gamma^\eta\gamma^\rho] &= Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\sigma]g^{\eta\rho} - Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\eta]g^{\sigma\rho} \\ &+ Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\eta]g^{\chi\rho} - Tr[\gamma^\mu\gamma^\chi\gamma^\sigma\gamma^\eta]g^{\nu\rho} + Tr[\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\sigma\gamma^\eta]g^{\mu\rho}, \end{aligned} \quad (14.25)$$

тобто

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\chi\sigma\eta\rho} &= T^{\mu\nu\chi\sigma}g^{\eta\rho} - T^{\mu\nu\chi\eta}g^{\sigma\rho} + T^{\mu\nu\sigma\eta}g^{\chi\rho} - T^{\mu\chi\sigma\eta}g^{\nu\rho} + T^{\nu\chi\sigma\eta}g^{\mu\rho} = \\ &= g^{\mu\nu}g^{\chi\sigma}g^{\eta\rho} - g^{\mu\chi}g^{\nu\sigma}g^{\eta\rho} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\chi}g^{\eta\rho} - g^{\mu\nu}g^{\chi\eta}g^{\sigma\rho} + g^{\mu\chi}g^{\nu\eta}g^{\sigma\rho} - \\ &- g^{\mu\eta}g^{\nu\chi}g^{\sigma\rho} + g^{\mu\nu}g^{\sigma\eta}g^{\chi\rho} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\eta}g^{\chi\rho} + g^{\mu\eta}g^{\nu\sigma}g^{\chi\rho} - g^{\mu\chi}g^{\sigma\eta}g^{\nu\rho} + \\ &+ g^{\mu\sigma}g^{\chi\eta}g^{\nu\rho} - g^{\mu\eta}g^{\chi\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\nu\chi}g^{\sigma\eta}g^{\mu\rho} - g^{\nu\sigma}g^{\chi\eta}g^{\mu\rho} + g^{\nu\eta}g^{\chi\sigma}g^{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Зазначимо, що за такою процедурою можна знайти згортку від добутку довільної парної кількості  $\gamma$ -матриць.

У загальному випадку, можна показати, що

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \sum (-1)^N g^{ab}g^{cd}\dots, \quad (14.27)$$

де  $a, b, c, d, \dots$  — деяка комбінація індексів  $\mu_1\mu_2\dots\mu_n$ , а сума береться за всіма можливими комбінаціями пар чисел  $a, b, c, d, \dots$ ;  $N$  — кількість перестановок, що переводить послідовність чисел  $\mu_1\mu_2\dots\mu_n$  в  $a, b, c, d, \dots$ . Кількість доданків у сумі (14.27) дорівнює  $(n-1)!!$

Зазначимо, що для визначення знака перед кожним доданком існує альтернативна графічна процедура. Слід на колі проставити точки  $\mu_i$  в такому порядку, як у лівій частині (14.27), а потім з'єднати попарно лініями ті точки, що належать до одного метричного тензора  $g$  у доданку, що розглядається. Тоді знак перед доданком буде  $(-1)^N$ , де  $N$  — кількість точок перетину ліній.

На завершення наведемо властивості згортки з матрицею  $\gamma^5$  (Д5.4):

$$Tr[\gamma^5] = 0, \quad (14.28)$$

$$Tr[\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu] = 0, \quad (14.29)$$

$$Tr[\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda] = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad (14.30)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda\gamma_\xi\gamma_\eta] &= 4i[\epsilon_{\lambda\xi\eta\alpha}(\delta_\mu^\alpha g_{\nu\rho} - \delta_\nu^\alpha g_{\mu\rho} + \delta_\rho^\alpha g_{\mu\nu}) - \\ &- \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}(\delta_\lambda^\alpha g_{\xi\eta} - \delta_\xi^\alpha g_{\lambda\eta} + \delta_\eta^\alpha g_{\lambda\xi})], \end{aligned} \quad (14.31)$$

де  $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$  — повністю антисиметричний 4-тензор четвертого рангу, що змінює знак при перестановці сусідніх двох індексів (при цьому фіксуються значення  $\epsilon^{0123} = 1$ ,  $\epsilon_{0123} = -1$ ) і дорівнює нулю, якщо хоча б два його індекси є однаковими. Оскільки  $\gamma^5$  являє собою добуток чотирьох  $\gamma$ -матриць, то згортка від добутку  $\gamma^5$  на непарну кількість  $\gamma$ -матриць дорівнює нулю.

### Завдання

1. Переконатись у справедливості (14.4).
2. Переконатись у справедливості (14.5) – (14.9).
3. Записати  $T^{\mu\nu\chi\sigma\eta\rho\delta\xi}$  через тензор  $T$  шостого порядку.
4. Переконатись у справедливості (14.28) – (14.31).

## РОЗДІЛ 15

### Кулонівське розсіяння

Проведемо розрахунок перерізу розсіяння електрона на важкому ядрі з додатнім зарядом  $Ze$  у системі відліку, де ядро нерухоме (система центра інерції). Цей процес є найпростішим в тому сенсі, що добре описується вже в першому порядку за теорією збурень. Згідно з визначеннями (1.40), (12.68) і виразом для  $S$ -матриці в першому незникаючому наближенні (10.13) амплітуда розсіяння має вигляд

$$M_{fi} = -Ze^2 \cdot \frac{\bar{v}_2 \gamma^0 v_1}{\bar{q}^2}, \quad (15.1)$$

де  $\bar{q}^2 = 4\bar{p}_1^2 \sin^2(\theta/2)$  — квадрат переданого імпульсу електрона (10.12). Відповідно, використавши (14.3) і (14.4), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} &= (\bar{v}_{2\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^0 v_{1\beta}) (\bar{v}_{1\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 v_{2\xi}) = \gamma_{\alpha\beta}^0 v_{1\beta} \bar{v}_{1\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 v_{2\xi} \bar{v}_{2\alpha} = \\ &= /u_{i,\alpha} \bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta} (4.9)/ = \gamma_{\alpha\beta}^0 \rho_{1\beta\chi} \gamma_{\chi\xi}^0 \rho_{2\xi\alpha} = Tr[\gamma^0 \rho_1 \gamma^0 \rho_2]. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Розглянемо найбільш простий випадок розсіяння неполяризованого електрона у випадку, коли значення його кінцевої поляризації не фіксується. Це означає, що (15.2) потрібно усереднити за початковою спіральністю електрона  $\mu_1$  та підсумувати за всіма можливими спіральними станами його кінцевого стану  $\mu_2$ , тобто

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} |M_{fi}|^2. \quad (15.3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \bar{q}^4 \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{Z^2 e^4} &= /(4.9)/ = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} Tr[\gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_1 \gamma^5 \not{\chi}_1)(m + \not{p}_1)] \gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_2 \gamma^5 \not{\chi}_2)(m + \not{p}_2)]] = \\ &= \frac{1}{2} Tr[\gamma^0 (m + \not{p}_1) \gamma^0 (m + \not{p}_2)] = /(14.17)/ = \\ &= \frac{1}{2} m^2 Tr[\gamma^0 \gamma^0] + \frac{p_{1\alpha} p_{2\beta}}{2} Tr[\gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta] = /(14.23)/ = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2[m^2 g^{00} + p_{1\alpha} p_{2\beta} (g^{0\alpha} g^{0\beta} - g^{00} g^{\alpha\beta} + g^{0\beta} g^{\alpha 0})] = \\
&= 2[m^2 + 2(p_1)_0 (p_2)_0 - p_1 p_2] = 2[m^2 + (p_1)_0 (p_2)_0 + |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \theta] = \\
&= /(\mathbf{10.13}), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}| = 2[m^2 + \varepsilon^2 + \vec{p}^2 \cos \theta] = \\
&= 4[m^2 + \vec{p}^2 \cos^2 \theta/2] = 4\varepsilon^2 [1 - \vec{q}^2/4\varepsilon^2]. \quad (15.4)
\end{aligned}$$

Переріз розсіяння для неполяризованих частинок отримуємо згідно з (12.71):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M_{fi}|^2}{16\pi^2} = 4(Z\alpha)^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\vec{q}^4} \left(1 - \frac{\vec{q}^2}{4\varepsilon^2}\right), \quad (15.5)$$

де  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$  — стала тонкої структури.

Кутову залежність перерізу розсіяння легко отримати, використавши значення квадрата переданого імпульсу електрона (10.12), а саме:  $\vec{q}^2 = 4\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$ . В результаті отримаємо

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} = \frac{(Z\alpha)^2}{\sin^4(\theta/2)} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4\vec{p}^4} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2} \sin^2(\theta/2)\right). \quad (15.6)$$

Даний вираз отримав назву *формули Мотта*. Відношення  $|\vec{p}|/\varepsilon = v$  є швидкістю налітаючого електрона.

У нерелятивістському наближенні  $\varepsilon = m$ ,  $|\vec{p}| = mv$ , тобто

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{н.р.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} \times (1 - v^2 \sin^2(\theta/2)), \quad (15.7)$$

де  $(d\sigma/d\Omega)_{\text{Рез}}$  є перерізом *резерфордівського розсіяння*<sup>1</sup>

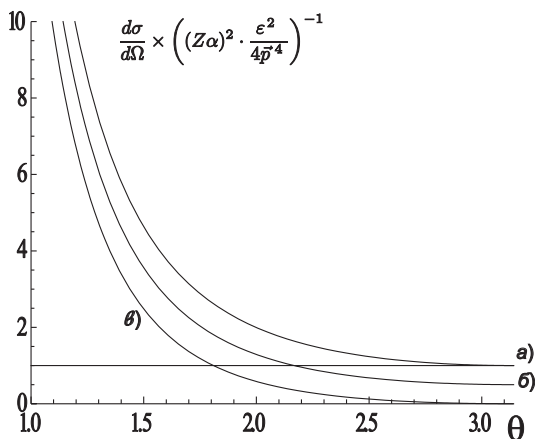
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (15.8)$$

Як можна побачити, вираз для розсіяння електрона в кулонівському полі важкого ядра в нерелятивістському наближенні дещо, хоча

<sup>1</sup>Формулу для розсіяння нерелятивістських заряджених частинок, що взаємодіють за законом Кулона, отримав Є. Резерфорд в 1911 р. в рамках класичної механіки. В системі центра інерції вона має вигляд  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Рез}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$ . Вираз був використаний для інтерпретації результатів розсіяння  $\alpha$ -частинок на тонких пластинках золота. Отриманий результат справедливий і в квантовомеханічному підході для розсіяння безспінових частинок (див. [11], §135).

й не сильно ( $v^2 \ll 1$ ), відрізняється від виразу для резерфордівського розсіяння. Цей факт пов'язаний з тим, що електрон має спин  $s = 1/2$ . У результаті вираз (15.5), що був отриманий у першому порядку теорії збурень, справедливий в області застосування борнівського наближення  $Z\alpha/v \ll 1$  (див. [11], §126), тобто при не дуже малих швидкостях. А умова застосування напівкласичного наближення для процесів у кулоновому полі має протилежний вигляд  $Z\alpha/v \gg 1$  (див. [11], §127), тобто виконується для малих швидкостей. Тому перехід до класичного випадку в (15.5) неможливий.

Особливістю поведінки перерізу розсіяння в ультрарелятивістському наближенні ( $\vec{p}^2 \rightarrow \varepsilon^2$ ) є те, що розсіяння назад ( $\theta \rightarrow \pi$ ) є подавленим (рис. 15.1).



**Рис. 15.1.** Кутова частина диференційного перерізу розсіяння електрона в зовнішньому кулонівському полі для великих кутів розсіяння: а) резерфордівське розсіяння; б) розсіяння ферміона зі швидкістю  $v^2 = 1/2$ ; в) розсіяння ферміона з  $v^2 \rightarrow 1$ .

Аналізуючи загальний вираз для перерізу розсіяння (15.6) бачимо, що як в нерелятивістському, так і в ультрарелятивістському наближенні переріз розсіяння швидко спадає зі збільшенням енергії початкового електрона. Тобто зі збільшенням енергії для досягнення ефективної взаємодії електрон має пролітати ближче до важкого ядра, що створює кулонівське поле.

Значимо, що повний переріз розсіяння  $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) \sin\theta d\theta d\varphi$  є розбіжною величиною за рахунок внеску малих значень  $\theta$  унаслідок наявності переданого імпульсу електрона в четвертому ступені  $\sim \sin^4(\theta/2)$  у знаменнику (15.5).

Із класичної теорії кут розсіяння однозначно визначається прицільною відстанню та законом взаємодії (див. [9], §18,19). Для кулонівської взаємодії малим кутам розсіяння відповідає велика прицільна відстань  $\rho$ :

$$\rho \sim \frac{\alpha}{mv^2} \frac{1}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (15.9)$$

Користуючись визначенням перерізу розсіяння як ефективної площі, в яку має потрапити частинка, щоб розсіятися (змінити свої характеристики), нескінченність при малих кутах стає зрозумілою.

*З цього приводу корисно нагадати, що в історичному досліді Резерфорда з розсіяння  $\alpha$ -частинок на тонких пластинках золота повний переріз розсіяння був скінченний. Справа в тому, що ядро атома золота оточено електронами, які приводять до екранування заряду ядра і відповідно потенціал ядра має не кулонівський ( $A_0^{ext} = \frac{1}{4\pi r}$ ), а юкавівський вигляд  $A_0^{ext} = \frac{e^{-r/a}}{4\pi r}$ , де  $a$  — величина розмірності довжини, що за порядком дорівнює радіусу атома золота. Тобто у випадку, коли  $\alpha$ -частинка пролітає від ядра на відстані, більшій ніж радіус атома золота, вона практично не взаємодіє із зазначеним ядром.*

Цікаво, що цей історичний дослід, який дав відповідь про структуру атома, був коректно проведений завдяки щасливому випадку, а саме, завдяки виконанню таких умов:

1) ядро атома має бути достатньо важким, щоб його можна було вважати нерухомим при взаємодії з  $\alpha$ -частинками;

2) швидкість налітаючих  $\alpha$ -частинок не має бути дуже великою для того, щоб  $\alpha$ -частинка не могла наблизитися до ядра настільки близько, де на неї будуть впливати ядерні сили.

Однак у наступних дослідях з алюмінієвими мішенями переріз розсіяння вже відрізнявся від резерфордівського.

Розглянемо тепер розсіяння електрона в кулоновому полі важкого ядра з визначеною спіральністю  $\mu_1$ , якщо в кінцевому стані спіральність буде  $\mu_2$ . При цьому згідно з (15.2), (4.9) маємо

$$\begin{aligned}
\bar{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} &= Tr[\gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_1 \gamma^5 \chi_1)(m + \not{p}_1)] \gamma^0 \frac{1}{2} [(1 + \mu_2 \gamma^5 \chi_2)(m + \not{p}_2)]] = \\
&= \frac{\bar{q}^4}{2} \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} + \frac{\mu_1}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1 (m + \not{p}_1) \gamma^0 (m + \not{p}_2)] + \\
&\quad + \frac{\mu_2}{4} Tr[\gamma^0 (m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2)] + \\
&\quad + \frac{\mu_1 \mu_2}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1 (m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2)]. \quad (15.10)
\end{aligned}$$

Розглянемо по черзі окремі доданки:

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1 (m + \not{p}_1) \gamma^0 (m + \not{p}_2)] &= m \chi_{1\mu} p_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] + \\
&\quad + m \chi_{1\mu} p_{1\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0] = /(\mathbf{14.30})/ = 0. \quad (15.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0 (m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2)] &= Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2) \gamma^0 (m + \not{p}_1)] = \\
&= m \chi_{2\mu} p_{1\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] + m \chi_{2\mu} p_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^0] = 0. \quad (15.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1 (m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2)] &= m^2 \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu] + \\
+ \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\beta] &= /[\gamma^5, \gamma^\mu]_- = 0, \gamma^5 \gamma^5 = \hat{1} = \\
&= m^2 \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} Tr[\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu] - \chi_{1\mu} \chi_{2\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^\beta] = \\
&= /(\mathbf{14.24}), (\mathbf{14.26}), (\mathbf{Д5.1.14})/ = 4[m^2(2\chi_1^0 \chi_2^0 - \chi_1 \chi_2) + \\
+ 2(\chi_2 p_1) \chi_1^0 p_2^0 + 2(\chi_1 p_2) \chi_2^0 p_1^0 - 2(\chi_1 \chi_2) p_1^0 p_2^0 - 2(p_1 p_2) \chi_1^0 \chi_2^0 + \\
&\quad + (\chi_1 \chi_2)(p_1 p_2) - (\chi_1 p_2)(\chi_2 p_1)]. \quad (15.13)
\end{aligned}$$

Використаємо явний вигляд 4-векторів поляризації (**Д5.1.21**) та врахуємо, що, згідно з (**10.13**), імпульс електрона після розсіяння змінює лише свій напрямок, тобто  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}|$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $\vec{p}_1 \vec{p}_2 = \vec{p}^2 \cos \theta$ . Тоді вираз (**15.13**) можна записати як:

$$\frac{1}{4} Tr[\gamma^0 \gamma^5 \chi_1 (m + \not{p}_1) \gamma^0 \gamma^5 \chi_2 (m + \not{p}_2)] = 2\varepsilon^2 - 2(m^2 + \varepsilon^2) \sin^2(\theta/2). \quad (15.14)$$

Підставивши (**15.11**) – (**15.14**) у (**15.10**) та (**12.71**), отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{(Z\alpha)^2}{16\vec{p}^4 \sin^4(\theta/2)} \times \\
&\quad \times (2m^2 + 2\vec{p}^2 \cos^2 \theta/2 + \mu_1 \mu_2 [2\varepsilon^2 - 2(m^2 + \varepsilon^2) \sin^2(\theta/2)]) = \\
&= \frac{(Z\alpha)^2}{\sin^4(\theta/2)} \cdot \frac{\varepsilon^2}{4\vec{p}^4} \cdot \begin{cases} \cos^2(\theta/2), & \mu_1 \mu_2 = +1 \\ (m/\varepsilon)^2 \sin^2(\theta/2), & \mu_1 \mu_2 = -1 \end{cases} \quad (15.15)
\end{aligned}$$

Як перевірку, зробимо усереднення цього виразу за спіральностями:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \sum_{\mu_2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\mu_1 \cdot \mu_2 = -1, 1} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Як бачимо, результат усереднення збігається з (15.6).

Проаналізуємо отриманий вираз (15.15). По-перше, оскільки залежність від спіральностей електронів пропорційна  $\mu_1\mu_2$ , то після підсумовування за однією зі спіральностей (початкового чи кінцевого електрона) інформація про іншу спіральність втрачається. Або електрон в кінцевому стані може мати певну спіральність лише тоді, якщо він має певну спіральність у початковому стані, і навпаки.

При русі електрона в центральному полі зберігається повний кутовий момент частинки. У граничному випадку, коли початковий електрон летить прямо на ядро (нульова прицільна відстань), його орбітальний момент дорівнює нулю й повний момент є спіном електрона. Очевидно, що після взаємодії електрон має змінити напрямок руху на протилежний. Оберемо систему відліку, в якій вісь  $z$  напрямлена вздовж напрямку руху початкового електрона. Нехай також початковий електрон має певну проекцію спіну на вісь  $z$ . Тоді після розсіяння проекція повного моменту (спіну) на вісь  $z$  має залишитись незмінною, а проекція спіну на напрямок руху (спіральність) має змінитись на протилежну. Відповідно, імовірність розсіяння на кут  $\theta = \pi$  у випадку, коли  $\mu_1\mu_2 = +1$  має дорівнювати нулю, що й забезпечується множителем  $\cos^2(\theta/2)$  в (15.15).

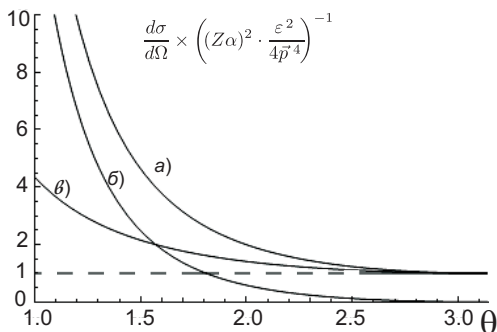
Як видно з (15.15), у нерелятивістському наближенні спіральність електрона при розсіянні в кулоновому полі може змінюватись (див. рис. 15.2), однак в ультрарелятивістському наближенні спіральність зберігається<sup>1</sup>.

Останнє твердження пояснюється тим, що в ультрарелятивістському наближенні  $\varepsilon^2 \simeq \bar{p}^2$ , і тому можна вважати, що частинки є безмасовими. Для безмасових частинок, як відомо, поняття спіральності та кіральності збігаються (див. додаток Д5). А для безмасових частинок кіральність є лоренц-інваріантною величиною та інтегралом руху. До речі, перехід до кірального представлення для безмасових ферміонів

<sup>1</sup>Імовірність для ультрарелятивістського процесу зі зміною спіральності  $\mu_1\mu_2 = -1$  прямує до нуля за рахунок множника  $(m/\varepsilon)^2 \rightarrow 0$  у (15.15).



в ультрарелятивістському наближенні значно спрощує розрахунки і є загальноживаним.



**Рис. 15.2.** Кутова частина диференційного перерізу розсіяння нерелятивістського електрона в зовнішньому кулонівському полі для великих кутів розсіяння: а) резерфордівське розсіяння; б) розсіяння ферміона без зміни поляризації ( $\mu_1\mu_2 = +1$ ); в) зі зміною поляризації ( $\mu_1\mu_2 = -1$ ).

Для прикладу припустимо, що початковий електрон має спіральність  $\mu_1 = -1$ , тоді в ультрарелятивістському наближенні  $m = 0$  і електрон має ліву кіральність, тобто  $v_1 \rightarrow \hat{P}_- v_1 / m=0$ , де  $\hat{P}_- = (1 - \gamma^5)/2$  — проєктуючий оператор на стан з лівою кіральністю (Д5.2.2). Аналізуючи вираз для амплітуди (15.1), бачимо, що згідно з (Д5.2.12) у кінцевому стані кіральність електрона може бути лише лівою, що й узгоджується з випадком  $\mu_1\mu_2 = +1$  у (15.15).

Отже, навіть не проводячи подальших розрахунків, бачимо, що в ультрарелятивістському наближенні введення кіральних операторів автоматично забезпечує заборону процесів, де в результаті кулонівського розсіяння спіральність електрона змінює свій знак. Розрахуємо в цьому наближенні переріз розсіяння для початкового електрона з лівою кіральністю. Згідно з (15.1), (Д5.2.14) запишемо амплітуду як

$$M_{fi} = \frac{Ze^2}{2\vec{q}^2} \cdot \bar{v}_2 \gamma^0 (1 - \gamma^5) v_1, \quad (15.16)$$

Тоді за аналогією з (15.2) отримаємо

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = \text{Tr}[\gamma^0 (1 - \gamma^5) \rho_1 \gamma^0 (1 - \gamma^5) \rho_2]. \quad (15.17)$$

В останньому виразі, для спрощення розрахунків, замість матриці густини  $\rho_i$  можна використовувати підсумовану за спіральностями матрицю густини (4.9):

$$\sum_{\mu=\pm 1} \rho_i = \sum_{\mu=\pm 1} \frac{1}{2} [(1 + \mu\gamma^5 \chi)(m + \not{p}_i)] = (m + \not{p}_i)|_{m=0} = \not{p}_i. \quad (15.18)$$

Це пов'язано з тим, що хоча в масивному випадку дія оператора проектування  $\hat{P}_-$  на ферміонну функцію з різними значеннями спіральності ( $\mu = \pm 1$ ) не дорівнює нулю, при переході до ультрарелятивістського випадку ( $m \rightarrow 0$ ) оператор проектування  $\hat{P}_-$  автоматично "виріже" потрібну частину матриці густини, що відповідає лівим ферміонам.

Отже, замість (15.17) можна записати

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = Tr[\gamma^0(1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^0(1 - \gamma^5) \not{p}_2] = Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2] + Tr[\gamma^0 \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^0 \gamma^5 \not{p}_2] - Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \gamma^5 \not{p}_2] - Tr[\gamma^0 \gamma^5 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2]. \quad (15.19)$$

Згортка від останніх двох доданків дає нуль згідно з (14.30), а в першому доданку в другому рядку (15.20) можна взагалі позбавитися матриць  $\gamma^5$ , якщо одну з них перемістити до іншої, враховуючи, що матриця  $\gamma^5$  антикомутує з усіма матрицями  $\gamma^\mu$ . Тоді отримаємо

$$4\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = 2Tr[\gamma^0 \not{p}_1 \gamma^0 \not{p}_2] = 2p_{1,\alpha} p_{2,\beta} Tr[\gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta] = / (14.24) / = 8p_{1,\alpha} p_{2,\beta} (g^{0\alpha} g^{0\beta} - g^{00} g^{\alpha\beta} + g^{0\beta} g^{0\alpha}) = 8[p_1^0 p_2^0 - (p_1, p_2)]. \quad (15.20)$$

Враховуючи, що енергія електрона при кулонівському розсіянні не змінюється, а також те, що в ультрарелятивістському наближенні  $\varepsilon = |\vec{p}|$ , маємо  $p_1 = \varepsilon(1, \vec{e}_1)$ ;  $p_2 = \varepsilon(1, \vec{e}_2)$ , де  $\vec{e}_i$  – одиничний вектор напрямку  $i$ -го електрона. В результаті отримуємо

$$\vec{q}^4 \frac{|M_{fi}|^2}{Z^2 e^4} = 2[2\varepsilon^2 - \varepsilon^2(1 - \cos\theta)] = 4\varepsilon^2 \cos^2(\theta/2) \quad (15.21)$$

та вираз для перерізу розсіяння (12.71):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Z\alpha)^2 \cos^2(\theta/2)}{\varepsilon^2 4 \sin^4(\theta/2)}, \quad (15.22)$$

що в ультрарелятивістському наближенні збігається з отриманим раніше виразом (15.15) у випадку, коли спіральність електрона після розсіяння не змінюється ( $\mu_1\mu_2 = +1$ ).

Таким чином, ми явно переконалися, що перехід до кірального представлення для безмасових ферміонів в ультрарелятивістському наближенні значно спрощує розрахунки при дослідженні реакцій з поляризованими частинками.

### Завдання

1. Переконайтесь у справедливості виразу (15.14).
2. Як зміниться матриця густини (15.18) у випадку кулонівського розсіяння ультрарелятивістського позитрона з певним значенням спіральності? Як при цьому зміниться переріз реакції? Чи зміниться відповідь для випадку розсіяння при довільних енергіях позитрона?

## РОЗДІЛ 16

### Електрон-електронне розсіяння

Для знаходження диференційного перерізу електрон-електронного розсіяння (12.62) необхідно розрахувати величину  $|M_{fi}|^2$ . Згідно з означеннями (1.34), (1.40) і виразом для матриці  $e$  –  $e$ -розсіяння в другому порядку теорії збурень (2.47) амплітуда  $e$  –  $e$ -розсіяння

$$M_{fi} = e^2 \left[ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_4)^2} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)}{(p_1 - p_3)^2} \right]. \quad (16.1)$$

Для знаходження  $|M_{fi}|^2$  використаємо (14.3), (14.4) і визначення кінематичних інваріантів (12.77) для випадку (12.81):

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = \left[ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)}{u} - \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)}{t} \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{u} - \frac{(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{t} \right] = \quad (16.2)$$

$$= \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{t^2} + \quad (16.3)$$

$$+ \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{u^2} - \quad (16.4)$$

$$- \frac{(\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4)}{tu} - \quad (16.5)$$

$$- \frac{(\bar{v}_3 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_4 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3)}{ut}. \quad (16.6)$$

Бачимо, що вирази (16.4), (16.6) відрізняються від виразів (16.3) та (16.5) заміною індексів  $3 \leftrightarrow 4$ , відповідно. Тому для спрощення запишемо квадрат амплітуди  $e$  –  $e$ -розсіяння у вигляді

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = \frac{A}{t^2} + \frac{A_{3 \leftrightarrow 4}}{u^2} - \frac{B}{tu} - \frac{B_{3 \leftrightarrow 4}}{ut}, \quad (16.7)$$

де

$$A = (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_4)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_3), \quad (16.8)$$

$$B = (\bar{v}_4 \gamma^\mu v_2)(\bar{v}_3 \gamma_\mu v_1)(\bar{v}_2 \gamma^\nu v_3)(\bar{v}_1 \gamma_\nu v_4). \quad (16.9)$$

Вкажемо явно внутрішні індекси підсумовування, що дозволить переставити множники в необхідному порядку та записати вирази для  $A, B$  у вигляді згорток від добутків матриць:

$$\begin{aligned} A &= (\bar{v}_{4\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}v_{2\beta}) (\bar{v}_{3\delta}(\gamma_{\mu})_{\delta\eta}v_{1\eta}) (\bar{v}_{2\lambda}\gamma_{\lambda\xi}^{\nu}v_{4\xi}) (\bar{v}_{1\rho}(\gamma_{\nu})_{\rho\sigma}v_{3\sigma}) = \\ &= (\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}v_{2\beta}\bar{v}_{2\lambda}\gamma_{\lambda\xi}^{\nu}v_{4\xi}\bar{v}_{4\alpha})((\gamma_{\mu})_{\delta\eta}v_{1\eta}\bar{v}_{1\rho}(\gamma_{\nu})_{\rho\sigma}v_{3\sigma}\bar{v}_{3\delta}) = \\ &= /u_{i,\alpha}\bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta} \text{ (4.9)} / = Tr[\gamma^{\mu}\rho_2\gamma^{\nu}\rho_4] \cdot Tr[\gamma_{\mu}\rho_1\gamma_{\nu}\rho_3]. \end{aligned} \quad (16.10)$$

$$\begin{aligned} B &= (\bar{v}_{4\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}v_{2\beta}) (\bar{v}_{3\delta}(\gamma_{\mu})_{\delta\eta}v_{1\eta}) (\bar{v}_{2\lambda}\gamma_{\lambda\xi}^{\nu}v_{3\xi}) (\bar{v}_{1\rho}(\gamma_{\nu})_{\rho\sigma}v_{4\sigma}) = \\ &= \gamma_{\alpha\beta}^{\mu}v_{2\beta}\bar{v}_{2\lambda}\gamma_{\lambda\xi}^{\nu}v_{3\xi}\bar{v}_{3\delta}(\gamma_{\mu})_{\delta\eta}v_{1\eta}\bar{v}_{1\rho}(\gamma_{\nu})_{\rho\sigma}v_{4\sigma}\bar{v}_{4\alpha} = \\ &= Tr[\gamma^{\mu}\rho_2\gamma^{\nu}\rho_3\gamma_{\mu}\rho_1\gamma_{\nu}\rho_4] \end{aligned} \quad (16.11)$$

Надалі будемо розглядати найбільш простий випадок розсіяння неполяризованих електронів у випадку, коли значення кінцевої поляризації не фіксується. Це означає, що (16.2) потрібно усереднити за початковими спіральностями  $\mu_1, \mu_2$  і підсумувати за всіма можливими спіральностями кінцевих частинок  $\mu_3, \mu_4$ , тобто треба

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\mu_3, \mu_4} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \frac{1}{2} \sum_{\mu_2} |M_{fi}|^2. \quad (16.12)$$

Оскільки поляризаційні властивості окремої частинки у виразі для квадрата амплітуди розсіяння явно входять лише до матриці густини  $\rho$ , а сума за можливими спіральними станами в матриці густини згідно з визначенням (4.9):

$$\sum_{\mu=\pm 1} \rho_{qi} = \sum_{\mu=\pm 1} \frac{q}{2} [(1 + \mu\gamma^5 \chi)(m + q \not{p}_i)] = q(m + q \not{p}_i) = \bar{\rho}_{qi}, \quad (16.13)$$

де  $q = 1$  відповідає частинці, а  $q = -1$  — античастинці, то процедура усереднення за спіральними станами зводиться до заміни

$$\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} \rightarrow \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{e^4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\bar{A}}{t^2} + \frac{\bar{A}_{3\leftrightarrow 4}}{u^2} - \frac{\bar{B}}{ut} - \frac{\bar{B}_{3\leftrightarrow 4}}{ut} \right], \quad (16.14)$$

де вирази  $\bar{A}, \bar{B}$  відрізняються від  $A, B$  заміною  $\rho_i \rightarrow \bar{\rho}_i$ .

Знайдемо значення  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = Tr[\gamma^{\mu}(m + \not{p}_2)\gamma^{\nu}(m + \not{p}_4)] \cdot Tr[\gamma_{\mu}(m + \not{p}_1)\gamma_{\nu}(m + \not{p}_3)]. \quad (16.15)$$

Перший множник знаходиться як

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_4)] = \\
 & = Tr[m^2\gamma^\mu\gamma^\nu + mp_{2\alpha}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + mp_{4\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\beta + p_{2\alpha}p_{4\beta}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = \\
 & = /(\mathbf{14.17})/ = m^2Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] + p_{2\alpha}p_{4\beta}Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta] = /(\mathbf{14.18}), (\mathbf{14.24})/ = \\
 & = 4[m^2g^{\mu\nu} + p_{2\alpha}p_{4\beta}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})] = \\
 & = 4[m^2g^{\mu\nu} + p_2^\mu p_4^\nu - g^{\mu\nu}(p_2 p_4) + p_2^\nu p_4^\mu], \quad (\mathbf{16.16})
 \end{aligned}$$

а другий отримується з  $(\mathbf{16.16})$  заміною  $2 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$  та опусканням індексів

$$Tr[\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_3)] = 4[m^2g_{\mu\nu} + p_{1,\mu}p_{3,\nu} - g_{\mu\nu}(p_1 p_3) + p_{1,\nu}p_{3,\mu}]. \quad (\mathbf{16.17})$$

Підставивши вирази  $(\mathbf{16.16})$ ,  $(\mathbf{16.17})$  у  $(\mathbf{16.15})$  та врахувавши, що  $\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ , отримаємо усереднений за спіральними станами вираз  $(\mathbf{16.3})$ :

$$\bar{A} = 32[2m^4 - m^2\{(p_2 p_4) + (p_1 p_3)\} + (p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3)]. \quad (\mathbf{16.18})$$

Знайдемо  $\bar{B}$ :

$$\bar{B} = Tr[\gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_4)]. \quad (\mathbf{16.19})$$

Для спрощення обчислення  $(\mathbf{16.19})$  спочатку розглянемо його підкреслену частину

$$\begin{aligned}
 & \gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu = m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu + mp_{3,\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu + \\
 & + mp_{2,\lambda}\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma_\mu + p_{2,\lambda}p_{3,\rho}\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = /(\mathbf{14.6}) - (\mathbf{14.8})/ = \\
 & = -2m^2\gamma^\nu + 4m(p_3^\nu + p_2^\nu) - 2\not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_2. \quad (\mathbf{16.20})
 \end{aligned}$$

Підставивши  $(\mathbf{16.20})$  у  $(\mathbf{16.19})$  і знехтувавши доданками, що містять непарну кількість  $\gamma$ -матриць (див.  $(\mathbf{14.17})$ ), отримаємо під знаком згортки

$$\begin{aligned}
 & \gamma^\mu(m + \not{p}_2)\gamma^\nu(m + \not{p}_3)\gamma_\mu(m + \not{p}_1)\gamma_\nu(m + \not{p}_4) = \\
 & = -8m^4I - 2m^2(\gamma^\nu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_4 + \not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_2\gamma_\nu) + \\
 & + 4m^2[(\not{p}_3 + \not{p}_2)\not{p}_4 + \not{p}_1(\not{p}_3 + \not{p}_2)] - 2\not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_2\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_4 = \\
 & = /(\mathbf{14.6}), (\mathbf{14.7})/ = -8m^4I - 8(p_1 p_2)\not{p}_3\not{p}_4 + \\
 & + 4m^2(\not{p}_1\not{p}_2 + \not{p}_1\not{p}_3 + \not{p}_3\not{p}_2 + \not{p}_1\not{p}_4 + \not{p}_2\not{p}_4 + \not{p}_3\not{p}_4). \quad (\mathbf{16.21})
 \end{aligned}$$

Згортку від останнього виразу легко обчислити, врахувавши такі співвідношення:  $Tr[I] = 4$ ,  $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ . Остаточно маємо

$$\bar{B} = 16[-2m^4 - 2(p_1 p_2)(p_3 p_4) + m^2\{(p_1 p_2) + (p_3 p_1) + (p_3 p_2) + (p_4 p_1) + (p_4 p_2) + (p_4 p_3)\}]. \quad (16.22)$$

Зазначимо, що з явного вигляду  $\bar{B}$  випливає  $\bar{B} = \bar{B}_{3 \rightarrow 4}$ .

Підставивши (16.18), (16.22) у (16.14), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{M_{fi}}|^2}{8e^4} &= \frac{2m^4 - m^2\{(p_2 p_4) + (p_1 p_3)\} + (p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_4)(p_2 p_3)}{t^2} + \\ &+ \frac{2m^4 - m^2\{(p_2 p_3) + (p_1 p_4)\} + (p_1 p_2)(p_3 p_4) + (p_1 p_3)(p_2 p_4)}{u^2} + \\ &+ \frac{2m^4 + 2(p_1 p_2)(p_3 p_4)}{tu} - \\ &- \frac{m^2\{(p_1 p_2) + (p_3 p_1) + (p_3 p_2) + (p_4 p_1) + (p_4 p_2) + (p_4 p_3)\}}{tu}. \quad (16.23) \end{aligned}$$

Наведений вираз можна звести до більш простого вигляду, використовуючи закон збереження 4-імпульсу  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  та  $p_i^2 = m^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{M_{fi}}|^2}{8e^4} &= \frac{(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_4)^2 + 2m^2(m^2 - (p_1 p_3))}{(p_1 - p_3)^4} + \\ &+ \frac{(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_3)^2 + 2m^2(m^2 - (p_1 p_4))}{(p_1 - p_4)^4} + \\ &+ 2 \frac{(p_1 p_2)((p_1 p_2) - 2m^2)}{(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2}, \quad (16.24) \end{aligned}$$

а також записати через кінематичні інваріанти

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{M_{fi}}|^2}{4e^4} &= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \frac{1}{u^2} \left[ \frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \\ &+ \frac{4}{tu} \left( \frac{s}{2} - m^2 \right) \left( \frac{s}{2} - 3m^2 \right). \quad (16.25) \end{aligned}$$

Отже переріз розсіяння неполяризованих електронів згідно з (12.85) та (12.87) дорівнює

$$\begin{aligned}
d\sigma_{i \rightarrow f} &= \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t) = \\
&= 2r_e^2 \left\{ \frac{1}{t^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{2} + 4m^2(t - m^2) \right] + \frac{1}{u^2} \left[ \frac{s^2 + t^2}{2} + 4m^2(u - m^2) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{tu} \left( \frac{s}{2} - m^2 \right) \left( \frac{s}{2} - 3m^2 \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-t)}{s[s - 4m^2]}, \quad (16.26)
\end{aligned}$$

де розмірний параметр  $r_e = \alpha/m$  отримав назву класичного радіуса електрона (тут  $m = m_e$  – маса електрона), а  $\alpha = e^2/4\pi$  є сталою тонкої структури. У системі одиниць СІ:

$$r_e = \frac{\alpha}{m_e c^2} \simeq 2.818 \cdot 10^{-15} \text{ м.} \quad (16.27)$$

Для кращого розуміння отриманого результату розглянемо часткові випадки.

**У системі центра інерції**, враховуючи, що маси частинок однакові, маємо (див. (12.81)):

$$\begin{aligned}
q_1 = p_1 &= (\varepsilon, \vec{p}_1), & q_2 = p_2 &= (\varepsilon, -\vec{p}_1), \\
q_3 = -p_3 &= -(\varepsilon, \vec{p}_3), & q_4 = -p_4 &= -(\varepsilon, -\vec{p}_3), \quad (16.28)
\end{aligned}$$

де  $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \varepsilon$ ,  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = |\vec{p}|$ . Тоді (див. рис.2.1 на с. 35) отримаємо:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4\varepsilon^2, \quad (16.29)$$

$$\begin{aligned}
t &= (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2(p_1 p_3) = \\
&= 2m^2 - 2(\varepsilon^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta) = -4|\vec{p}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (16.30)
\end{aligned}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = 2m^2 - 2(\varepsilon^2 - |\vec{p}|^2 \cos(\pi - \theta)) = -4|\vec{p}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (16.31)$$

$$d\varphi d(-t) = 2|\vec{p}|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2|\vec{p}|^2 d\Omega. \quad (16.32)$$

Підставивши (16.29) – (16.32) у (16.26) отримаємо громіздкий вираз, який можна звести до

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \frac{m^2 (\varepsilon^2 + \vec{p}^2)^2}{4\vec{p}^4 \varepsilon^2} \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{\vec{p}^2}{\varepsilon^2 + \vec{p}^2} \right)^2 \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (16.33)$$



Для чисельного аналізу цього виразу зручно його записати через безрозмірний параметр швидкості одного з електронів, а саме:  $v = |\vec{p}'|/\varepsilon$ ,  $m/\varepsilon = \sqrt{1 - v^2}$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \frac{(1 - v^4)(1 + v^2)}{4v^4} \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} + \frac{v^4}{(1 + v^2)^2} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \right]. \quad (16.34)$$

У нерелятивістському наближенні ( $\varepsilon \rightarrow m$ ,  $\vec{p}'^2 \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$ ) маємо

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{r_e^2}{4v^4} \left[ \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (16.35)$$

При цьому швидкість електрона вважається достатньо малою ( $v \ll 1$ ), однак не може прямувати до нуля. Це необхідно для того, щоб виконувалась умова застосовності теорії збурень  $\alpha/v \ll 1$  (тобто відносна швидкість початкових електронів має бути набагато більшою за  $1/137$  швидкості світла  $v \gg c/137$ ), див. [11], §126. У цьому наближенні отриманий нами вираз узгоджується з виразом розрахованим в рамках нерелятивістської квантової механіки для розсіяння тотожних частинок у борнівському наближенні, див. [11], §137.

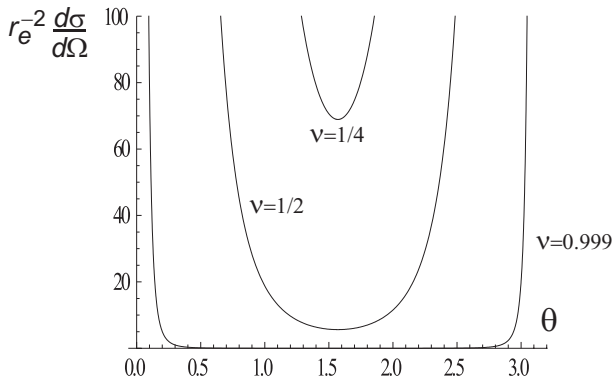
В ультрарелятивістському наближенні ( $\varepsilon^2 \rightarrow \vec{p}'^2$ ,  $v \rightarrow 1$ ) маємо

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{у.р.}} &= r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right] = r_e^2 \frac{m^2}{4\varepsilon^2} \frac{(3 + \cos^2 \theta)^2}{\sin^4 \theta} = \\ &= r_e^2 (1 - v) \frac{(3 + \cos^2 \theta)^2}{2 \sin^4 \theta}. \end{aligned} \quad (16.36)$$

Як в нерелятивістському (16.35), так і в ультрарелятивістському (16.36) наближенні переріз розсіяння швидко спадає зі збільшенням енергії електронів. Тобто зі збільшенням енергії електрони повинні пролітати ближче один до одного для ефективної взаємодії.

Відмітимо, що отриманий вираз (16.33) є симетричним до заміни  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ . Так і має бути, оскільки зазначена заміна рівнозначна заміні місцями кінцевих електронів, що є тотожними частинками (див. Рис. 2.1 на с. 35).

Зауважимо, що в області  $\theta \rightarrow 0$  ( $\theta \rightarrow \pi$ ) диференціальний переріз розсіяння прямує до нескінченності, див. рис. 19.1, що побудований на



**Рис. 16.1.** Диференційний переріз електрон-електронного розсіяння в системі центру інерції для різних значень швидкості одного з електронів  $v = |\vec{p}|/\varepsilon$ .

основі (16.34). Слід зазначити, що математично нескінченність в диференційному перерізі електрон-електронного розсіяння виникає тоді, коли 4-імпульс віртуального фотона виходить на масову поверхню ( $q^2 = m_\gamma^2 = 0$ ), що відповідає випадку, коли змінні  $t$  або  $u$  прямують до нуля. В результаті і повний переріз електрон-електронного розсіяння  $\sigma = \int (d\sigma/d\Omega) \sin\theta d\theta d\varphi$  є розбіжною величиною.

**У лабораторній системі відліку** [12], в якій один з електронів (нехай це буде електрон із характеристиками, які ми позначили цифрою 2) спочатку був нерухомим ( $E_2 = m$ ,  $\vec{p}_2 = 0$ ), внаслідок взаємодії змінюються як напрямок, так і величини імпульсів та енергії частинок. Тому параметр  $d(-t)$ , що входить до визначення перерізу розсіяння (12.85), не можна виразити лише через диференціал кута, на який відхилився електрон, що спочатку налітає на нерухомий електрон. Виявляється, що параметр  $d(-t)$  можна виразити через зміну безрозмірного параметра

$$\Delta = (E_1 - E_3)/m = (E_4 - m)/m, \quad (16.37)$$

що виражає передану енергію нерухомому електрону (або зміну енергії електрона, що налітає), а кінематичні інваріанти через параметр  $\Delta$  та енергію електрона, що налітає:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 p_2) = 2m(m + E_1), \quad (16.38)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 = p_4^2 + p_2^2 - 2(p_4 p_2) = \\ = 2m^2 - 2E_4 m = /E_4 = m(\Delta + 1)/ = -2m^2 \Delta, \quad (16.39)$$

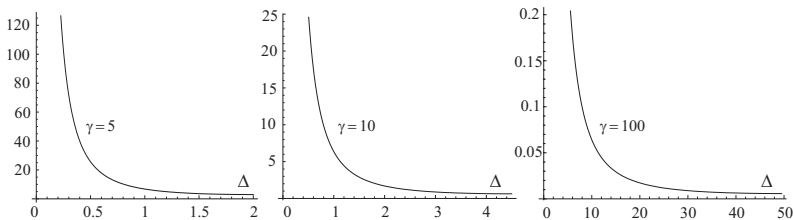
$$u = (p_1 - p_4)^2 = -2m(E_1 - m - m\Delta) \quad (16.40)$$

$$d\varphi d(-t) = 2m^2 d\varphi d\Delta. \quad (16.41)$$

Підставивши (16.38) – (16.41) у (16.26) і проінтегрувавши за  $d\varphi$ , отримаємо вираз для перерізу електрон-електронного розсіяння в лабораторній системі відліку:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left[ \frac{(\gamma - 1)^2 \gamma^2}{\Delta^2 (\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta(\gamma - 1 - \Delta)} + 1 \right], \quad (16.42)$$

де введено позначення  $\gamma = E_1/m$ , а величини  $m\Delta = E_4 - m$  та  $m(\gamma - 1 - \Delta) = E_3 - m$  виражають кінетичні енергії електронів після взаємодії. Тотожність електронів виражається в тому, що в (16.42) зазначені величини входять симетрично.



**Рис. 16.2.** Обезрозмірений переріз електрон-електронного розсіяння в лабораторній системі відліку для різних енергій частинок. По осі ординат відкладено  $r_e^{-2} \frac{d\sigma}{d\Delta}$ , по осі абсцис параметр  $\Delta$  у межах  $0 < \Delta < (\gamma - 1)/2$ .

У граничному випадку  $\Delta \rightarrow 0$  диференційний переріз розсіяння також прямує до нескінченності  $\sim 1/\Delta^2$  (див. рис. 16.2). Якщо параметр  $\Delta$  змінювати в межах  $(\gamma - 1)/2 < \Delta < \gamma - 1$ , ми отримаємо дзеркально симетричні рисунки до наведених на рис. 16.2.

**Завдання**

1. Переконатись у справедливості (16.21), (16.22).
2. Переконатись у справедливості (16.24), (16.25).
3. Довести справедливість (16.40).
4. Вважаючи електроном віддачі той електрон, що після взаємодії має меншу енергію, визначити межі, в яких змінюється параметр  $\Delta$ .
5. Показати безпосереднім розрахунком, що в другому порядку теорії збурень переріз розсіяння не зміниться, якщо один із початкових або кінцевих електронів є поляризованим.
6. Що можна сказати, не проводячи розрахунків, про кінцевий спіральний стан ультрарелятивістських електронів, якщо спочатку вони перебувають у стані: а)  $e_L, e_L$ ; б)  $e_R, e_L$ ; в)  $e_R, e_R$ .
7. У системі центру інерції отримати перерізи розсіяння ультрарелятивістських електронів, якщо в початковому стані вони мали: а) однакову; б) різну спіральність. Скористайтесь результатом задачі 3 з розділу 4.
8. Користуючись поняттям перехресної інваріантності, розглянути  $e - e^+$ -розсіяння. Для цього випадку отримати аналог формул (16.26), (16.33) – (16.36), (16.42). Чи мають вони симетрію до заміни частинок місцями?
9. Пояснити, чому в нерелятивістському наближенні внесок від діаграми анігіляційного типу при  $e - e^+$ -розсіянні зникає.

## РОЗДІЛ 17

### Електрон-фотонне розсіяння

Для того, щоб знайти диференційний переріз процесу електрон-фотонного розсіяння (12.62) необхідно розрахувати величину  $|M_{fi}|^2$ . Згідно з означеннями (1.34), (1.40) і виразом для матриці електрон-фотонного розсіяння в другому порядку теорії збурень (4.15) амплітуда електрон-фотонного розсіяння може бути записана у вигляді

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\nu^{\lambda_1} (\vec{k}_1) \epsilon_\mu^{*\lambda_2} (\vec{k}_2) \bar{v}_2 \left[ \gamma^\nu \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{m + \not{p}_1 + \not{k}_1}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} \gamma^\nu \right] v_1. \quad (17.1)$$

Щоб уникнути громіздких записів, у цьому розділі будемо позначати  $\epsilon^{\lambda_i}(\vec{k}_i) \equiv \epsilon^{\lambda_i}$ .

Отриманий вираз можна суттєво спростити, якщо врахувати, що до нього входить згортка з  $\gamma$ -матрицями 4-імпульсу реального ферміона та його хвильова функція, які пов'язані через рівняння Дірака (див., (Д5.1.9))

$$(q \not{p} - m)v_{qp} = 0, \quad \bar{v}_{qp}(q \not{p} - m) = 0, \quad q = \pm 1, \quad (17.2)$$

де  $q = 1$  ( $-1$ ) відповідає частинці (античастинці). Тоді

$$\not{p}_1 \gamma^\mu v_1 = p_{1,\alpha} \gamma^\alpha \gamma^\mu v_1 = /(\text{Д5.2})/ = (2p_1^\mu - \gamma^\mu \not{p}_1)v_1 = (2p_1^\mu - m\gamma^\mu)v_1 \quad (17.3)$$

і (17.1) набуває вигляду

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\nu^{\lambda_1} \epsilon_\mu^{*\lambda_2} \bar{v}_2 \left[ \frac{2p_1^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\mu}{m^2 - (p_1 - k_2)^2} + \frac{2p_1^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}_1 \gamma^\nu}{m^2 - (p_1 + k_1)^2} \right] v_1. \quad (17.4)$$

Для знаходження  $|M_{fi}|^2$  використаємо (14.3), (14.4) і визначення кінематичних інваріантів (12.77), які для нашого випадку будуть

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + k_1)^2 = m^2 + 2(p_1 k_1); \\ t &= (p_1 - p_2)^2 = (k_2 - k_1)^2 = -2(k_1 k_2); \\ u &= (p_1 - k_2)^2 = m^2 - 2(p_1 k_2). \end{aligned} \quad (17.5)$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \bar{v}_2 \left[ \frac{2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \not{\epsilon}^{\lambda_1} - \not{\epsilon}^{\lambda_1} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2}}{m^2 - u} + \frac{2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \not{\epsilon}^{*\lambda_2} + \not{\epsilon}^{*\lambda_2} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1}}{m^2 - s} \right] v_1 \times \\
&\quad \times \bar{v}_1 \left[ \frac{2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \not{\epsilon}^{*\lambda_1} - \not{\epsilon}^{\lambda_2} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1}}{m^2 - u} + \frac{2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \not{\epsilon}^{\lambda_2} + \not{\epsilon}^{*\lambda_1} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2}}{m^2 - s} \right] v_2 = \\
&= \frac{1}{(m^2 - u)^2} \left[ 4(\epsilon^{*\lambda_2} p_1)(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - \right. \\
&\quad - 2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - 2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 + \\
&\quad \left. + \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 \right] + \\
&\quad + \frac{1}{(m^2 - s)^2} \left[ 4(\epsilon^{\lambda_1} p_1)(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \right. \\
&\quad + 2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + 2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \\
&\quad \left. + \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 \right] + \\
&\quad + \frac{1}{(m^2 - u)(m^2 - s)} \left[ 4(\epsilon^{*\lambda_2} p_1)(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 + \right. \\
&\quad + 2(\epsilon^{*\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 - 2(\epsilon^{*\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 - \\
&\quad \left. - \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} v_2 \right] + \\
&\quad + \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \left[ 4(\epsilon^{\lambda_1} p_1)(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 + \right. \\
&\quad + 2(\epsilon^{\lambda_2} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - 2(\epsilon^{\lambda_1} p_1) \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 - \\
&\quad \left. - \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_2} k_1 \not{\epsilon}^{\lambda_1} v_1 \bar{v}_1 \not{\epsilon}^{\lambda_2} k_2 \not{\epsilon}^{*\lambda_1} v_2 \right]. \tag{17.6}
\end{aligned}$$

Доданки, що утворилися, мають структуру  $\bar{v}_i A v_k \bar{v}_k B v_i$ , де  $A, B$  – деякі матриці розмірності  $(4 \times 4)$ . Тоді

$$\bar{v}_{i,\alpha} A_{\alpha\beta} v_{k,\beta} \bar{v}_{k,\gamma} B_{\gamma\delta} v_{i,\delta} = v_{i,\delta} \bar{v}_{i,\alpha} A_{\alpha\beta} v_{k,\beta} \bar{v}_{k,\gamma} B_{\gamma\delta} = \text{Tr}[\rho_i A \rho_k B], \tag{17.7}$$

де ми використали визначення (4.9). Тоді (17.6) можна записати як:

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{*\lambda_1} \epsilon_\xi^{\lambda_2} \epsilon_\sigma^{*\lambda_2} \left\{ \frac{1}{(m^2 - u)^2} \left[ 4p_1^\sigma p_1^\xi \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu] - \right. \right. \\
&\quad - 2p_1^\sigma k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\nu] - 2p_1^\xi k_{2,\alpha} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu] + \\
&\quad \left. \left. + k_{2,\alpha} k_{2,\beta} \text{Tr}[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\beta \gamma^\nu] \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(m^2 - s)^2} [4p_1^\mu p_1^\nu Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi] + \\
& + 2p_1^\mu k_{1,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\xi] + 2p_1^\nu k_{1,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi] + \\
& + k_{1,\alpha} k_{1,\beta} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\xi]] + \\
& + \frac{1}{(m^2 - u)(m^2 - s)} [4p_1^\sigma p_1^\nu Tr[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi] + \\
& + 2p_1^\sigma k_{1,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\xi] - 2p_1^\nu k_{2,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi] - \\
& - k_{2,\alpha} k_{1,\beta} Tr[\rho_2 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\xi]] + \\
& + \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} [4p_1^\mu p_1^\xi Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\nu] + \\
& + 2p_1^\xi k_{1,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\nu] - 2p_1^\mu k_{2,\alpha} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\alpha \gamma^\nu] - \\
& - k_{1,\alpha} k_{2,\beta} Tr[\rho_2 \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\mu \rho_1 \gamma^\xi \gamma^\beta \gamma^\nu]] \Big\}. \tag{17.8}
\end{aligned}$$

Розглянемо найбільш простий випадок розсіяння неполяризованих частинок у випадку, коли значення кінцевої поляризації (спіральності) не фіксується. Це означає, що  $|M_{fi}|^2$  потрібно усереднити за початковим поляризаційним і спіральним станами  $\mu_1, \lambda_1$  та підсумувати за всіма можливими поляризаційними та спіральними станами кінцевих частинок  $\mu_2, \lambda_2$ , тобто треба

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\mu_2, \lambda_2} \frac{1}{2} \sum_{\mu_1} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1} |M_{fi}|^2. \tag{17.9}$$

Підсумовування легко виконати, користуючись (16.13) та (Д4.3.19):

$$\sum_{\mu_i=1}^2 \rho_i = \bar{\rho}_i = (m + \not{p}_i), \quad i = 1, 2 \tag{17.10}$$

$$\sum_{\lambda_1=1}^2 \sum_{\lambda_2=1}^2 \epsilon_\mu^{\lambda_1} \epsilon_\nu^{*\lambda_1} \epsilon_\xi^{\lambda_2} \epsilon_\sigma^{*\lambda_2} = g_{\mu\nu} g_{\xi\sigma}. \tag{17.11}$$

Отже, (17.8) можна записати як

$$\begin{aligned}
\frac{|M_{fi}|^2}{e^4} = g_{\mu\nu} g_{\xi\sigma} \left[ \frac{A^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - u)^2} + \frac{B^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - s)^2} + \right. \\
\left. + \frac{C^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - u)(m^2 - s)} + \frac{D^{\mu\nu\xi\sigma}}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \right], \tag{17.12}
\end{aligned}$$

Аналізуючи явні вирази для тензорів  $A, B, C, D$  легко побачити, що за допомогою зміни німих індексів підсумовування між ними існують такі співвідношення:  $B^{\mu\nu\xi\sigma} = A^{\mu\nu\xi\sigma}(k_2 \rightarrow -k_1)$  та  $C^{\mu\nu\xi\sigma} = D^{\mu\nu\xi\sigma}$ .

Оскільки вирази, що входять у  $|M_{fi}|^2$  (17.8) подібні, то детально розглянемо лише три типових доданка, в яких  $\rho_i$  замінимо на  $\bar{\rho}_i$ <sup>1</sup>.

**Розрахунок доданка**  $g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu]$ :

$$\begin{aligned} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu] &= Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu(m + \not{p}_1)\gamma^\nu] = \\ &= m^2 Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] + p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu]; \end{aligned} \quad (17.13)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 4p_1^2 Tr[\gamma_\nu\gamma^\nu] = /(\mathbf{14.5})/ = \\ &= 4p_1^2 Tr[4I] = 64m^2; \end{aligned} \quad (17.14)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] &= 4p_1^2 p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha \underline{\gamma_\nu\gamma^\beta\gamma^\nu}] = \\ &= /(\mathbf{14.6})/ = -8p_1^2 p_{2,\alpha}p_{1,\beta} Tr[\gamma^\alpha\gamma^\beta] = -32m^2(p_1p_2). \end{aligned} \quad (17.15)$$

Звідки випливає

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}4p_1^\sigma p_1^\xi Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\nu] = 32m^2[2m^2 - (p_1p_2)]. \quad (17.16)$$

**Розрахунок доданка**  $-2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu]$ :

$$\begin{aligned} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] &= Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu(m + \not{p}_1)\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = \\ &= m^2 Tr[\gamma^\mu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] + p_{2,\beta}p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu]; \end{aligned} \quad (17.17)$$

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\gamma^\mu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] &= -2p_{1,\xi}k_{2,\alpha} Tr[\gamma_\nu\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = \\ &= /(\mathbf{14.7})/ = -8p_{1,\xi}k_{2,\alpha}g^{\xi\alpha} Tr[I] = -32(p_1k_2); \end{aligned} \quad (17.18)$$

$$\begin{aligned} -2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] &= \\ &= -2p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta \underline{\gamma_\nu\gamma^\tau\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu}] = /(\mathbf{14.7})/ = \\ &= 4p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau} Tr[\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\xi\gamma^\tau] = /(\mathbf{14.24})/ = \\ &= 16p_{1,\xi}k_{2,\alpha}p_{2,\beta}p_{1,\tau}(g^{\beta\alpha}g^{\xi\tau} - g^{\beta\xi}g^{\alpha\tau} + g^{\alpha\xi}g^{\beta\tau}) = 16m^2(p_2k_2). \end{aligned} \quad (17.19)$$

Звідки випливає

$$-2g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}p_1^\sigma k_{2,\alpha} Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\nu] = -16m^2[2(p_1k_2) - (p_2k_2)]. \quad (17.20)$$

<sup>1</sup>У наведених нижче розрахунках ми не виписуємо доданки, що містять добуток непарної кількості  $\gamma$ -матриць згідно з розд. 14.



**Розрахунок доданка**  $g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu]$ :

$$Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = Tr[(m + \not{p}_2)\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma(m + \not{p}_1)\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = \\ = m^2Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] + p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\omega\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu]; \quad (17.21)$$

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma_\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = \\ = k_{2,\alpha}k_{2,\beta}4Tr[\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu] = k_{2,\alpha}k_{2,\beta}16g^{\alpha\beta}Tr[I] = 64k_2^2 = 0; \quad (17.22)$$

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\omega\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega} \times \\ \times Tr[\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma_\xi\gamma^\omega\gamma^\beta\gamma^\nu] = /(\mathbf{14.6})/ = -2k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega} \times \\ \times Tr[\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\omega\gamma^\beta\gamma^\nu] = /(\mathbf{14.8})/ = 4k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}Tr[\gamma^\lambda\gamma^\beta\gamma^\omega\gamma^\alpha] = \\ = /(\mathbf{14.24})/ = 16k_{2,\alpha}k_{2,\beta}p_{2,\lambda}p_{1,\omega}(g^{\lambda\beta}g^{\omega\alpha} - g^{\lambda\omega}g^{\beta\alpha} + g^{\lambda\alpha}g^{\beta\omega}) = \\ = 16((p_2k_2)(p_1k_2) - (p_1p_2)k_2^2 + (p_2k_2)(p_1k_2)) = 32(p_2k_2)(p_1k_2). \quad (17.23)$$

Звідки випливає

$$g_{\mu\nu}g_{\xi\sigma}k_{2,\alpha}k_{2,\beta}Tr[\bar{\rho}_2\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\bar{\rho}_1\gamma^\xi\gamma^\beta\gamma^\nu] = 32(p_2k_2)(p_1k_2). \quad (17.24)$$

Таким чином, з урахуванням коефіцієнта  $1/4$  з (16.12) отримуємо

$$\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} = \frac{m^2[2m^2 - (p_1p_2)] - m^2[2(p_1k_2) - (p_2k_2)] + (p_2k_2)(p_1k_2)}{(m^2 - u)^2} + \\ + \frac{m^2[2m^2 - (p_1p_2)] + m^2[2(p_1k_1) - (p_2k_1)] + (p_2k_1)(p_1k_1)}{(m^2 - s)^2} + \\ + \frac{1}{(m^2 - s)(m^2 - u)} \{m^2[m^2 + (p_1p_2)] + (k_1k_2)[-m^2 + 2(p_1p_2)] + \\ + 2m^2(p_1, k_1 - k_2) + m^2(p_2, k_1 - k_2) - 2(p_1p_2)(p_1, k_1 - k_2)\}. \quad (17.25)$$

Цей вираз можна звести до більш елегантного вигляду, використовуючи закон збереження 4-імпульсу  $p_1 + k_1 = p_2 + k_2$  та  $p_i^2 = m^2$ ,  $k_i^2 = 0$ :

$$\frac{|M_{fi}|^2}{8e^4} = \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \\ - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right), \quad (17.26)$$

де величини  $s, u, t$  визначені в (17.5).

Інваріант  $I$ , що входить до визначення перерізу (12.86), у нашому випадку дорівнює  $I^2 = [s - m^2]^2/4$ , а отже, переріз розсіяння неполяризованих електронів на неполяризованих фотонах (12.85):

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi} \frac{|\overline{M_{fi}}|^2}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-t) = 4r_e^2 \left\{ \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left( \frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-t)}{(s - m^2)^2}, \quad (17.27)$$

де  $r_e = \alpha/m = e^2/(4\pi m)$  — класичний радіус електрона.

Для кращого розуміння отриманого результату розглянемо часткові випадки. **У лабораторній системі відліку**, де початковий електрон перебуває у стані спокою, маємо  $p_1 = (m, 0)$ ,  $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$ ,  $k_1 = \omega(1, \vec{k}_1/|\vec{k}_1|)$ ,  $k_2 = \omega'(1, \vec{k}_2/|\vec{k}_2|)$ .

Піднісши до квадрата рівність  $p_1 + k_1 - k_2 = p_2$ , що виражає збереження енергії-імпульсу в системі, отримаємо:

$$p_1 k_1 - p_1 k_2 - k_1 k_2 = 0, \text{ або } m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\theta) = 0. \quad (17.28)$$

Останній вираз дасть зв'язок між енергією фотона після взаємодії та кутом розсіяння фотона  $\theta$  (кут між початковим і кінцевим векторами імпульсу фотона)

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (17.29)$$

Як легко побачити, при нульовому куті розсіяння та в нерелятивістському випадку  $\omega/m \ll 1$  (саме тому для видимого світла ефект зміни частоти фотона нівелюється) енергія фотона не змінюється; очевидно, що найбільша зміна енергії відбувається при розсіянні назад.

До речі, саме завдяки виразу (17.29), записаному через довжини хвиль фотона до та після розсіяння

$$\lambda' = \lambda + m^{-1}(1 - \cos\theta), \quad (17.30)$$

величина розмірністю довжини  $m^{-1}$  отримала назву комптонівської довжини хвилі частинки.

Явні вирази для кінематичних інваріантів (17.5) легко отримати:

$$s = m^2 + 2m\omega; \quad u = m^2 - 2m\omega';$$

$$t = -2k_1 k_2 = -2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = /(\text{17.29})/ = -\frac{2m\omega^2(1 - \cos\theta)}{m + \omega(1 - \cos\theta)}. \quad (17.31)$$

Вважаючи початкову енергію фотона фіксованою, знаходимо

$$d(-t) = 2\omega'^2 \sin\theta d\theta. \quad (17.32)$$

Підставивши (17.31), (17.32) у (17.27) отримуємо остаточний вираз для перерізу електрон-фотонного розсіяння, який можна компактно записати, використавши (17.29):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right). \quad (17.33)$$

Отриманий вираз називають формулою Клейна–Нішини, його вперше отримано у 1929 р.

У нерелятивістському наближенні ( $\omega/m \ll 1$ )  $\omega' \approx \omega$  і вираз (17.33) отримує вигляд формули Томсона (див. [10], § 78), отриманої в класичній теорії для розсіяння вільної нерухомої зарядженої частинки неполяризованим електромагнітним полем (наприклад, звичайним світлом):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{н.р.}} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta). \quad (17.34)$$

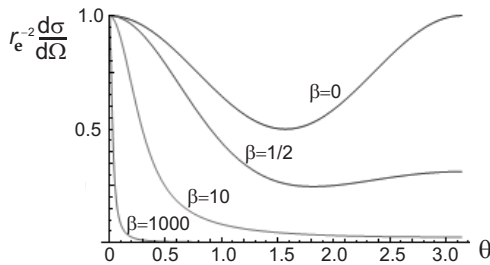
Як бачимо, зі збільшенням маси нерелятивістської зарядженої частинки переріз її розсіяння на фотоні швидко зменшується ( $r_e^2 \sim m^{-2}$ ). Справа в тому, що в класичній теорії розсіяння відбувається за рахунок того, що електромагнітна хвиля, діючи на заряджену частинку, викликає її рух, що призводить до випромінювання частинкою нової хвилі в різні боки. Отже, чим масивніша заряджена частинка, тим важче змусити її рухатись. Тобто у випадку  $m \rightarrow \infty$  згідно з класичними міркуваннями та отриманим нами виразом (17.33) розсіяння не повинно відбуватися, однак це не так. Вираз (17.33) ми отримали лише в першому неznикаючому наближенні. Уже в наступному наближенні (четвертий порядок з теорії збурень) будуть доданки, що не зникають при  $m \rightarrow \infty$  [1].

Зауважимо, що диференційний переріз є величиною одного порядку при різних значеннях кута розсіяння. У класичній теорії це обумовлено тим, що падаюча електромагнітна хвиля є неполяризованою (усередненою по напрямкам напруженості електричного поля в площині, перпендикулярній хвильовому вектору), завдяки чому заряджена частинка, рухаючись під дією цього поля, випромінює в різні боки з майже однаковою інтенсивністю.

При збільшенні енергії фотона диференційний переріз розсіяння отримує чітко виділений максимум при розсіянні вперед, тобто на малі кути (див. рис. 17.1). А в ультрарелятивістському наближенні ( $\beta = \omega/m \gg 1$ ) він взагалі є ненульовим лише коли  $\theta \rightarrow 0$ , тобто

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \delta_{\theta,0} r_e^2, \quad (17.35)$$

де  $\delta_{\alpha,\beta}$  – символ Кронекера.



**Рис. 17.1.** Диференційний переріз електрон-фотонного розсіяння для різних значень параметра  $\beta = \omega/m$  у лабораторній системі відліку.

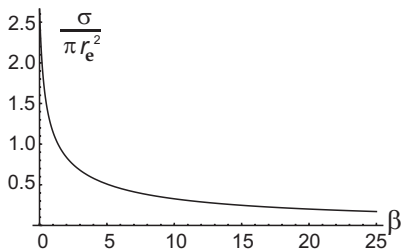
Як видно з рис. 17.1, диференційний переріз  $e - \gamma$ -розсіяння (на відміну від випадку  $e - e$ -розсіяння) є скінченним при всіх значеннях кута розсіяння, тому можна обчислити величину повного перерізу розсіяння

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |\beta = \omega/m| = \\ &= \pi \frac{r_e^2}{\beta^3} \left[ \frac{2\beta(2 + 8\beta + 9\beta^2 + \beta^3)}{(1 + 2\beta)^2} + (\beta^2 - 2\beta - 2) \ln(1 + 2\beta) \right], \quad (17.36) \end{aligned}$$

де в граничних випадках

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma = \frac{8}{3} \pi r_e^2; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma \sim r_e^2 \beta^{-1} \ln[\beta] \rightarrow 0. \quad (17.37)$$

Як видно з рис. 17.2, найбільший переріз розсіяння буде при малих енергіях фотона, а при збільшенні енергії фотона переріз розсіяння спадатиме.



**Рис. 17.2.** Повний переріз електрон-фотонного розсіяння як функція параметра  $\beta = \omega/m$  у лабораторній системі відліку.

У системі центра інерції енергії частинок, що налітають, до та після взаємодії не змінюються, змінюються лише напрямки їх імпульсів. Отже, маємо

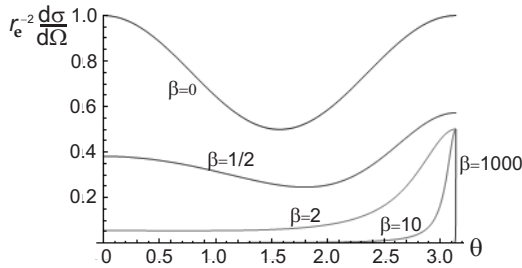
$$p_1 = (E, \omega \vec{p}_1 / |\vec{p}_1|), \quad k_1 = \omega(1, -\vec{p}_1 / |\vec{p}_1|), \\ p_2 = (E, \omega \vec{p}_2 / |\vec{p}_2|), \quad k_2 = \omega(1, -\vec{p}_2 / |\vec{p}_2|), \quad (17.38)$$

де  $E = \sqrt{m^2 + \omega^2}$ ,  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \omega$ . Тоді

$$s = m^2 + 2\omega(E + \omega); \quad u = m^2 - 2\omega(E + \omega \cos \theta); \\ t = -2\omega^2(1 - \cos \theta); \quad d(-t) = 2\omega^2 \sin \theta d\theta. \quad (17.39)$$

Підставивши (17.39) у (17.27) отримуємо громіздкий вираз для диференційного перерізу розсіяння, що в нерелятивістському наближенні ( $\omega/m \ll 1$ ) узгоджується з виразом (17.34), отриманим у лабораторній системі відліку. Ми не будемо його виписувати, однак зауважимо, що зі збільшенням енергії фотона поведінка диференційного перерізу в системі центра інерції кардинально змінюється, а саме, спостерігається чіткий максимум при розсіянні у зворотному напрямку

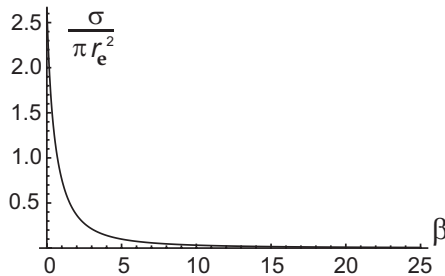
(див. рис. 17.3). При цьому в граничному випадку  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} (d\sigma/d\Omega) = \delta_{\theta, \pi} r_e^2/2$ , де  $\delta_{\alpha, \beta}$  – символ Кронекера.



**Рис. 17.3.** Диференційний переріз електрон-фотонного розсіяння для різних значень параметра  $\beta = \omega/m$  у системі центра інерції.

Вираз для повного перерізу розсіяння також має громіздкий вигляд, тому наведемо лише його графічне представлення (див. рис. 17.4) та граничні випадки:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma \sim r_e^2 \beta^{-2} \ln[\beta] \rightarrow 0. \quad (17.40)$$



**Рис. 17.4.** Повний переріз електрон-фотонного розсіяння як функція параметра  $\beta = \omega/m$  у системі центра інерції.

Як видно з рис. 17.4 та з аналітичних розрахунків, у системі центра інерції повний переріз розсіяння зі збільшенням енергії частинок, що налітають, спадає швидше, ніж у лабораторній системі відліку, див. рис. 17.2.

### Поляризаційні ефекти комптонівського розсіяння

Поляризаційні ефекти при  $e$ - $\gamma$ -розсіянні мають цікаві особливості. Для спрощення розглянемо їх в ультрарелятивістському наближенні в системі центра інерції та у випадку кірального представлення  $\gamma$ -матриць [16].

Відразу зазначимо, що в цьому випадку в (17.38)  $E \simeq \omega$  і згідно з рис. 17.3 розсіяння відбувається назад  $\theta = \pi - \chi$ ,  $\chi \rightarrow 0$ . Тоді маємо

$$\begin{aligned} m^2 - u &= m^2 + (\omega\chi)^2, \\ m^2 - s &= -(m^2 + 4\omega^2). \end{aligned} \quad (17.41)$$

Отже, основний внесок в амплітуду розсіяння (17.1) в ультрарелятивістському випадку буде давати перший доданок і наближено можна записати

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{m + \not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1. \quad (17.42)$$

В області малих значень кута  $\chi$  ( $m/\omega \ll \chi \ll 1$ , відповідно  $(\omega\chi)^2 \gg m^2$ ) знаменник (17.42) буде  $\sim \chi^2$ , що й пояснює максимум перерізу розсіяння при  $\theta \rightarrow \pi$ . Водночас, на відміну від інших процесів в ультрарелятивістському наближенні, ми не можемо просто покласти  $m = 0$ , а вимушені утримувати масовий доданок, щоб не було нефізичної розбіжності при  $\theta = \pi$ .

Для початку розглянемо випадок, коли  $\chi \ll 1$  та  $\omega\chi \gg m$ . Вираз для різниці 4-векторів  $p_1 - k_2$  зручно записати, скориставшись рис. 17.5 та врахувавши, що в ультрарелятивістському наближенні в системі центра інерції  $\vec{k}_2 = -\vec{p}_2$  та  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \approx w$ :

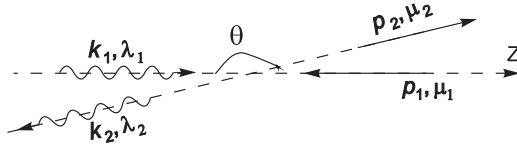
$$p_1 - k_2 = (E - \omega, |\vec{p}_1|(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/|\vec{p}_1|) \approx \omega\chi(0, \cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (17.43)$$

де ми записали компоненти вектора  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  в сферичній системі відліку; кут  $\varphi$  — кут у площині, перпендикулярній до осі  $z$  та ми знехтували доданками  $\sim \chi^2$ . Тоді у чисельнику виразу (17.42) залишаються лише доданки  $\not{p}_1 - \not{k}_2$ :

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1. \quad (17.44)$$

З явного вигляду (17.44) випливає, що оскільки початковий електрон перебував у певному спіральному (кіральному) стані (тобто для

його функції виконується відповідне співвідношення  $v_1 = \hat{P}_\pm v_1$ ), то й кінцевий електрон залишиться в тому ж спіральному стані. Це пов'язано з тим, що оператор проектування на певний кіральний стан початкового електрона при перенесенні через три  $\gamma$ -матриці перетвориться на проєктуючий оператор на інший кіральний стан, оскільки  $\hat{P}_\pm \gamma^\mu = \gamma^\mu \hat{P}_\mp$  (див. додаток Д.5.2).



**Рис. 17.5.** Електрон-фотонне розсіяння назад у системі центра інерції в ультрарелятивістському випадку.

Припустимо, що початковий (а значить і кінцевий) електрон має праву кіральність, а початковий фотон має праву поляризацію. Якщо вибрати вісь  $z$  уздовж напрямку руху початкового фотона (див. рис. 17.5), то згідно з домовленістю (див. додаток Д.4.4) поляризаційний 4-вектор початкового фотона матиме вигляд

$$\epsilon_R^{\lambda_1} = \epsilon^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \quad \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z. \quad (17.45)$$

Хвильові функції початкового та кінцевого електронів у кіральному представленні згідно з (Д5.3.6) дорівнюють<sup>1</sup>

$$v_{1,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon\omega_k^{(+)}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = /(\text{Д5.1.28}), \theta' = \pi / = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17.46)$$

$$v_{2,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon\omega_k^{(+)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = /(\text{Д5.1.28}), \theta' = 0 / = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17.47)$$

<sup>1</sup>Згідно з (Д5.1.28) ми повинні були б виписати відповідні фазові множники в (17.46), (17.47). Однак це просто б призвело до появи додаткового загального фазового множника в (17.52), який не вплине на вираз для перерізу процесу.



У цьому випадку складова виразу (17.42) дорівнює

$$\bar{v}_{2,R} \not{\epsilon}_R^{\lambda_1} = (v_{2,R})^+ \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_{\mu,R}^{\lambda_1} \equiv 0. \quad (17.48)$$

Отже, у нашому наближенні амплітуда зазначеного процесу дорівнює нулю й процес не може відбутися. Відповідно, початковий фотон повинен мати від'ємну проекцію спіну на напрямок руху (ліву поляризацію) та описуватися поляризаційним вектором

$$\epsilon_L^{\lambda_1} = \epsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \vec{k} \uparrow \vec{e}_z. \quad (17.49)$$

Кінцевий стан фотона легко визначити аналогічним способом. Явно переконавшись, що

$$\not{\epsilon}^{\lambda_2} v_1 = 0, \quad \text{для} \quad \epsilon^{\lambda_2} = \epsilon_L^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad (17.50)$$

приходимо до висновку, що кінцевий фотон має описуватися поляризаційним вектором<sup>1</sup>

$$\epsilon^{\lambda_2} = \epsilon^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \quad (17.51)$$

Враховуючи, що кінцевий фотон рухається проти напрямку осі  $z$ , приходимо до висновку, що він залишається з лівою поляризацією та має від'ємну проекцію спіну на напрямок руху:  $\epsilon_L^{\lambda_2} = \epsilon^1$ ,  $\vec{k} \downarrow \vec{e}_z$ .

Підставивши (17.43), (17.46), (17.47), (17.49), (17.51) у (17.44), отримуємо, що за виконання умов  $m/\omega \ll 1$ ,  $\chi \ll 1$ ,  $\omega\chi \gg m$ :

$$M_{fi}(e_R\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_L) = -e^2 e^{i\varphi} \frac{4\chi}{m^2/\omega^2 + \chi^2}, \quad (17.52)$$

а в аналогічному випадку, коли початковий електрон має ліву поляризацію, легко отримати, що можливий лише процес  $e_L\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_R$ , причому

$$|M_{fi}(e_L\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_R)|^2 = |M_{fi}(e_R\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_L)|^2. \quad (17.53)$$

---

<sup>1</sup>Звичайно, потрібно було б врахувати, що кінцевий фотон не рухається паралельно осі  $z$  і його поляризаційний вектор насправді відрізняється від  $\epsilon^{1,2} = (0, 1, \mp i, 0)/\sqrt{2}$ . Однак ці відмінності будуть давати внесок у вищому порядку за  $\chi$  і нами не враховуються.

У протилежному випадку, коли  $\chi \rightarrow 0$ , але  $\omega\chi \ll m$ , у чисельнику виразу (17.42) залишається лише масовий доданок

$$M_{fi} = e^2 \bar{v}_2 \not{\epsilon}^{\lambda_1} \frac{m}{m^2 + (\omega\chi)^2} \not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1 \quad (17.54)$$

і це кардинально змінює характер комптонівського розсіяння.

Якщо початковий електрон перебував у певному спіральному (кіральному) стані, то кінцевий електрон, на відміну від попереднього випадку, має змінити спіральний стан на протилежний. Це пов'язано з тим, що оператор проєктування на певний кіральний стан початкового електрона буде вже переноситися не через три, а через дві  $\gamma$ -матриці.

Відповідно, якщо початковий електрон мав праву поляризацію, то кінцевий електрон матиме ліву поляризацію, тобто згідно з (Д5.3.6):

$$v_{2,L} = \begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix} = /(\text{Д5.1.28}), \theta' = \chi / = \sqrt{2\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.55)$$

і його згортка з лівополяризованим початковим фотоном даватиме нуль. Відповідно, у початковому стані може бути лише фотон з правою поляризацією. Висновок щодо кінцевого стану фотона, що базується на добутку  $\not{\epsilon}^{*\lambda_2} v_1$ , залишається без змін — кінцевий фотон має ліву поляризацію. Тобто у випадку дуже малих кутів розсіювання ( $\omega\chi \ll m$ ) початковий електрон та фотон у результаті розсіювання змінюють свої поляризації.

Підставивши (17.45), (17.46), (17.51), (17.55) у (17.54), отримаємо, що за виконання умов  $m/\omega \ll 1$ ,  $\chi \ll 1$ ,  $\omega\chi \ll m$ :

$$M_{fi}(e_R\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_L) = -4e^2 \frac{m/\omega}{m^2/\omega^2 + \chi^2}, \quad (17.56)$$

а в аналогічному випадку, коли початковий електрон має ліву поляризацію, легко отримати, що можливий лише процес  $e_L\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_R$ , причому

$$|M_{fi}(e_L\gamma_L \rightarrow e_R\gamma_R)|^2 = |M_{fi}(e_R\gamma_R \rightarrow e_L\gamma_L)|^2. \quad (17.57)$$

Зазначена жорстка залежність протікання процесу комптонівського розсіяння в ультрарелятивістському випадку від параметра  $\omega\chi$

дозволяє за допомогою одного пучка (електронного або фотонного) з відомою поляризацією (наприклад, за допомогою променя лазера з певною поляризацією) вимірювати поляризацію частинок іншого пучка або виділяти з неполяризованого пучка частинки з певною поляризацією.

### Завдання

1. Перевірити справедливість виразу (17.25).
2. Перевірити справедливість виразу (17.26).
3. Вважаючи, що електрон являє собою сферу, в якій сферично-симетрично рівномірно розподілений заряд з густиною  $\rho$ , знайти радіус цієї сфери (радіус електрона) з умови, щоб енергія електричного поля дорівнювала енергії електрона як масивної частинки, тобто  $m_e c^2$ .
4. Відновити вираз для комптонівської довжини хвилі частинки в системі СІ. Який фізичний зміст комптонівської та дебройлевської довжини хвилі частинки? Яка з них більша? У випадку, коли частинка є електроном, як вони співвідносяться з класичним радіусом електрона?
5. Довести справедливість співвідношення (17.40).
6. Довести справедливість співвідношення (17.43).
7. В ультрарелятивістському наближенні, коли внеском другого доданка в (17.1) було знехтувано, було отримано твердження, що комптонівське розсіяння не відбувається, коли початковий електрон та фотон мають праву кіральність. Переконайтесь, що це твердження залишиться справедливим при врахуванні другого доданка в (17.1).
8. Довести співвідношення (17.48), (17.52), (17.56).
9. Як вплине на переріз реакції врахування масового доданку у чисельнику (17.42) при розгляді процесу  $e_R \gamma_L \rightarrow e_R \gamma_L$  у випадку  $w\chi \gg m$ .
10. Довести твердження (17.53), (17.57).

## РОЗДІЛ 18

### Електрон-позитронна анігіляція у два фотони

Неважко помітити, що процес електрон-позитронної анігіляції є перекресним каналом ( $t$ -каналом) до процесу комптонівського розсіяння, а саме: амплітуда процесу анігіляції відрізняється від амплітуди комптонівського розсіяння заміною кінцевого стану електрона на початковий стан позитрона  $p_2 \rightarrow -p_2$  та початкового стану фотона на його кінцевий стан  $k_1 \rightarrow -k_1$  (див. розділ 9). Фактично, у виразі для квадрата модуля амплітуди комптонівського розсіяння після обчислення всіх згорток (17.25) треба замінити імпульси  $p_2 \rightarrow -p_2$  та  $k_1 \rightarrow -k_1$ . Це призведе до заміни означень двох кінематичних інваріантів  $s$  та  $t$ , а саме:

$$s = (p_1 - k_1)^2, \quad t = (p_1 + p_2)^2, \quad (18.1)$$

а вираз для інваріанта  $u$  не зміниться  $u = (p_1 - k_2)^2$ .

Вираз для квадрата амплітуди процесу електрон-позитронної анігіляції через кінематичні інваріанти буде повністю збігатися<sup>1</sup> з отриманим нами виразом  $|M_{fi}|^2(s, u)$  для електрон-фотонного розсіяння (17.26), де треба буде тільки змінити означення величини  $s$  на (18.1).

Розглянемо тепер множник  $d(-t)/I^2$  у визначенні перерізу реакції (12.85), що визначається з кінематики задачі, а саме:  $t$  визначається через різницю 4-імпульсів початкового електрона та кінцевого фотона, а величина  $I$  (12.56), (12.86) визначається через інваріант  $s$ , що виражається через суму 4-імпульсів початкових частинок. Але у нашому випадку наведений фізичний зміст відповідає іншим інваріантам, а саме: сума 4-імпульсів входить в означення  $t$ , а різниця 4-імпульсів початкового електрона та кінцевого фотона входить в інваріант  $s$ . Тому в нашому випадку  $d(-t)/I(s)^2 \rightarrow d(-s)/I(t)^2$  та, згідно з (12.87),  $I(t)^2 = t[t - 4m^2]/4$ .

З урахуванням сказаного отримаємо вираз для перерізу реакції електрон-позитрон анігіляції у два фотони у вигляді

---

<sup>1</sup>Оскільки ферміони та фотони мають однакову кількість поляризаційних станів (два), то при усередненні за ними коефіцієнт при  $|M_{fi}|^2(s, u)$  не зміниться.

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{64\pi} \frac{|M_{fi}|^2}{I(t)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} d(-s) = 4r_e^2 \left\{ \left( \frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\} \frac{m^2 d\varphi d(-s)}{t(t-4m^2)}, \quad (18.2)$$

де  $r_e = \alpha/m = e^2/(4\pi m)$  — класичний радіус електрона.

Розглянемо процес електрон-позитронної анігіляції в системі центра інерції, в якій

$$p_1 = (\varepsilon, \vec{p}), \quad p_2 = (\varepsilon, -\vec{p}), \quad k_1 = \varepsilon(1, -\vec{k}/|\vec{k}|), \quad k_2 = \varepsilon(1, \vec{k}/|\vec{k}|), \quad (18.3)$$

де  $\varepsilon = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$  — енергія електрона (позитрона) з імпульсом  $\vec{p}$ . Тоді

$$t = 4\varepsilon^2; \quad u = m^2 - 2\varepsilon(\varepsilon - |\vec{p}| \cos \theta); \\ s = m^2 - 2\varepsilon(\varepsilon + |\vec{p}| \cos \theta); \quad ds = 2\varepsilon|\vec{p}| \sin \theta d\theta, \quad (18.4)$$

де кут анігіляції  $\theta$  визначається як кут між векторами  $\vec{p}$  та  $\vec{k}$ .

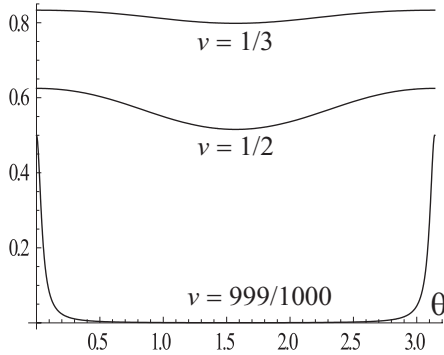
Підставивши (18.4) у формулу для перерізу анігіляції (18.2), отримаємо такий вираз:

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} = \frac{r_e^2 m^2}{4\varepsilon|\vec{p}|} \left[ \frac{\varepsilon^2 + \vec{p}^2(1 + \sin^2 \theta)}{\varepsilon^2 - \vec{p}^2 \cos^2 \theta} - \frac{2|\vec{p}|^4 \sin^4 \theta}{(\varepsilon^2 - \vec{p}^2 \cos^2 \theta)^2} \right]. \quad (18.5)$$

Для чисельного аналізу цього виразу зручно його записати через безрозмірний параметр швидкості електрона  $v = |\vec{p}|/\varepsilon$ ,  $m/\varepsilon = \sqrt{1-v^2}$ :

$$r_e^{-2} \frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} = \frac{1-v^2}{4v} \left[ \frac{1+v^2(1+\sin^2 \theta)}{1-v^2 \cos^2 \theta} - \frac{2v^4 \sin^4 \theta}{(1-v^2 \cos^2 \theta)^2} \right]. \quad (18.6)$$

Поведінка знерозміреного перерізу реакції представлена на рис. 18.1. Як видно, найменш ймовірним є процес випромінювання фотонів в напрямку, перпендикулярному до лінії зустрічного руху електрона та позитрона, а найбільш ймовірним — у паралельному напрямку. Зауважимо, що при невеликих енергіях електронів ( $\varepsilon \simeq m$ ) кутова залежність перерізу реакції відсутня, а при збільшенні енергії відбувається різке збільшення знерозміреного перерізу реакції в області  $\theta \rightarrow 0$  ( $\theta \rightarrow \pi$ ). Легко помітити, що кутова залежність перерізу анігіляції (18.7) має симетрію відносно заміни  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , що пов'язано з



**Рис. 18.1.** Диференційний переріз реакції електрон-позитронної анігіляції в системі центра інерції для різних швидкостей частинок. По осі ординат відкладено  $r_e^{-2}(d\sigma/d\Omega)$  (18.6), параметр  $v = |\vec{p}|/\varepsilon$ .

неможливістю відрізнити між собою перший та другий фотони (фотони тотожні частинки).

В ультрарелятивістському випадку ( $\varepsilon \gg m$ ,  $v \rightarrow 1$ ,  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \varepsilon$ ) вираз (18.5) спрощується до вигляду

$$r_e^{-2} \left( \frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{у.р.}} = \frac{m^2}{\varepsilon^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{4 \sin^2 \theta} = (1 - v) \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta}, \quad (18.7)$$

що є справедливим для не дуже малих кутів ( $\sin \theta > m/E$ ). Бачимо, що для нульового кута анігіляції існує скінченне значення перерізу

$$r_e^{-2} \left( \frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{у.р., } \theta=0} = \frac{1}{2}. \quad (18.8)$$

У нерелятивістському випадку ( $\varepsilon \approx m$ ,  $|\vec{p}_1| \rightarrow 0$ ) з (18.5) маємо відсутність кутової залежності в диференційному перерізі реакції

$$r_e^{-2} \left( \frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{m^2}{4\varepsilon|\vec{p}_1|} = \frac{1}{4v}, \quad (18.9)$$

і відповідно повний переріз реакції у нерелятивістському випадку

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}|_{\text{н.р.}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{н.р.}} = \frac{\pi r_e^2}{2v}, \quad (18.10)$$

де за допомогою множника  $1/2$  ми врахували, що кінцеві частинки є тотожними. Звичайно даний вираз може бути застосований лише за умови  $\alpha/v \ll 1$ , див. розділ 16.

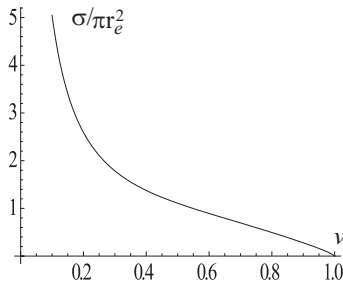
Повний переріз реакції отримується інтегруванням за кутами виразу (18.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \\ &= \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v^2} \left( (3-v^4) \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2) \right), \end{aligned} \quad (18.11)$$

де множник  $1/2$  також зумовлений тотожністю кінцевих частинок. В ультрарелятивістському випадку вираз для перерізу суттєво спрощується та прямує до нуля:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow 2\gamma}|_{\text{у.р.}} = \pi r_e^2 (1-v) \left( \ln \frac{2}{1-v} - 1 \right). \quad (18.12)$$

Поведінка повного перерізу анігіляції електрон-позитронної пари у два фотони представлена на рис.18.2.



**Рис. 18.2.** Повний переріз реакції електрон-позитронної анігіляції в системі центра інерції для різних швидкостей частинок. По осі ординат відкладено  $\sigma/(\pi r_e^2)$ , параметр  $v = |\vec{p}|/\varepsilon$ .

**Завдання**

1. Довести справедливість співвідношень (18.7) та (18.8).
2. Розглянути процес однофотонної  $e - e^+$ -анігіляції в зовнішньому електричному полі нерухомого важкого ядра. При фіксованій енергії ферміонів знайти залежність перерізу реакції від енергії кінцевого фотона у випадку, коли сумарний імпульс електрона та позитрона був нульовим.
3. Розглянути процес  $e - e^+$ -анігіляції в лабораторній системі відліку з нерухомим електроном. Знайти  $d\sigma(x, \gamma)/dx$ , де  $x = w/m$ ,  $\gamma = E/m$ ,  $w$  – енергія одного з фотонів,  $E$  – енергія позитрона. Знайти повний переріз реакції як функцію від  $\gamma$ .
4. Розглянути зворотний процес, а саме, утворення  $e - e^+$ -пари двома фотонами. Записати  $d\sigma$  через змінні Мандельштама. Записати  $d\sigma$  в системі центру інерції. Записати вираз для повного перерізу розсіяння в системі центру інерції.



## РОЗДІЛ 19

### Народження частинок при електрон-позитронних зіткненнях

У прискорювачах на зустрічних пучках (їх часто називають колайдерами від англ. *collide* — зіштовхуватися), в яких зіштовхуються електрони та позитрони, при збільшенні енергії частинок почнуть відбуватися процеси за межами квантової електродинаміки як квантової теорії електронів, позитронів та фотонів.

Розглянемо процес  $ee^+$ -зіткнень та розрахуємо ймовірність народження всіх можливих двочастинкових пар<sup>1</sup> завдяки електромагнітній взаємодії<sup>2</sup>, а саме нас будуть цікавити процеси народження лептонних  $\mu\mu^+$ ,  $\tau\tau^+$  та кваркових  $qq^+$  пар. Часто ці процеси також відносять до процесів КЕД.

#### Утворення пари мюон-антимюон $\mu\mu^+$

Для початку розглянемо процес утворення мюон-антимюонної пари  $e + e^+ \rightarrow \mu + \mu^+$ . Цей процес є одним із найважливіших процесів у фізиці високих енергій. Саме його використовують для калібрування  $ee^+$ -колайдерів. Процес  $e + e^+ \rightarrow \mu + \mu^+$  є перехресним каналом електрон-мюонного розсіяння, що розглядався в розд. 11. Відповідно до (11.14) і позначень, представлених на рис. 19.1, матимемо:

$$S_{fi}^{(2)} = ie^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2V)^2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}} \cdot \frac{(\bar{v}_{-2} \gamma^\nu v_1)(\bar{V}_4 \gamma_\nu V_{-3})}{(p_1 + p_2)^2}, \quad (19.1)$$

де функція  $v_{\pm i}$  стосується до  $i$ -го електрона (позитрона), а  $V_{\pm i}$  — до  $i$ -го мюона (антимюона).

Відповідно до (1.34) та (1.40) амплітуда переходу:

$$M_{fi} = e^2 \cdot \frac{(\bar{v}_{-2} \gamma^\nu v_1)(\bar{V}_4 \gamma_\nu V_{-3})}{(p_1 + p_2)^2}, \quad (19.2)$$

---

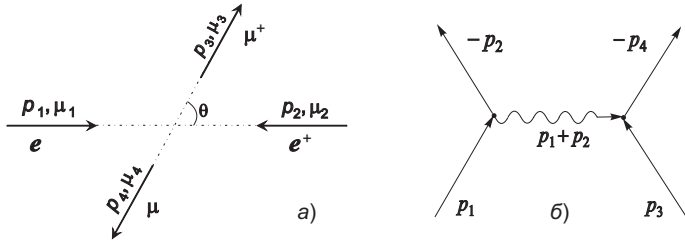
<sup>1</sup>Окрім фотонів, утворення яких було розглянуто в попередньому розділі.

<sup>2</sup>Як видно з окремих частин лагранжіана СМ (11.23) та (11.29), у результаті  $ee^+$ -зіткнень може утворитися нейтральний  $Z$ -бозон, або бозон Хігса, а також пари з усіх ферміонів, що є в СМ, за допомогою обміну віртуальним  $Z$ -бозоном, або бозоном Хігса.

а квадрат її модуля відповідно до (14.3), (14.4):

$$\begin{aligned} \frac{|M_{fi}|^2}{e^4} &= \frac{(\bar{v}_{-2\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^\nu v_{1\beta})(\bar{V}_{4\delta}\gamma_{\nu,\delta\epsilon}V_{-3\epsilon})(\bar{v}_{1\zeta}\gamma_{\zeta\eta}^\mu v_{-2\eta})(\bar{V}_{-3\eta}\gamma_\eta V_4)}{(p_1 + p_2)^4} = \\ &= \frac{Tr[\gamma^\nu \rho_1 \gamma^\mu \rho_{-2}]Tr[\gamma_\nu \varrho_{-3} \gamma_\mu \varrho_4]}{(p_1 + p_2)^4}, \end{aligned} \quad (19.3)$$

де  $\varrho_{\pm i}$  визначається як і  $\rho_{\pm i}$  (4.9), але по щодо мюонів.



**Рис. 19.1.** Утворення мюон-антимюонної пари: а) схематичний вигляд, б) діаграма процесу.

Для спрощення розглянемо випадок неполяризованих частинок. У результаті усереднення та підсумовування за поляризаціями (16.12) отримуємо:

$$\begin{aligned} 4 \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{e^4} &= \frac{Tr[\gamma^\nu \bar{\rho}_1 \gamma^\mu \bar{\rho}_{-2}] \cdot Tr[\gamma_\nu \bar{\varrho}_{-3} \gamma_\mu \bar{\varrho}_4]}{(p_1 + p_2)^4} = / (16.13) / = \\ &= \frac{Tr[\gamma^\nu (m_e + \not{p}_1) \gamma^\mu (m_e - \not{p}_2)] \cdot Tr[\gamma_\nu (m_\mu - \not{p}_3) \gamma_\mu (m_\mu + \not{p}_4)]}{(p_1 + p_2)^4}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Тут має сенс знехтувати масою електрона порівняно з масою мюона, оскільки  $m_e/m_\mu \approx 1/200$ , а неточність, пов'язана із зануленням  $m_e$ , істотно менша від внеску поправок вищих порядків теорії збурень [16]. Отже,

$$4 \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{e^4} = - \frac{Tr[\gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2] \cdot Tr[\gamma_\nu (m_\mu - \not{p}_3) \gamma_\mu (m_\mu + \not{p}_4)]}{(p_1 + p_2)^4}. \quad (19.5)$$

За аналогією з (16.16) легко отримати, що

$$Tr[\gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2] = 4[p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 p_2) + p_1^\nu p_2^\mu], \quad (19.6)$$

$$\text{Tr}[\gamma_\nu(m_\mu - \not{p}_3)\gamma_\mu(m_\mu + \not{p}_4)] = 4[m_\mu^2 g_{\mu\nu} - p_{3\mu}p_{4\nu} + g_{\mu\nu}(p_3p_4) - p_{3\nu}p_{4\mu}]. \quad (19.7)$$

Тоді

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{m_\mu^2(p_1p_2) + (p_1p_4)(p_2p_3) + (p_1p_3)(p_2p_4)}{(p_1 + p_2)^4}. \quad (19.8)$$

Оскільки нас цікавить процес, що відбувається на колайдері на зустрічних пучках, то ми повинні перейти в систему центра інерції. Використавши узагальнений вираз для перерізу реакції, у цьому випадку (12.61) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega_3} &= \frac{1}{64\pi^2} \cdot \frac{\overline{|M_{fi}|^2}}{E^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} = \\ &= 2\alpha^2 \frac{m_\mu^2(p_1p_2) + (p_1p_4)(p_2p_3) + (p_1p_3)(p_2p_4)}{E^2(p_1 + p_2)^4} \cdot \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}, \end{aligned} \quad (19.9)$$

де  $E = \sqrt{s} = E_1 + E_2$  — повна енергія системи,  $\alpha = e^2/4\pi$  — стала тонкої структури.

У нашому випадку 4-імпульси частинок мають наступний вигляд:  $p_1 = (E/2, \vec{p}_1)$ ,  $p_2 = (E/2, -\vec{p}_1)$ ,  $p_3 = (E/2, \vec{p}_3)$ ,  $p_4 = (E/2, -\vec{p}_3)$ . Оскільки в нашому наближенні  $m_e = 0$ , то  $|\vec{p}_1| = E_1 = E/2$ , а  $|\vec{p}_3| = \sqrt{(E/2)^2 - m_\mu^2}$ . Підставивши наведені вирази в (19.9), отримуємо:

$$\frac{d\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left[ 1 + \left( \frac{2m_\mu}{E} \right)^2 + \left[ 1 - \left( \frac{2m_\mu}{E} \right)^2 \right] \cos^2 \theta \right] \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{2m_\mu}{E} \right)^2}, \quad (19.10)$$

де кут  $\theta$  — кут між векторами  $\vec{p}_1$  та  $\vec{p}_3$ .

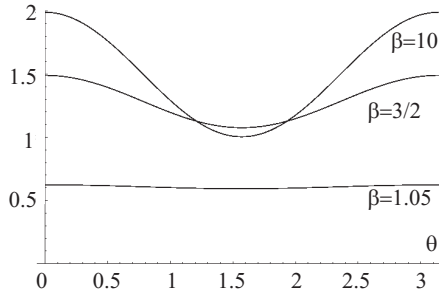
Слід зазначити, що останній множник у (19.10) (модуль імпульсу мюона) автоматично забезпечує ненульовий переріз реакції лише за умови, коли повна енергія електрон-позитронної пари буде більшою за мінімально можливу енергію утвореної мюон-антимюонної пари, тобто, коли  $E > 2m_\mu$ .

Асимптотичні вирази для перерізу реакції легко отримати з (19.10):

$$\frac{d\sigma_{ee^+\rightarrow\mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} (1 + \cos^2 \theta), \quad E \gg 2m_\mu; \quad (19.11)$$

$$\frac{d\sigma_{ee^+\rightarrow\mu\mu^+}}{d\Omega_3} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \left[ 1 + \left( \frac{2m_\mu}{E} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{2m_\mu}{E} \right)^2}, \quad E \rightarrow 2m_\mu. \quad (19.12)$$

Зазначимо також, що залежність перерізу реакції є симетричною щодо заміни  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  (рис. 19.2). Це пояснюється тим, що в системі центра інерції, згідно з діаграми на рис. 19.1б, електрон та позитрон анігілюють у віртуальний фотон з нульовим просторовим імпульсом, який потім "розвалюється" на мюон та антимюон. При цьому ймовірність того, що мюон полетить в одному фіксованому напрямку, а антимюон у протилежному до нього, і навпаки, є однаковою.



**Рис. 19.2.** Кутова частина реакції утворення мюон-антимюонної пари в системі центра інерції для різних енергій частинок. По осі ординат відкладено знезрозмірений переріз  $\frac{d\sigma_{ee^+\rightarrow\mu\mu^+}}{d\Omega_3} \frac{4E^2}{\alpha^2}$ , параметр  $\beta = E/2m_\mu$ .

Як видно з рис. 19.2, найменшою є ймовірність вильоту мюон-антимюонної пари в напрямку, перпендикулярному до лінії руху початкового електрона та позитрона, а найбільшою — у паралельному напрямку. При цьому, чим менша повна енергія системи, тим меншою є кутова залежність перерізу реакції, що явно видно з асимптотичного виразу (19.12).

З отриманого диференційного перерізу реакції (19.10) легко отримати повний переріз, проінтегрувавши за кутовими змінними:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+} = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2} \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^2 \right]. \quad (19.13)$$

Графічно залежність повного перерізу реакції представлена на рис. 19.3. Як ми вже зазначили, переріз є ненульовим лише в області  $E > 2m_\mu$ . При великих значеннях повної енергії системи незрозуміений переріз реакції швидко виходить на постійне значення  $\sigma E^2 = 4\pi\alpha^2/3$  за законом

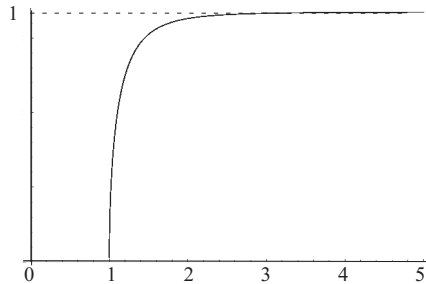
$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2} \left[ 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{2m_\mu}{E}\right)^4 \right], \quad E \gg 2m_\mu. \quad (19.14)$$

Отже, при великих значеннях енергії частинок (електрона та позитрона) переріз реакції утворення мюон-мюонної пари спадає до нуля за законом  $\sigma \sim \alpha^2/E^2$ . Так і має бути із загальних міркувань: множник  $E^{-2}$  має бути з міркувань розмірності, множник  $\alpha^2$  зумовлений розглядом процесу в другому порядку за теорією збурень.

Значення, на яке виходить переріз анігіляції  $ee^+$ -пари в пару  $\mu\mu^+$  в системі центра інерції є універсальним

$$\sigma_{e\mu}^{as} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E^2} \quad (19.15)$$

і зручним для нормування перерізів інших процесів.



**Рис. 19.3.** Повний переріз реакції утворення мюон-антимюонної пари в системі центра інерції. По осі ординат відкладено незрозуміений переріз  $\frac{3E^2}{4\pi\alpha^2} \sigma_{ee^+ \rightarrow \mu\mu^+}$ , по осі абсцис  $E/2m_\mu$ .

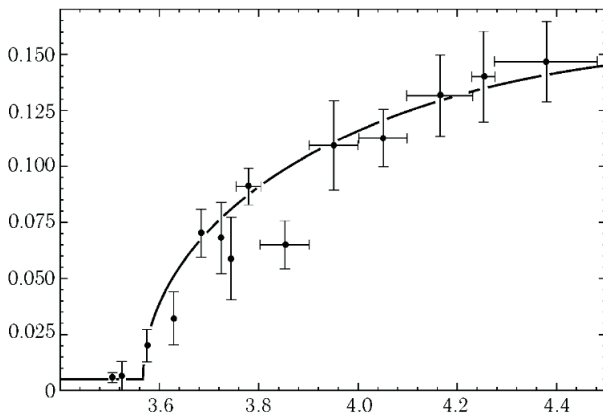
### Утворення пари $\tau\tau^+$

Розгляд утворення пари  $\tau\tau^+$  при електрон-позитронних зіткненнях повністю аналогічний наведеному вище розгляду утворення мюон-антимюонних пар. Необхідні вирази отримуються заміною маси мюона на масу  $\tau$ -лептона.

Оскільки реакції утворення пари частинка-античастинка  $ff^+$  при анігіляції  $ee^+$ -пари можуть проходити лише за умови  $E > 2m_f$ , то їх використовують для визначення мас утворюваних частинок. Наприклад, при дослідженні утворення  $\tau$ -частинок зручно експериментально знаходити безрозмірне відношення:

$$R^\tau = \frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \tau\tau^+}}{\sigma_{e\mu}^{as}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_\tau}{E}\right)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2m_\tau}{E}\right)^2 \right]. \quad (19.16)$$

Корисно навести порівняння отриманого виразу з експериментом (рис. 19.4, W. Vacino, et. al., Phys. Rev. Lett. **41**, 13, 1978). З рис. 19.4 чітко видно границю, коли починається утворення  $\tau\tau^+$ -пари. Можна оцінити масу  $\tau$ -частинки  $m_\tau \simeq 1.8$  ГеВ.



**Рис. 19.4.** По осі ординат відкладено відношення  $R^\tau = \frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \tau\tau^+}}{\sigma_{e\mu}^{as}}$ , по осі абсцис — повну енергію в системі (в ГеВ).

**Утворення кваркових пар  $qq^+$** 

Розглянемо процес утворення кваркових пар  $qq^+$  через віртуальний фотон при  $ee^+$ -анігіляції.

Для цього нам слід, по-перше, врахувати, що електричні заряди  $i$ -го кварка відрізняються від заряду електрона на множник  $Q_i$ . Отже у наведених вище формулах необхідно замінити  $\alpha \rightarrow Q_i^2 \alpha$ .

По-друге, врахувати, що кварки мають три можливих значення кольорових зарядів: синій, червоний та зелений, а антикварки, відповідно: антисиній, античервоний та антизелений. Таким чином при утворенні пари  $qq^+$  її колір відсутній. При  $ee^+$ -анігіляції з однаковою ймовірністю будуть утворюватися кварки всіх кольорів, а отже врахування кольорів приведе до множення перерізу процесу утворення конкретної пари  $qq^+$  на три.

По-третє, після утворення кварків вони почнуть взаємодіяти між собою згідно із законами квантової хромодинаміки і будуть утворювати зв'язані кваркові стани — гадрони (мезони та баріони). Виявляється, що в області енергій, набагато більшій за маси кварків  $qq^+$ , цей процес суттєво не впливає на переріз реакції (перевірка цього факту виходить за межі даного курсу).

Отже, для високоенергетичної області утворення пари  $qq^+$  матимемо:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow q_i q_i^+} = 3Q_i^2 \sigma_{e\mu}^{as}. \quad (19.17)$$

А повний переріз процесів з утворенням всіх можливих гадронів при  $ee^+$ -анігіляції при високих енергіях

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \text{гадрони}} = 3\sigma_{e\mu}^{as} \sum_i Q_i^2. \quad (19.18)$$

Перерахуємо всі шість ароматів кварків у порядку зростання їх маси із зазначенням їх маси (наближено) та заряду:

$u$ -кварк:  $m_u = 3$  МеВ,  $Q_u = 2/3$ ,

$d$ -кварк:  $m_d = 6$  МеВ,  $Q_d = -1/3$ ,

$s$ -кварк:  $m_s = 0.1$  ГеВ,  $Q_s = -1/3$ ,

$c$ -кварк:  $m_c = 1.3$  ГеВ,  $Q_c = 2/3$ ,

$b$ -кварк:  $m_b = 4.3$  ГеВ,  $Q_b = -1/3$ ,

$t$ -кварк:  $m_t = 175$  ГеВ,  $Q_t = 2/3$ .

Експерименти з народження гадронів проводились в широкій області енергій. Оцінимо, який результат ми очікуємо побачити. В об-

ласті істотно більший за  $2 \times 0.1 = 0.2$  ГеВ, але менший від  $2 \times 1.3 = 2.6$  ГеВ, має бути

$$\sigma_1 = 3\sigma_{e\mu}^{as}(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2) = 2\sigma_{e\mu}^{as}. \quad (19.19)$$

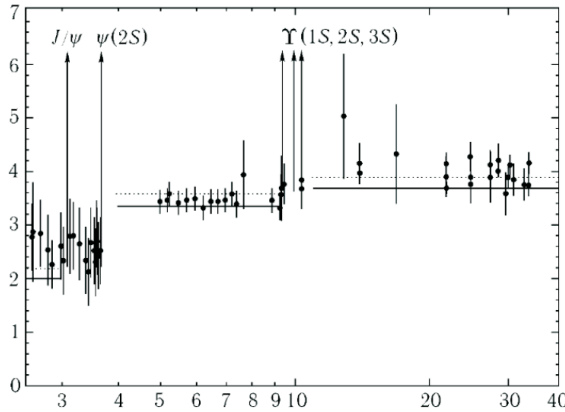
В області істотно більший за 2.6 ГеВ, але менший від  $2 \times 4.3 = 8.6$  ГеВ, має бути

$$\sigma_1 = 3\sigma_{e\mu}^{as}(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2) = 10\sigma_{e\mu}^{as}/3. \quad (19.20)$$

В області істотно більший за 8.6 ГеВ, але менший від  $2 \times 175 = 350$  ГеВ, має бути

$$\sigma_1 = 3\sigma_{e\mu}^{as}(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2 + Q_c^2 + Q_b^2) = 11\sigma_{e\mu}^{as}/3. \quad (19.21)$$

Звіримо наше передбачення з результатами експериментів в області енергій від 1 до 40 ГеВ (рис. 19.5). Суцільною лінією показано результат наших передбачень, пунктирна лінія — результат передбачень з урахуванням впливу квантової хромодинаміки. Точками виділені енергії, при яких народжуються гадрони.



**Рис. 19.5.** По осі ординат відкладено відношення  $R^{hadr} = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Гадрони}}}{\sigma_{e\mu}^{as}}$ , по осі абсцис — повну енергію в системі  $\sqrt{s}$  (в ГеВ). Дані взяті з M.Swartz, Phys. Rev. D53, 5268 (1996).

Як видно, результат експерименту непогано узгоджується з теоретичними передбаченнями. Підтверджується також необхідність враху-



вання кольорового множника три, що підтверджує існування трьох кольорів для кварків.

Цікавими для аналізу є також результати експериментів у більшому діапазоні енергій та з більшою кількістю експериментальних точок, див. рис. 19.6. Корисно порівняти представлені результати з характеристиками частинок, що зазначені на рис. 19.6. Зазначимо, що  $Z$ -бозон має масу  $M = 91.1876$  GeV та ширину розпаду  $\Gamma = 2.4952$  GeV, та наведемо характеристики мезонів згідно з [23]:

$\rho^0$  мезон:  $M = 775.26$  MeV,  $\Gamma = 149.1$  MeV, кварковий склад  $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ ,

$w$  мезон:  $M = 782.65$  MeV,  $\Gamma = 8.49$  MeV, кварковий склад  $\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ ,

$\rho'$  мезон:  $M = 1720$  MeV,  $\Gamma = 250$  MeV, кварковий склад  $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ ,

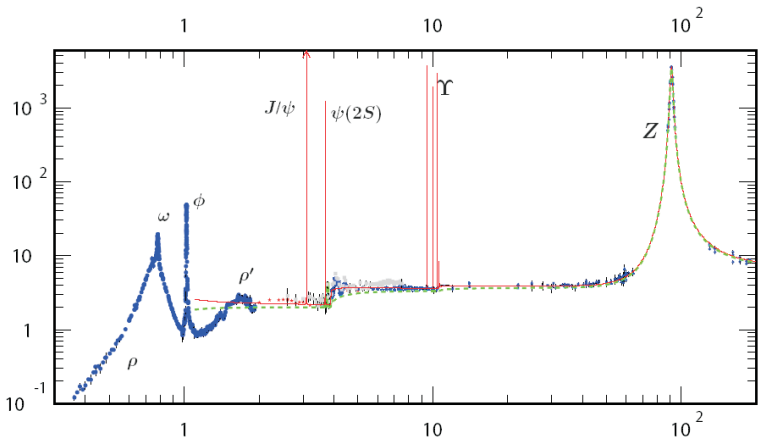
$J/\Psi$  мезон:  $M = 3096.916$  MeV,  $\Gamma = 0.0929$  MeV, кварковий склад  $c\bar{c}$ ,

$\Psi(2S)$  мезон:  $M = 3686.109$  MeV,  $\Gamma = 0.298$  MeV, кварковий склад  $c\bar{c}$ ,

$\Upsilon(1S)$  мезон:  $M = 9460.3$  MeV,  $\Gamma = 0.054$  MeV, кварковий склад  $b\bar{b}$ ,

$\Upsilon(2S)$  мезон:  $M = 10023.26$  MeV,  $\Gamma = 0.032$  MeV, кварковий склад  $b\bar{b}$ ,

$\Upsilon(3S)$  мезон:  $M = 10355.2$  MeV,  $\Gamma = 0.020$  MeV, кварковий склад  $b\bar{b}$ .



**Рис. 19.6.** По осі ординат відкладено відношення  $R^{had} = \frac{\sigma_{ee^+ \rightarrow \text{Гадрони}}}{\sigma_{e\mu^+}^{as}}$ , по осі абсцис — повну енергію в системі  $\sqrt{s}$  (в GeV). Дані взяті з [23] та arXiv:hep-ph/0312114.

**Завдання**

1. Отримати співвідношення (19.10).
2. Отримати співвідношення (19.13) та (19.14).
3. Розглянути зворотний процес, а саме, утворення  $ee^+$ -пари парою  $\mu\mu^+$ . Записати диференційний переріз реакції в системі центру інерції.
4. При теоретичному розрахунку утворення нових частинок через віртуальний фотон внаслідок електрон-фотонної анігіляції потрібно враховувати й можливість утворення нових частинок через віртуальний  $Z$ -бозон. Чому ми бачимо добре узгодження з експериментом (див. рис. 19.4 та рис. 19.5), де внесок від  $Z$ -бозона не враховувався.
5. Поясніть на якісному рівні пік на рис. 19.6, що відповідає народженню  $Z$ -бозона. Якою діаграмою можна описати даний процес? Який вигляд повинен мати переріз відповідної реакції?

## РОЗДІЛ 20

### Розпад $Z$ -бозона

Розглянемо розпад  $Z$ -бозона на всі можливі частинки та знайдемо повну ширину його розпаду в лабораторній системі відліку, де  $Z$ -бозон перебуває в стані спокою.  $\hat{S}$ -матриця цього процесу в першому порядку теорії збурень була розрахована в розд. 11 лише для випадку розпаду бозона на електрон-позитронну пару. Очевидно, що вираз для розпаду на іншу ферміон-антиферміонну пару  $f\bar{f}$  не зміниться. Потрібно лише підставити відповідні значення констант  $g_v^f$  та  $g_a^f$  і врахувати, що за рахунок  $\delta$ -функції, що виражає закон збереження енергії-імпульсу,  $Z$ -бозон може розпастися лише на частинки, чії маси задовольняють умову  $m_f \leq M_Z/2$ .

Враховуючи, що маса  $Z$ -бозона становить близько 91 ГеВ, приходимо до висновку, що він може розпастися на всі ферміони СМ окрім розпаду на пару найважчих кварків  $t\bar{t}$  ( $m_t = 175$  ГеВ). Тобто можливі розпади на всі типи нейтрино  $\nu_e\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$ ; на всі пари заряджених лептонів  $e\bar{e}$ ,  $\mu\bar{\mu}$ ,  $\tau\bar{\tau}$ ; та на п'ять типів кварків  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $c\bar{c}$ ,  $s\bar{s}$ ,  $b\bar{b}$  (насправді розпад  $Z$ -бозона відбувається не на кварки, а на гадрони, однак ми будемо цим нехтувати).

Згідно з означеннями (1.34), (1.40) і виразом для матриці розпаду  $Z$ -бозона в першому порядку теорії збурень (11.33) амплітуда розпаду  $Z$ -бозона має вигляд

$$M_{fi} = -B \bar{v}_f \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_{-f} \epsilon_\mu^{\lambda 1}(\vec{k}), \quad (20.1)$$

де  $k$  — початковий 4-імпульс  $Z$ -бозону,  $\lambda$  — його поляризація.

Для знаходження  $|M_{fi}|^2$  використаємо (14.3), (14.4):

$$|M_{fi}|^2 = B^2 \bar{v}_f \gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_{-f} \bar{v}_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) v_f \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \epsilon_\nu^{*\lambda}(\vec{k}). \quad (20.2)$$

Вважаючи комбінацію матриць  $\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5)$  як нову матрицю  $A^\mu$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{v}_{f,\alpha} A_{\alpha\beta}^\mu v_{-f,\beta} \bar{v}_{-f,\gamma} A_{\gamma\delta}^\nu v_{f,\delta} &= A_{\alpha\beta}^\mu v_{-f,\beta} \bar{v}_{-f,\gamma} A_{\gamma\delta}^\nu v_{f,\delta} \bar{v}_{f,\alpha} = /(\text{4.9})/ = \\ &= /u_{i,\alpha} \bar{u}_{i,\beta} = (\rho_i)_{\alpha\beta} / = \text{Tr}[A^\mu \rho_{-f} A^\nu \rho_f] = \\ &= \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \rho_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \rho_f]. \quad (20.3) \end{aligned}$$

Нехай нас буде цікавити ширина розпаду  $Z$ -бозона як неполяризованої частинки на частинки в будь-якому стані поляризації. Провівши усереднення за поляризацією  $Z$ -бозона (Д4.1.17) та підсумувавши за поляризаціями кінцевих частинок (16.13), отримаємо

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}|^2 &\rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\mu_f, \mu_{-f}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{3} |M_{fi}|^2 = \\
 &= -B^2 \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \bar{\rho}_{-f} \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) \bar{\rho}_f] \frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right) = \\
 &= /\bar{\rho}_{qf} = q(m_f + q \not{p}_f) / = \\
 &= \frac{B^2}{3} \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f - \not{q}_f) \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f + \not{p}_f)] \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \right), \tag{20.4}
 \end{aligned}$$

де 4-імпульс ферміона  $f$  ми позначили літерою  $p$ , а антиферміона —  $q$ . Ми опускаємо нижній індекс  $f$  поблизу імпульсу  $f$ -го ферміона для спрощення записів, однак, маємо його на увазі.

Знайдемо значення виразу під знаком згортки

$$C^{\mu\nu} = \text{Tr}[\gamma^\mu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f - \not{q}) \gamma^\nu (g_v^f - g_a^f \gamma^5) (m_f + \not{p})]. \tag{20.5}$$

Перемноживши доданки під знаком згортки та відкинувши ті, значення згортки від яких дорівнюють нулю (див. розд. 14), отримаємо

$$\begin{aligned}
 C^{\mu\nu} &= \text{Tr} [m_f^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) \gamma^\mu \gamma^\nu - q_\alpha p_\beta ((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2) \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta - \\
 &\quad - 2q_\alpha p_\beta g_v^f g_a^f \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] = \\
 &= 4 [m_f^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) g^{\mu\nu} - ((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2) (q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p q + p^\mu q^\nu) + \\
 &\quad + i 2q_\alpha p_\beta g_v^f g_a^f \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}]. \tag{20.6}
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 C^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= 4[4m_f^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) + 2pq((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)], \tag{20.7} \\
 C^{\mu\nu} k_\mu k_\nu &= 4[m_f^2 k^2 ((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) - [2(pk)(qk) - k^2(pq)]((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)],
 \end{aligned}$$

де ми врахували, що згортка з останнім доданком у (20.6) дорівнює нулю.

Справді, згортка антисиметричного тензора з метричним тензором дорівнює нулю  $\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}g_{\mu\nu} = 0$ , оскільки метричний тензор має ненульові лише діагональні елементи, а елементи антисиметричного тензора, в якому хоча б два індекси є однаковими, дорівнюють нулю. Згортка з компонентами 4-імпульсу  $Z$ -бозона дорівнює нулю з таких міркувань:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} + k_\mu k_\nu \epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} (k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} - k_\mu k_\nu \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}) = 0, \end{aligned} \quad (20.8)$$

де ми спочатку розбили вираз на два доданки і перепозначили в другому доданку німі змінні підсумовування  $\mu \leftrightarrow \nu$ , а потім переставили місцями в другому доданку індекси  $\mu, \nu$ , використавши властивості антисиметричного тензора.

Згортки в (20.7) можна записати через маси частинок. Із закону збереження енергії-імпульсу маємо  $k = p + q$ . Підвівши обидві частини до квадрата та врахувавши, що квадрати 4-імпульсів реальних частинок відповідають квадратам їх мас отримаємо  $pq = M_Z^2/2 - m_f^2$ . Аналогічно, з рівностей  $k - p = q$  та  $k - q = p$  отримаємо  $pk = qk = M_Z^2/2$ :

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu} g_{\mu\nu} &= 4[4m_f^2((g_v^f)^2 - (g_a^f)^2) + (M_Z^2 - 2m_f^2)((g_v^f)^2 + (g_a^f)^2)], \quad (20.9) \\ C^{\mu\nu} k_\mu k_\nu &= -8m_f^2 M_Z^2 (g_a^f)^2. \end{aligned}$$

Остаточню вираз для амплітуди розсіяння (20.4) набуває вигляду

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{4B^2 M_Z^2}{3} \left[ (g_v^f)^2 \left( 1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left( 1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right], \quad (20.10)$$

а ймовірність розпаду (12.10)  $Z$ -бозона на дві частинки, одна з яких має імпульс  $\vec{p}_f$  та поширюється в напрямку, що знаходиться у межах тілесного кута  $d\Omega_f$ :

$$\begin{aligned} d\Gamma_{f\bar{f}} &= \frac{1}{2^5 \pi^2} \cdot \frac{\overline{|M_{fi}|^2} |\vec{p}_f| d\Omega_f}{M_Z^2} = \\ &= \frac{B^2}{24\pi^2} \left[ (g_v^f)^2 \left( 1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left( 1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right] |\vec{p}_f| d\Omega_f, \end{aligned} \quad (20.11)$$

де  $|\vec{p}_f| = \frac{M_Z}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2}} \theta(M_Z - 2m_f)$ , згідно з (12.12).

Повна ширина розпаду  $Z$ -бозона на пару  $f\bar{f}$ , за умови  $M_Z \geq 2m_f$ , отримується після інтегрування за тілесним кутом і дорівнює:

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \frac{\alpha M_Z}{3 \sin^2 2\theta_w} \left[ (g_v^f)^2 \left( 1 + \frac{2m_f^2}{M_Z^2} \right) + (g_a^f)^2 \left( 1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2} \right) \right] \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_Z^2}}, \quad (20.12)$$

де ми використали, що  $B = e/\sin 2\theta_w$  та  $\alpha = e^2/4\pi$ .

Повна ширина розпаду  $Z$ -бозону на всі можливі ферміонні пари, що задовольняють умові  $M_Z \geq 2m_f$ , є

$$\Gamma = \sum \Gamma_{f\bar{f}} = [\Gamma_{\nu_e \bar{\nu}_e} + \Gamma_{\nu_\mu \bar{\nu}_\mu} + \Gamma_{\nu_\tau \bar{\nu}_\tau}] + [\Gamma_{e\bar{e}} + \Gamma_{\mu\bar{\mu}} + \Gamma_{\tau\bar{\tau}}] + 3[\Gamma_{\nu_u \bar{\nu}_u} + \Gamma_{\nu_d \bar{\nu}_d} + \Gamma_{c\bar{c}} + \Gamma_{s\bar{s}} + \Gamma_{b\bar{b}}], \quad (20.13)$$

де коефіцієнт 3 перед внеском від розпаду на кварк-антикваркові пари пов'язаний з урахуванням кольорових індексів (можуть утворитися три пари з кольорами: червоний-античервоний, синій-антисиній, зелений-антизелений).

Коефіцієнти  $g_v^f$  та  $g_a^f$  визначаються в СМ [5]:

$$g_v^f = t_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_w, \quad g_a^f = -t_3^f, \quad (20.14)$$

де  $\sin^2 \theta_w = 0.231$ ;  $t_3^f$  — слабкий ізоспін, що дорівнює  $+1/2$  для кварків ( $u, c, t$ ) та нейтрино;  $-1/2$  для кварків ( $d, s, b$ ) і заряджених лептонів;  $q_f$  — електричний заряд частинки в одиницях заряду протона ( $q_e = -1$ ,  $q_{u_n} = +2/3$ ,  $q_{d_n} = -1/3$ ).

Відповідно,

$$\begin{aligned} g_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}^{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} &= 1/2; & g_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}^{e, \mu, \tau} &= -1/2 - 2(-1)0.231 = -0.038; \\ g_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}^{d, s, b} &= -1/2 - 2(-1/3)0.231 = -0.346; \\ g_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}^{u, c, t} &= 1/2 - 2(2/3)0.231 = 0.192; \\ g_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau}^{e, \mu, \tau} &= -1/2; & g_a^{e, \mu, \tau} &= 1/2; & g_a^{d, s, b} &= 1/2; & g_a^{u, c, t} &= -1/2. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Зазначені частинки мають маси:

$$\begin{aligned} m_\nu &= 0; & m_e &= 5.11 \cdot 10^{-4} \text{ ГеВ}; & m_\mu &= 0.106 \text{ ГеВ}; & m_\tau &= 1.78 \text{ ГеВ}; \\ m_u &= 0.003 \text{ ГеВ}; & m_d &= 0.006 \text{ ГеВ}; & m_c &= 1.3 \text{ ГеВ}; \\ m_s &= 0.1 \text{ ГеВ}; & m_b &= 4.3 \text{ ГеВ}; & M_Z &= 91.2 \text{ ГеВ}. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Підставляючи (20.15), (20.16) у (20.13), отримаємо  $\Gamma = 2.276$  ГеВ. Зазначимо, що підставивши в (20.13) нульові маси всіх частинок результат для повної ширини розпаду майже не зміниться. Експериментальне значення ширини розпаду [23]  $\Gamma_{exp} = 2.4952 \pm 0.0023$  ГеВ, тобто час життя  $Z$ -бозона  $\tau = 1/\Gamma_{exp} \simeq 0.4$  ГеВ $^{-1} \simeq /((0.13)/\simeq 2.63 \cdot 10^{-25}$  с.

Відмінність між отриманим нами результатом і даними експерименту пояснюється необхідністю врахування поправок від вищих порядків теорії збурень та врахуванням поправок квантової хромодинаміки (КХД), що враховують утворення гадронів з кварків. У цьому сенсі цікаво експериментальне значення ширини розпаду  $Z$ -бозона на пару заряджених лептонів (оскільки їх можна вважати безмасовими, то не має значення, на які саме лептони відбувається розпад)  $\Gamma_{ll,exp} = 83.984 \pm 0.086$  МеВ, а згідно з (20.12)  $\Gamma_{ll} = 78.492$  МеВ. Тобто навіть без урахування поправок КХД відмінність теоретичних та експериментальних значень становить близько 7%.

Зауважимо, що головний внесок у точність проведених розрахунків дає врахування зміни константи тонкої структури внаслідок поправок вищих порядків теорії збурень, а саме [23]:  $\alpha^{-1} \rightarrow \alpha^{-1}(M_Z) = 127.922$ . Використавши це значення, отримаємо згідно з (20.12), (20.13):  $\Gamma = 2.438$  ГеВ,  $\Gamma_{ll} = 84.085$  ГеВ. Як бачимо, у цьому випадку ми отримали майже ідеальний збіг теоретичних розрахунків з експериментальним значенням для ширини розпаду  $Z$ -бозону на пару заряджених лептонів, однак збіг для повної ширини розпаду не є гарним, що зумовлено, зокрема, необхідністю врахування поправок КХД для врахування утворення гадронів.

На завершення зазначимо, що в даному розділі розрахунки були проведені в лабораторній системі відліку. Перехід до системи відліку, в якій  $Z$ -бозон рухається зі швидкістю  $v$  призведе, згідно з теорією відносності, до збільшення часу життя бозона

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (20.17)$$

де  $c$  – швидкість світла.

## Завдання

1. Отримати вираз (20.6).
2. Розпад нерухомого  $Z$ -бозона на пару кварк-антикварк  $t\bar{t}$  заборонений з енергетичних міркувань. Чи зміниться ситуація, якщо  $Z$ -бозон буде рухатися? Відповідь обґрунтуйте.
3. Знайдіть час життя неполяризованого  $W^\pm$ -бозона в аналітичному вигляді та наведіть його числове значення.
4. Припустимо, що існує нова нейтральна скалярна частинка  $S$  масою  $M_S$ , чия взаємодія з електромагнітним полем задається  $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_\gamma}{M_S} S F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ . Знайдіть ширину розпаду  $\Gamma_{S \rightarrow \gamma\gamma}$ . Чому  $S$ -частинка в запропонованій моделі повинна бути нейтральною?
5. Знайдіть ширину розпаду  $S$ -частинки на два глюони  $\Gamma_{S \rightarrow gg}$ , якщо взаємодія з глюонами буде задана за допомогою лагранжіану  $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda_s}{M_S} S G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ ? Тензор  $G_{\mu\nu}^a$  визначається як  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ , де  $f^{abc}$  – структурні константи групи  $SU(3)$ . Порівняйте з результатом попередньої задачі.

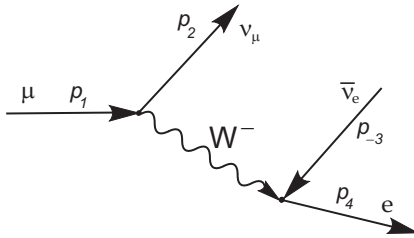


## РОЗДІЛ 21

### Розпад мюона

На відміну від електрона, мюон є нестабільною частинкою. У цьому розділі ми знайдемо час його життя у вільному стані в першому незникаючому наближенні.

Із закону збереження лептонного числа та електричного заряду випливає, що розпад мюона має відбуватися за схемою  $\mu \rightarrow X + \nu_\mu$ , де  $X$  — будь-яка одна частинка з нульовим лептонним числом (наприклад, гадрон) та електричним зарядом  $e$ , або декілька частинок (наприклад, лептон та відповідне лептонне антинейтрино) з сумарним нульовим лептонним числом та електричним зарядом  $e$ . Оскільки маса мюона становить лише  $m_\mu = 106$  MeV, то розпади на гадрони слід відкинути (найлегший гадрон,  $\pi^-$ -мезон, має масу  $m_\pi = 140$  MeV). Також слід відкинути розпад мюона на  $\tau$ -лептон та нейтрино ( $m_\tau = 1.78$  GeV). Отже, залишається лише варіант розпаду мюона на найлегший лептон — електрон ( $m_e = 0.511$  MeV) та електронне антинейтрино:  $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ . Згідно з лагранжіаном СМ даний процес описується доданками (11.15) або діаграмою Фейнмана з рис. 21.1.



**Рис. 21.1.** Розпад мюона на електрон, електронне антинейтрино та мюонне нейтрино.

Наведеній на рис. 21.1 діаграмі відповідає такий вираз для  $\hat{S}$ -матриці в другому порядку теорії збурень (див. розд. 11):

$$S_{fi}^{(2)} = -iA^2 \frac{(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)}{\sqrt{2V\varepsilon_1 2V\varepsilon_2 2V\varepsilon_3 2V\varepsilon_4}} D_{\xi\chi}(p_1 - p_2) \times \\ \times \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}, \quad (21.1)$$

де  $D_{\xi\chi}(k)$  відповідає пропагатору  $W$ -бозона (0.31), (Д4.1.16),  $A = e/(2\sqrt{2} \sin \theta_w)$  та ми використали очевидні позначення для функцій частинок. 4-імпульси мюона, мюонного нейтрино, електронного анти-нейтрино та електрона були позначені як  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , відповідно.

Амплітуда процесу розпаду мюона згідно з означеннями (1.34), (1.40):

$$M_{fi} = -A^2 D_{\xi\chi}(p_1 - p_2) \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}. \quad (21.2)$$

Розглянемо розпад мюона в лабораторній системі відліку, тобто в системі, де він перебуває в стані спокою. Оскільки маса мюона набагато менша від маси  $W$ -бозона, то квадрат переданого імпульсу в пропагаторі  $W$ -бозона набагато менший за квадрат маси  $W$ -бозона:  $(p_1 - p_2)^2 \ll M_W^2$ . У цьому випадку вираз для бозонного пропагатора спрощується до

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{M_W^2 - k^2 - i\epsilon} = /k^2 \ll M_W^2 / = \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}. \quad (21.3)$$

Тоді

$$M_{fi} = \frac{-e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_w} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}, \quad (21.4)$$

або, згадавши визначення сталої Фермі

$$G_F = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W}, \quad (21.5)$$

отримаємо вираз для амплітуди розпаду мюона у вигляді<sup>1</sup>:

$$M_{fi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \cdot \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3}. \quad (21.6)$$

---

<sup>1</sup>Ми, фактично, зробили перехід до низькоенергетичної теорії слабких взаємодій – теорії Фермі (див. наприклад, [5]).

Для знаходження  $|M_{fi}|^2$  використаємо (14.3), (14.4):

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \bar{\nu}_{\mu,2} \gamma^\xi (1 - \gamma^5) \mu_1 \bar{e}_4 \gamma_\xi (1 - \gamma^5) \nu_{e,-3} \times \\ \times \bar{\mu}_1 \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \nu_{\mu,2} \bar{\nu}_{e,-3} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) e_4. \quad (21.7)$$

Вважаючи комбінацію матриць  $\gamma^\tau (1 - \gamma^5)$  як нову матрицю  $B^\tau$ , легко побачити, що праву частину останнього виразу можна записати через добуток згорток:

$$(\bar{\nu}_{\mu,2})_\alpha (B^\xi)_{\alpha\beta} (\mu_1)_\beta (\bar{e}_4)_\delta (B_\xi)_{\delta\epsilon} (\nu_{e,-3})_\epsilon (\bar{\mu}_1)_\zeta (B^\chi)_{\zeta\eta} (\nu_{\mu,2})_\eta (\bar{\nu}_{e,-3})_\kappa (B_\chi)_{\kappa\lambda} (e_4)_\lambda = \\ = [(B^\xi)_{\alpha\beta} (\mu_1)_\beta (\bar{\mu}_1)_\zeta (B^\chi)_{\zeta\eta} (\nu_{\mu,2})_\eta (\bar{\nu}_{\mu,2})_\alpha] [(B_\xi)_{\delta\epsilon} (\nu_{e,-3})_\epsilon (\bar{\nu}_{e,-3})_\kappa (B_\chi)_{\kappa\lambda} (e_4)_\lambda (\bar{e}_4)_\delta] \\ = \text{Tr}[B^\xi \mu_1 \bar{\mu}_1 B^\chi \nu_{\mu,2} \bar{\nu}_{\mu,2}] \cdot \text{Tr}[B_\xi \nu_{e,-3} \bar{\nu}_{e,-3} B_\chi e_4 \bar{e}_4]. \quad (21.8)$$

Тоді, використавши (4.9), вираз (21.7) можна представити як:

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2}{2} \text{Tr}[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) \rho_\mu \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \rho_\nu] \times \\ \times \text{Tr}[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \rho_{-\nu_e} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) \rho_e]. \quad (21.9)$$

Надалі ми будемо розглядати розпад неполяризованого мюона на частинки з усіма можливими поляризаційними станами. Тобто нам потрібно усереднити за поляризаційними станами мюона та підсумувати за поляризаційними станами інших частинок<sup>1</sup>:

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_\mu=1}^2 \sum_{\lambda_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu=1}^2 |M_{fi}|^2 = /(\text{16.13})/ = \\ = \frac{G_F^2}{4} \text{Tr}[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_\mu \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_{\nu_\mu}] \text{Tr}[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_{-\nu_e} \gamma_\chi (1 - \gamma^5) \bar{\rho}_e] = \\ = \frac{G_F^2}{4} \text{Tr}[\gamma^\xi (1 - \gamma^5) (m_\mu + \not{p}_1) \gamma^\chi (1 - \gamma^5) \not{p}_2] \times \\ \times \text{Tr}[\gamma_\xi (1 - \gamma^5) \not{p}_3 \gamma_\chi (1 - \gamma^5) (m_e + \not{p}_4)]. \quad (21.10)$$

<sup>1</sup> Ми проводимо підсумовування за двома спіральними станами нейтрино, незважаючи на те, що в СМ нейтрино мають лише лівий спіральний стан. Правий спіральний стан не дасть внеску в амплітуду реакції за рахунок множника  $(1 - \gamma^5)$ .

Аналогічно до (20.5) отримуємо:

$$\begin{aligned} Tr[\gamma^\xi(1-\gamma^5)(m_\mu + \gamma^\alpha p_{1,\alpha})\gamma^\chi(1-\gamma^5)\gamma^\beta p_{2,\beta}] &= \\ &= 2p_{1,\alpha}p_{2,\beta}(Tr[\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\chi\gamma^\beta] + Tr[\gamma^5\gamma^\xi\gamma^\alpha\gamma^\chi\gamma^\beta]) = \\ &= 8[p_1^\xi p_2^\chi - g^{\xi\chi}(p_1 p_2) + p_1^\chi p_2^\xi - i\epsilon^{\xi\alpha\chi\beta} p_{1,\alpha} p_{2,\beta}], \end{aligned} \quad (21.11)$$

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_\xi(1-\gamma^5)\not{p}_3\gamma_\chi(1-\gamma^5)(m_e + \not{p}_4)] &= \\ &= 8[p_{3,\xi}p_{4,\chi} - g_{\xi\chi}(p_3 p_4) + p_{3,\chi}p_{4,\xi} - i\epsilon_{\xi\alpha\chi\beta} p_3^\alpha p_4^\beta]. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Зазначимо, що ці вирази були розраховані точно і в них не ввійшли масові доданки.

Підставивши (21.11), (21.12) у вираз для амплітуди реакції (21.10), отримаємо:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = 64G_F^2(p_1 p_3)(p_2 p_4), \quad (21.13)$$

де ми використали співвідношення  $\epsilon^{\xi\chi\alpha\beta}\epsilon_{\xi\chi\kappa\lambda} = -2(\delta_\kappa^\alpha\delta_\lambda^\beta - \delta_\lambda^\alpha\delta_\kappa^\beta)$  [10] та врахували, що

$$\epsilon_{\xi\alpha\chi\beta}(p^{1,\xi}p^{2,\chi} + p^{1,\chi}p^{2,\xi})p^{3,\alpha}p^{4,\beta} = 0$$

за рахунок антисиметричності тензора

Вираз для ширини розпаду мюона отримаємо за допомогою (1.43). У нашому випадку  $N_i = 1$ ,  $N_f = 3$ , тоді ймовірність переходу системи з початкового стану  $i$  в кінцевий стан  $f$  за одиницю часу дорівнюватиме:

$$\frac{dW_{i \rightarrow f}}{T} = G_F^2 \frac{\delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4)}{2^3 \pi^5} \frac{(p_1 p_3)(p_2 p_4)}{E_1 E_2 E_3 E_4} d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4. \quad (21.14)$$

Для отримання ширини розпаду необхідно виконати інтегрування. Оскільки маса мюона набагато більша за масу електрона, то, для спрощення розрахунків у подальшому будемо вважати  $m_e = 0$ .

Для початку виконаємо інтегрування за імпульсами нейтрино, вважаючи імпульс електрона сталим, а саме, необхідно взяти такий інтеграл:

$$\int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{p_{2,\alpha} p_{3,\beta}}{E_2 E_3} \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = I_{\alpha\beta}. \quad (21.15)$$

Очевидно, що тензор  $I_{\alpha\beta}$  повинен мати розмірність квадрата енергії і його можна виразити лише через два 4-імпульси, що залишаються після інтегрування за  $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ , тобто через  $p_1$  та  $p_4$ . Зокрема, тензор  $I_{\alpha\beta}$  можна представити у вигляді суми двох ортогональних доданків:

$$I_{\alpha\beta} = A[q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta] + B[q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta], \quad (21.16)$$

де  $q = p_1 - p_4$ , а величини  $A$  та  $B$  є безрозмірними. Переконаємось, що:

$$\begin{aligned} [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] &= 0; \\ [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta] &= 12q^4; \\ [q^2 g_{\alpha\beta} - 2q_\alpha q_\beta][q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] &= 4q^4. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Тоді

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta] = 12q^4 A, \quad I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = 4q^4 B. \quad (21.18)$$

Для знаходження коефіцієнтів розкладу  $A, B$  домножимо (21.15) на ортогональні доданки:

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{q^2(p_2 p_3) - 2(p_2 q)(p_3 q)}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3); \quad (21.19)$$

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta] = \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{q^2(p_2 p_3) + 2(p_2 q)(p_3 q)}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3).$$

Із закону збереження енергії імпульсу маємо  $q = p_1 - p_4 = p_2 + p_3$ , відповідно,  $q^2 = 2(p_2 p_3)$  та  $(p_2 q) = (p_3 q) = (p_2 p_3)$ , де ми врахували безмасовість нейтрино ( $p_2^2 = p_3^2 = 0$ ). Отже,

$$I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} - 2q^\alpha q^\beta] = 4q^4 B = 0, \quad \text{відповідно} \quad B = 0, \quad (21.20)$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}[q^2 g^{\alpha\beta} + 2q^\alpha q^\beta] &= 12q^4 A = \\ &= q^4 \int d^3 \vec{p}_2 \int d^3 \vec{p}_3 \frac{1}{E_2 E_3} \delta^4(q - p_2 - p_3), \end{aligned} \quad (21.21)$$

де ми винесли  $q^4$  з під знака інтегрування, оскільки зафіксували його значення.

Для знаходження останнього інтеграла (позначимо його  $I$ ) виконаємо спочатку інтегрування за  $d^3\vec{p}_3$ , що зафіксує закон збереження імпульсу  $\vec{q} = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ . У результаті отримаємо

$$I = \int d^3\vec{p}_2 \frac{1}{E_2 E_3} \delta(q_0 - E_2 - E_3). \quad (21.22)$$

Врахуємо, що для нейтрино  $\vec{p}_2^2 = E_2^2$ , тобто  $d\vec{p}_2 = E_2^2 dE_2 \sin\theta d\theta d\varphi$ , та

$$E_3 = \sqrt{(\vec{q} - \vec{p}_2)^2} = \sqrt{\vec{q}^2 + E_2^2 - 2E_2|\vec{q}|\cos\theta},$$

де  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{q}$  та  $\vec{p}_2$ . Отримаємо

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int E_2^2 dE_2 \frac{\delta(q_0 - E_2 - \sqrt{\vec{q}^2 + E_2^2 - 2E_2|\vec{q}|\cos\theta})}{E_2 \sqrt{\vec{q}^2 + E_2^2 - 2E_2|\vec{q}|\cos\theta}}. \quad (21.23)$$

Використавши  $\delta(f(x)) = \sum_i \delta(x - x_i)/|f'(x_i)|$ , де  $x_i$  – корені функції  $f(x)$ , отримаємо

$$\delta(q_0 - E_2 - \sqrt{\vec{q}^2 + E_2^2 - 2E_2|\vec{q}|\cos\theta}) = \frac{\delta\left(E_2 - \frac{q_0^2 - \vec{q}^2}{2(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)}\right)}{1 + \frac{E_2 - |\vec{q}|\cos\theta}{\sqrt{\vec{q}^2 + E_2^2 - 2E_2|\vec{q}|\cos\theta}}} \quad (21.24)$$

та, остаточно,

$$I = 2\pi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{q_0^2 - \vec{q}^2}{2(q_0 - |\vec{q}|\cos\theta)^2} = 2\pi, \quad (21.25)$$

відповідно, з (21.21) отримуємо  $A = \pi/6$  та з (21.17)

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{6} [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta]. \quad (21.26)$$

Підставивши цей результат у (21.14), отримаємо диференційну ширину розпаду неполяризованого мюона:

$$\begin{aligned} d\Gamma_\mu &= G_F^2 \frac{1}{2^3 6\pi^4} \frac{p_1^\beta p_4^\alpha [q^2 g_{\alpha\beta} + 2q_\alpha q_\beta]}{E_1 E_4} d^3\vec{p}_4 = \\ &= G_F^2 \frac{1}{2^3 6\pi^4} \frac{q^2 (p_1 p_4) + 2(p_1 q)(p_4 q)}{E_1 E_4} d^3\vec{p}_4. \end{aligned} \quad (21.27)$$

Скалярні добутки в останньому виразі легко отримуються, якщо згадати, що  $q = p_1 - p_4$ :  $q^2 = m_\mu^2 - 2(p_1 p_4)$ ;  $(p_1 q) = m_\mu^2 - (p_1 p_4)$ ;  $(p_4 q) = (p_1 p_4)$ . У системі відліку, де мюон покоїться  $p_1 = (m_\mu, \vec{0})$ , відповідно  $q^2 = m_\mu^2 - 2m_\mu E_4$ ;  $(p_1 q) = m_\mu^2 - m_\mu E_4$ ;  $(p_4 q) = m_\mu E_4$ . Отже, вираз у чисельнику (21.31):

$$q^2(p_1 p_4) + 2(p_1 q)(p_4 q) = 3m_\mu^3 E_4 - 4m_\mu^2 E_4^2. \quad (21.28)$$

Оскільки  $E_4 = |\vec{p}_4|$ , то  $d^3 \vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4| d\Omega = E_4^2 dE_4 d\Omega$ . Згадаємо тепер, що  $E_4$  це енергія електрона  $E_e$ . У результаті вираз для диференційної ширини розпаду неполяризованого мюона проінтегрований за тілесним кутом, дорівнює

$$d\Gamma_\mu = G_F^2 \frac{4\pi}{2^3 6\pi^4} [3m_\mu^2 E_e^2 - 4m_\mu E_e^3] dE_e. \quad (21.29)$$

Знайдемо діапазон, в якому може знаходитись енергія електрона. Нижня границя енергії відповідатиме випадку, коли сумарний імпульс двох нейтрино  $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ , тоді з закону збереження імпульсу  $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0$  матимемо  $\vec{p}_4 = 0$  та  $E_{e,min} = 0$ . Верхня границя енергії електрона відповідатиме випадку, коли імпульси двох нейтрино будуть паралельні один до одного та протилежні імпульсу електрона. У цьому випадку сукупна енергія двох нейтрино дорівнюватиме енергії електрона та, з закону збереження енергії,  $m_\mu = E_e + 2E_\nu = 2E_e$  впливатиме  $E_{e,max} = m_\mu/2$ .

В якості безрозмірного параметра введемо відношення енергії електрона до її максимально можливого значення  $\varepsilon = 2E_e/m_\mu$ :

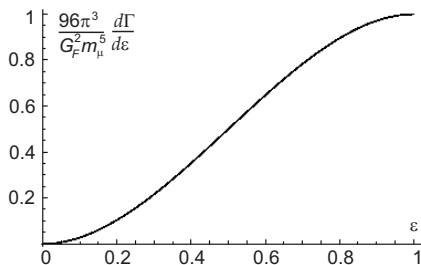
$$\frac{d\Gamma_\mu}{d\varepsilon} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} [3 - 2\varepsilon] \varepsilon^2. \quad (21.30)$$

Як видно з рис. 21.2, при розпаді неполяризованого мюона може вилетіти електрон з довільною енергією в діапазоні  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Максимум розподілу припадає на електрони з максимально можливою енергією  $\varepsilon = 1$ .

Повна ширина розпаду неполяризованого мюона дорівнює

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} \int_0^1 d\varepsilon \varepsilon^2 [3 - 2\varepsilon] = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \quad (21.31)$$

Підставивши значення сталої Фермі  $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$  [23] і маси мюона  $m_\mu = 0.106 \text{ GeV}$ , отримуємо значення ширини розпаду  $\Gamma_\mu = 3.056 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}$  та, відповідно, час життя неполяризованого мюона (0.13)  $\tau_\mu = 1/\Gamma_\mu = (0.13) = 2.154 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ . Виміряне з експериментів значення часу життя неполяризованого мюона становить  $\tau_\mu = 2.197 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ . Розбіжність розрахованого часу життя з експериментальними даними пояснюється необхідністю врахування радіаційних поправок.



**Рис. 21.2.** Диференційна ширина розпаду неполяризованого мюона як функція параметра  $\varepsilon = 2E_e/m_\mu$  (знерозміреної енергії утвореного електрона).

На завершення, підкреслимо важливість проведених нами розрахунків, відзначивши, що експериментальне значення константи Фермі визначається саме з часу життя мюона.

### Завдання

1. Отримати вирази (21.11) – (21.13).
2. Перевірити розмірність ширини розпаду в (21.31).
3. Знайти час життя для мюона з лівою, правою спіральністю.
4. Використовуючи (11.15), (11.29), довести, що процеси нейтринного розсіяння при невисоких енергіях ( $p^2 \ll M_{Z,W}^2$ , де  $p$  – переданий імпульс) описуються точковими чотириферміонними діаграмами і такими ефективними лагранжіанами:



$$\mathcal{L}^W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n \cdot \bar{e}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n, \quad (21.32)$$

$$\mathcal{L}^Z = -\sqrt{2} G_F \sum_f \bar{f} \gamma^\mu A f \cdot \sum_{n=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_n \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_n. \quad (21.33)$$

Врахувати, що  $M_W = M_Z \cos \theta_w$ .

5. Використовуючи результат попередньої задачі, знайти відношення перерізів розсіяння різних типів нейтрино на електроні  $\sigma_{e\nu_e \rightarrow e\nu_e} / \sigma_{e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu}$ ,  $\sigma_{e\nu_e \rightarrow e\nu_e} / \sigma_{e\nu_\tau \rightarrow e\nu_\tau}$  та  $\sigma_{e\nu_\mu \rightarrow e\nu_\mu} / \sigma_{e\nu_\tau \rightarrow e\nu_\tau}$  при низьких енергіях частинок.

## ЧАСТИНА ІІІ

### РАДІАЦІЙНІ ПОПРАВКИ. КВАНТОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА У ВИЩИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

## РОЗДІЛ 22

### Техніка розрахунку інтегралів у вищих порядках теорії збурень

В загальному випадку при обчисленні певної діаграми Фейнмана після інтегрування за дельта-функціями виникне потреба інтегрування за 4-імпульсом виразів типу<sup>1</sup>:

$$I(\{p_l\}, L) = \frac{i}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k P(k, \{p_l\}) \prod_{l=1}^L \frac{1}{m_l^2 - (k + p_l)^2 - i\varepsilon}, \quad (22.1)$$

де  $p_l$  – фіксовані 4-імпульси зовнішніх ліній діаграми,  $P(k, \{p_l\})$  – поліном певного ступеню від сукупності імпульсів  $p_l$ ,  $L$  – кількість внутрішніх ліній у петлі, що розглядається (див., напр., (9.3), де  $L = 4$ ), множник  $i/\pi^2$  введено для зручності шляхом перевизначення коефіцієнтів поліному  $P$ .

Наведемо два найбільш поширених метода обчислення інтегралів виду (22.1), а саме: метод параметризації за допомогою  $\alpha$ -представлення (альфа-представлення) та метод параметризації Фейнмана [4].

#### $\alpha$ -представлення

Метод метод параметризації за допомогою  $\alpha$ -представлення полягає у використанні очевидного співвідношення

$$\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (22.2)$$

де  $\varepsilon$ , яке прямує до нуля, в показнику експоненти забезпечує збіжність даного інтеграла при великих значеннях  $\alpha$ .

За допомогою  $\alpha$ -представлення вираз (22.1) можна записати у вигляді

$$I(\{p_l\}, L) = \frac{i^{L+1}}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\alpha_1 \int_0^{\infty} d\alpha_2 \dots \int_0^{\infty} d\alpha_L \int_{-\infty}^{\infty} P(k, \{p_l\}) e^{i(Ak^2 + 2Bk - M^2 + iA\varepsilon)}, \quad (22.3)$$

---

<sup>1</sup>Як і раніше, якщо не буде потреби, ми не будемо писати добавку  $i\varepsilon$  у знаменниках виразів для пропагаторів полів.

де  $A = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_L$  – скалярна величина,  $B = \sum_{l=1}^L \alpha_l p_l$  – 4-вектор,  $M^2 = \sum_{l=1}^L \alpha_l (m_l^2 - p_l^2)$  – скалярна величина.

Для виконання інтегрування за 4-імпульсом нам знадобляться наступні табличні співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k e^{i(Ak^2 + 2Bk)} = \frac{\pi^2}{i} \cdot \frac{1}{A^2} e^{-i\frac{B^2}{A}}, \quad (22.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k e^{i(Ak^2 + 2Bk)} k^\nu = \frac{\pi^2}{i} \cdot \frac{1}{A^2} e^{-i\frac{B^2}{A}} \left[ -\frac{B^\nu}{A} \right], \quad (22.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k e^{i(Ak^2 + 2Bk)} k^\nu k^\mu = \frac{\pi^2}{i} \cdot \frac{1}{A^2} e^{-i\frac{B^2}{A}} \left[ \frac{2B^\nu B^\mu + iAg^{\mu\nu}}{2A^2} \right], \quad (22.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k e^{i(Ak^2 + 2Bk)} k^2 = \frac{\pi^2}{i} \cdot \frac{1}{A^2} e^{-i\frac{B^2}{A}} \left[ \frac{B^2 + 2iA}{A^2} \right]. \quad (22.7)$$

Зазначимо, що співвідношення (22.5), (22.6) можна отримати з (22.4) шляхом диференціювання за  $\partial/\partial B_\nu$  та  $\partial^2/\partial B_\nu \partial B_\mu$ . Співвідношення (22.7) отримується з (22.6) шляхом опускання індексу одного з імпульсів, прирівнювання індексів та підсумовування.

Запишемо поліном  $P(k, \{p\})$  у загальному вигляді як

$$P(k, \{p\}) = P(p) + k^\nu P_\nu(p) + k^\nu k^\mu P_{\nu\mu}(p) \dots,$$

де літерою  $p$  ми позначили певний фіксований 4-імпульс з сукупності 4-імпульсів  $p_l$ , або деякої їх комбінації;  $P_\nu(p)$ ,  $P_{\nu\mu}(p)$  – 4-вектор та  $4 \times 4$  тензор, що визначається 4-імпульсом  $p$ . Використавши (22.4) – (22.7), виконаємо інтегрування за 4-імпульсом у (22.3):

$$\begin{aligned} I(\{p_l\}, L) &= i^L \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \dots \int_0^\infty d\alpha_L \frac{e^{i\left(-\frac{B^2}{A} - M^2 + i\epsilon A\right)}}{A^2} \times \\ &\times \left[ P(p) - \frac{B^\nu}{A} P_\nu(p) + \frac{2B^\mu B^\nu + iAg^{\mu\nu}}{2A^2} P_{\mu\nu} + \dots \right]. \quad (22.8) \end{aligned}$$

Наступний крок – перехід до нових змінних інтегрування, а саме: від  $L$  змінних інтегрування  $\alpha_l$  до нових  $L - 1$  незалежних змінних  $x_l$

( $l = 1, 2 \dots L - 1$ ) та змінної  $R$ :

$$\alpha_l = x_l R, \quad l = (1, 2 \dots L - 1), \quad \alpha_L = x_L R, \quad x_L = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{L-1}, \quad (22.9)$$

де для зручності записів введено також змінну  $x_L$ , яка не є незалежною змінною, а є комбінацією змінних  $x_l$ . Тоді

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \dots \int_0^\infty d\alpha_L = \int_0^\infty dR \int_0^1 d\{x\}_L I, \quad (22.10)$$

де  $I$  – яacobіан переходу до нових змінних  $I = R^{L-1}$  та

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\{x\}_L &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{L-2}} dx_{L-1} = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_L \delta(x_1 + x_2 + \dots + x_L - 1). \end{aligned} \quad (22.11)$$

У нових позначеннях вираз (22.8) набуде вигляду

$$I(\{p_l\}, L) = i^L \int_0^\infty dR \cdot R^{L-3} \int_0^1 d\{x\}_L e^{iR(-D+i\varepsilon)} \left[ Q_0 + \frac{1}{R} Q_1 + \dots \right], \quad (22.12)$$

де ми врахували, що  $A = \sum \alpha_L = R \sum x_l = R$  та

$$D(x_l, p_l) = \left( \sum_{l=1}^L x_l p_l \right)^2 + \sum_{l=1}^L x_l (m_l^2 - p_l^2), \quad (22.13)$$

$$Q_0(x_l, p_l, p) = P(p) - \tilde{B}^\nu P_\nu(p) + \tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu P_{\mu\nu}(p) + \dots, \quad (22.14)$$

$$Q_1(x_l, p_l, p) = \frac{i}{2} g^{\mu\nu} P_{\mu\nu}(p) + \dots, \quad (22.15)$$

$$\tilde{B}^\nu = B^\nu / R = \sum_{l=1}^L x_l p_l^\nu. \quad (22.16)$$

Для подальшого розрахунку інтеграла використаємо наступне співвідношення

$$\int_0^{\infty} dR \cdot R^Z e^{iR(-D+i\varepsilon)} = \frac{1}{i^{Z+1}} \frac{\Gamma(Z+1)}{(D-i\varepsilon)^{Z+1}}, \quad (22.17)$$

де  $\Gamma(y)$  – гамма-функція. Тоді

$$I(\{p_l\}, L) = i^2 \int_0^1 \frac{d\{x\}_L}{(D-i\varepsilon)^{L-2}} [\Gamma(L-2)Q_0 + i(D-i\varepsilon)\Gamma(L-3)Q_1 + \dots]. \quad (22.18)$$

Як відомо,  $\Gamma(n) = (n-1)!$  для цілих додатних  $n$ , а для цілих значень  $n \leq 0$  функція  $\Gamma(n)$  приймає нескінченні значення. Значить у випадку, коли маємо лише один ненульовий доданок  $Q_0$ , розбіжним буде інтеграл для петлі з  $L = 2$ , а збіжним – для всіх петель з  $L > 2$ . Якщо ненульовими є  $Q_0$  та  $Q_1$ , збіжними будуть інтеграли від петель з  $L > 3$  і т.д. Зазначимо, що інтегрування по  $d\{x\}_L$  в (22.18) також може дати розбіжне значення, оскільки функція  $D(x_l, p_l)$  (22.13) може мати нулі при певних значеннях  $x_l$ .

### Параметризація Фейнмана

Метод параметризації Фейнмана полягає у використанні наступного очевидного співвідношення

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(x+y-1)}{(xA + yB)^2}. \quad (22.19)$$

Шляхом диференцювання виразу (22.19) за  $A$  та  $B$  легко отримати його узагальнення

$$\frac{1}{A^m B^n} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \frac{nm x^{m-1} y^{n-1}}{(xA + yB)^{n+m}}. \quad (22.20)$$

Наведемо також загальне співвідношення

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 d\{x\}_L \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_n A_n)^n}, \quad (22.21)$$

яке можна отримати з (22.19) методом математичної індукції, а  $d\{x\}_L$  визначено в (22.11). Зрозуміло, що шляхом диференцювання (22.21) за параметрами  $A_i$  можна отримати співвідношення типу (22.20).

Корисно також навести очевидне співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{1}{(A+m^2)(B+m^2)} &= /(\text{22.19})/ = \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B + m^2)^2} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 \frac{dx}{xA + (1-x)B + m^2}, \quad (22.22) \end{aligned}$$

застосування якого може суттєво спростити розрахунок.

За допомогою (22.21) вираз (22.1) зводиться до вигляду

$$I(\{p_l\}, L) = \int_0^1 d\{x\}_L \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{P(k, \{p_l\},)}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_L A_L)^L}, \quad (22.23)$$

де  $A_l = m_l^2 - (k + p_l)^2 - i\varepsilon$ , а множники  $(L-1)!$  та  $i/\pi^2$  ми прибрати шляхом перевизначення коефіцієнтів поліному  $P$ . Вираз у знаменнику (22.23) запишемо як

$$\begin{aligned} x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_L A_L &= \tilde{M}^2 - 2k\tilde{B} - k^2 - i\varepsilon = \\ &= \tilde{M}^2 + \tilde{B}^2 - (k + \tilde{B})^2 - i\varepsilon = D - (k + \tilde{B})^2 - i\varepsilon, \quad (22.24) \end{aligned}$$

де  $\tilde{M}^2 = M^2/R = \sum_l x_l (m_l^2 - p_l^2)$ , а величини  $D, \tilde{B}$  визначені в (22.13), (22.16). Тоді отримаємо

$$I(\{p_l\}, L) = \int_0^1 d\{x\}_L \int_{-\infty}^{\infty} d^4q \frac{\tilde{P}(q, \{p_l\})}{(D - q^2 - i\varepsilon)^L}, \quad (22.25)$$

де ми ввели нову змінну інтегрування  $q = k + \tilde{B}$ .

Зазначимо, що інтеграли виду  $\int q^\nu F(q^2) d^4q$  дорівнюють нулю як інтеграли від непарної функції у симетричних границях. Аналогічним чином інтеграли від будь-якої непарної кількості компонент 4-імпульсу  $\int q^{\nu_1} \dots q^{\nu_{2k-1}} F(q^2) d^4q$  також дорівнюють нулю. Інтеграли від

парного добутку компонент 4-імпульсів не дорівнюватимуть нулеві лише за умови, що індекси компонент 4-векторів хоча б попарно будуть рівними. Враховуючи, що підінтегральна функція веде себе як тензор при перетвореннях Лоренца, отримаємо

$$\int q^{\nu_1} \dots q^{\nu_{2k}} F(q^2) d^4 q = T^{\nu_1 \dots \nu_{2k}} \int (q^2)^k F(q^2) d^4 q,$$

де  $T^{\nu_1 \dots \nu_{2k}}$  тензор, що не залежить від  $q$ . Наведемо вирази для найпростіших з таких інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^\mu q^\nu F(q^2) d^4 q = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 F(q^2) d^4 q, \quad (22.26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^\mu q^\nu q^\rho q^\sigma F(q^2) d^4 q = \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}}{24} \int_{-\infty}^{\infty} (q^2)^2 F(q^2) d^4 q, \quad (22.27)$$

в справедливості яких легко переконатися, якщо з обох сторін рівностей опустити половину імпульсів до низу, попарно прирівняти з верхніми індексами та провести підсумовування.

Поліном  $\tilde{P}(q, \{p_l\})$  у виразі (22.25) можна замінити поліномом за ступенями  $q^2$ , або поліномом за ступенями виразу  $(D - q^2 - i\varepsilon)$ . Відповідно, інтеграл (22.25) зведеться до комбінації інтегралів виду

$$I_n = \int_0^1 d\{x\}_L \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{q} \int_{-\infty}^{\infty} dq^0 \frac{1}{(D - q^2 - i\varepsilon)^n}. \quad (22.28)$$

Для розрахунку останнього інтеграла необхідно зробити поворот Віка, в основі якого лежить наступна ідея. При визначенні фотонного чи електронного пропагатора (див. розд. 2 та 4) інтеграл за нульовою компонентою 4-імпульсу рівнозначний інтегруванню в комплексній площині за контуром  $c$ , див. рис. 2.2, *a*. Однак, значення цього інтегралу не зміниться, якщо замість інтегрування вздовж дійсної осі перейти до інтегрування вздовж уявної осі, оскільки інтеграл по замкнутому контуру дорівнює сумі лишків за полюсами функції, що знаходяться всередині контуру. Це зводиться до того, що замість інтегралу за  $dq^0$  переходять до інтегралу за  $idq^4$  в межах від мінус до



плюс нескінченності. При цьому величина  $q^2 = (q^0)^2 - (\vec{q})^2$  переходить у  $q^2 \rightarrow -q_E^2 = -\sum_{i=1}^4 (q^i)^2$ , де нижній символ  $E$  означає, що ми фактично перейшли до евклідового простору, де квадрат 4-вектора є просто сумою квадратів його компонент.

Перехід до евклідового простору дозволяє перейти до сферичної системи координат в 4-вимірному просторі, а саме:

$$\vec{r}_4 = |\vec{r}_4|(\sin w \sin \theta \cos \varphi, \sin w \sin \theta \sin \varphi, \sin w \cos \theta, \cos w), \quad (22.29)$$

$$d\vec{r}_4 = |\vec{r}_4|^3 d|\vec{r}_4| d\Omega_4, \quad d\Omega_4 = \sin^2 w \sin \theta dw d\theta d\varphi, \quad (22.30)$$

Інтеграл за кутовою частиною буде

$$\int d\Omega_4 = \int_0^\pi \sin^2 w dw \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi^2. \quad (22.31)$$

Зробивши поворот Віка та перейшовши до сферичної системи координат, отримаємо для (22.28)

$$I_n = i2\pi^2 \int_0^1 d\{x\}_n \int_0^\infty dz \frac{z^3}{(D+z^2)^n}, \quad (22.32)$$

де можна прибирати доданок  $i\varepsilon$  в знаменнику для додатних  $D$ , було враховано (22.31) та введено позначення  $z = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$ . Виділивши окремо інтегрування за 4-імпульсом, отримаємо

$$J_n = \int_0^\infty dz \frac{z^3}{(D+z^2)^n} = \frac{D^{2-n}}{2(n-1)(n-2)}, \quad (22.33)$$

вираз для якого справедливий для  $n > 2$ , в іншому випадку інтеграл (22.28) розбігається на верхній границі.

Остаточно ми отримуємо кінцеві вирази для базових інтегралів у фейнманівській параметризації:

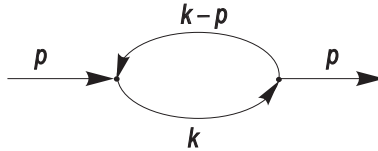
$$I_n = \frac{i\pi^2}{(n-1)(n-2)} \int_0^1 \frac{d\{x\}_n}{D^{n-2}(x,p)}. \quad (22.34)$$

### Приклад 1. Розрахунок інтеграла з використанням параметризації Фейнмана

Розглянемо найпростіший інтеграл виду

$$I(p, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k - p)^2)}, \quad (22.35)$$

що описує петльовий вклад в теорії взаємодіючих нейтральних скалярних полів з масою  $m$  та самодією типу  $\sim \varphi^3$  (див. вираз для пропагатора скалярного поля (ДЗ.1.5)), котрий можна представити діаграмою:



Запишемо підінтегральний вираз у (22.35) за допомогою (22.19):

$$\frac{1}{(m^2 - k^2)(m^2 - (k - p)^2)} = \int_0^1 \frac{dx}{[x(m^2 - (k - p)^2) + (1 - x)(m^2 - k^2)]^2}. \quad (22.36)$$

Виділивши повні квадрати від імпульсів, отримаємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{[m^2 - p^2 x(1 - x) - (k - xp)^2]^2}. \quad (22.37)$$

Зазначимо, що величина

$$\Delta(x, p) = m^2 - p^2 x(1 - x) \quad (22.38)$$

буде додатною для  $p^2 < 4m^2$ , оскільки максимальне значення функції  $x(1 - x)$ , для  $x \in [0, 1]$ , дорівнює  $1/4$ . Умова ж  $p^2 < 4m^2$  фізично означає неможливість народження пар частинок (тоді б петля розривалася і зовнішні її лінії відповідали б народженим частинкам).

Підставимо (22.37) в (22.35) та зробимо заміну  $q = k - xp$ , отримаємо:

$$I(p, m) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \int_0^1 \frac{dx}{[\Delta(x, p) - q^2]^2}. \quad (22.39)$$

Наступний крок – поворот Віка:  $q_0 \rightarrow iq_4$ ,  $q^2 \rightarrow -q_E^2 = -(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)$ . Отримуємо

$$I(p, m) = i \int d\Omega_4 \int_0^1 dx \int_0^\infty dz \frac{z^3}{[\Delta(x, p) + z^2]^2}, \quad (22.40)$$

де  $z = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$ . Очевидно, даний інтеграл є логарифмічно розбіжним за великих значень змінної  $z$ . Для його розрахунку, в подальшому, необхідно буде використовувати методи регуляризації.

**Приклад 2. Розрахунок інтеграла з використанням  $\alpha$ -представлення**

Розрахуємо інтеграл (22.35) використовуючи  $\alpha$ -представлення. Використаємо (22.2) та запишемо складові підінтегрального виразу

$$\frac{1}{m^2 - k^2} = i \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2)} d\alpha, \quad \frac{1}{m^2 - (k-p)^2} = i \int_0^\infty e^{i\beta((k-p)^2 - m^2)} d\beta. \quad (22.41)$$

Тоді

$$I(p, m) = i^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d^4k e^{i[k^2 A + 2kB - M^2]}, \quad (22.42)$$

де  $A = \alpha + \beta$ ,  $B = -\beta p$ ,  $M^2 = m^2(\alpha + \beta) - p^2\beta$ . Використовуючи (22.4), проведемо інтегрування за 4-імпульсом  $k$ :

$$I(p, m) = i\pi^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-i\frac{B^2}{A} - iM^2}}{(\alpha + \beta)^2} = i\pi^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} p^2 - im^2(\alpha+\beta)}}{(\alpha + \beta)^2}. \quad (22.43)$$

Наступний крок – заміна змінних:  $\alpha = xR$ ,  $\beta = yR$  за додаткової умови  $x + y = 1$ , див. (22.9) – (22.11). Якобіан переходу  $I = R$ , відповідно

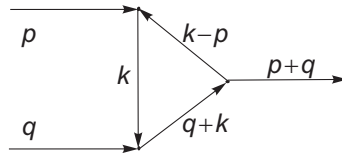
$$I(p, m) = i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x + y - 1) \int_0^\infty \frac{dR}{R} e^{iR[xy p^2 - m^2]} =$$

$$= i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dR}{R} e^{-iR\Delta(x,p)}, \quad (22.44)$$

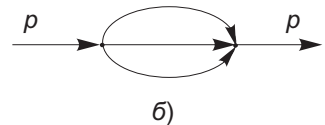
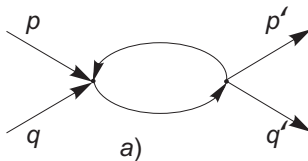
де  $\Delta(x, p)$  було визначено в (22.38). Інтеграл за змінною  $R$  є розбіжним згідно (22.17). Для його розрахунку необхідно використовувати методи регуляризації.

### Завдання

1. Доведіть справедливість співвідношення (22.4).
2. Доведіть, що якобіан переходу при заміні змінних у (22.9) справді дорівнює  $A^{L-1}$ .
3. Використовуючи методи параметризації за допомогою  $\alpha$ -представлення та параметризації Фейнмана розрахувати наступну діаграму Фейнмана, що описує взаємодію в теорії нейтрального скалярного поля з масою  $m$  та взаємодією типу  $\sim \varphi^3$ :



4. Використовуючи методи параметризації за допомогою  $\alpha$ -представлення та параметризації Фейнмана розрахувати діаграми скалярної риби (а) та скалярного горіха (б), що описують взаємодію в теорії нейтрального скалярного поля з масою  $m$  та взаємодією типу  $\sim \varphi^4$ :



## РОЗДІЛ 23

### Методи регуляризації розбіжних інтегралів

У попередньому розділі було показано, що вклад петльових поправок може бути нескінченним. Звичайно, це не є фізичним результатом. По логіці теорії збурень (з константою зв'язку меншою за одиницю) вклад від доданків повинен бути скінченним та зменшуватися зі зростанням порядку теорії збурень.

Самі по собі отримані нескінченні величини петльових поправок складно аналізувати, неможливо порівнювати нескінченні вклади від різних петльових поправок та розглядати питання про їх можливі скорочення. У зв'язку з цим при обчисленні розбіжних інтегралів застосовуються методи регуляризації, які полягають у модифікації інтегралів таким чином, щоб вони стали збіжними. При цьому кінцева відповідь виявляється функцією від певних параметрів, при фізичних значеннях яких і відновлюється нескінченне значення інтегралів. Отримання відповіді інтегрування у вигляді кінцевого значення дозволяє математично коректно оперування з нескінченними вкладками окремих діаграм в теорії поля без чого неможлива побудова теорії перенормування – теорії, що дозволяє виділити кінцеві фізичні частини від нескінченних вкладів вищих порядків теорії збурень.

Якщо розглядати фізичні причини появи розбіжностей при обчисленні петльових поправок, то розбіжності в інтегруванні за великих значень 4-імпульсу можуть свідчити про те, що фізична теорія за великих енергій (або на малих відстанях) може бути іншою.

З математичної точки зору розбіжність інтегралів у вищих порядках теорії збурень пов'язана з наявністю особливостей причинних функцій Гріна (пропагаторів полів) на світловому конусі. Справді, для причинної функції скалярного масивного поля маємо [3]:

$$D(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}} \theta(\lambda) H_1^{(2)}(m\sqrt{\lambda}) + \frac{mi}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}} \theta(-\lambda) K_1(m\sqrt{-\lambda}), \quad (23.1)$$

де  $\lambda = x_0^2 - \vec{x}^2$ ,  $H_\nu^{(2)}(y)$  – функція Ханкеля другого роду порядку  $\nu$ ,  $K_\nu(y)$  – функція Макдональда порядку  $\nu$ ,  $\theta(y)$  – функція Хевісайда.

Функція (23.1) має особливості лише на світловому конусі, а саме: в околі точки  $\lambda = 0$  маємо

$$D(x) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\lambda} - \frac{m^2}{16\pi} \theta(\lambda) + \frac{im^2}{8\pi^2} \ln \frac{m|\lambda|^{1/2}}{2} + O(\sqrt{|\lambda|} \ln |\lambda|). \quad (23.2)$$

Наведений вираз має особливості на світловому конусі чотирьох типів: полюс  $1/\lambda$ ,  $\ln |\lambda|$ ,  $\delta$ -функцію та стрибок  $\theta(\lambda)$ . Очевидно, що пропагатори векторних та спірних полів також будуть містити аналогічні особливості в силу співвідношення (0.32).

Враховуючи сказане, робимо висновок, що для регуляризації виразів у вищих порядках теорії збурень можна або модифікувати саму процедуру інтегрування, або ж модифікувати явний вигляд пропагаторів полів.

### Регуляризація Паулі-Віларса

Метод регуляризації Паулі-Віларса полягає у модифікації пропагаторів відповідних полів таким чином, щоб позбутися у них особливостей на світловому конусі. Для цього пропагатор певного поля з масою  $m$ , наприклад, скалярного, замінюється на лінійну комбінацію пропагаторів цього ж поля, але з іншими масами ( $M_i$ ):

$$D(m, x) \rightarrow D^{reg}(x, \{M_i\}) = D(m, x) + \sum_i C_i D(M_i, x). \quad (23.3)$$

Константи ж  $C_i$  підбираються таким чином, щоб позбавитися особливостей на світловому конусі.

Дана процедура дозволяє отримати збіжні інтеграли, а кінцева відповідь буде залежати від параметрів  $M_i$ . Врахувавши явний вигляд пропагаторів у імпульсному просторі (Д3.1.5), стає зрозумілим, що у границі  $M_i \rightarrow \infty$  маємо  $D^{reg} \rightarrow D$ . Відповідно, по завершенню розрахунків з регуляризованим пропагатором, фізичний результат відновлюється в границі  $M_i \rightarrow \infty$ .

Наприклад, як впливає з явного виду (23.2), у випадку теорії скалярного поля для позбавлення особливостей типу  $\delta$ -функції та полюсу  $1/\lambda$  на параметри  $C_i$  достатньо накласти умову

$$1 + \sum_i C_i = 0. \quad (23.4)$$

Якщо цієї умови не вистачає для забезпечення збіжності необхідних інтегралів, потрібно позбавитися від наступних особливостей причинної функції – особливостей типу стрибка функції та полюсу  $\ln |\lambda|$ . Очевидною додатковою умовою є

$$m^2 + \sum_i C_i M_i^2 = 0. \quad (23.5)$$

### Приклад 1. Розрахунок інтеграла з регуляризацією Паулі-Віларса та використанням параметризації Фейнмана

Розрахуємо петльову поправку у скалярній теорії поля, а саме інтеграл (22.35) за допомогою регуляризації Паулі-Віларса використовуючи параметризацію Фейнмана. Оскільки інтеграл (22.35) є логарифмічно розбіжним, то для його регуляризації потрібно позбавитися лише від особливостей типу  $\delta$ -функції та полюсу  $1/\lambda$ . Умову (23.4) можна реалізувати використавши у сумі (23.3) лише один доданок з константою  $C = -1$ . Отже

$$D(m, k) \rightarrow D^{reg}(m, M, k) = D(m, k) - D(M, k), \quad (23.6)$$

або

$$D^{reg}(m, M, k) = \frac{1}{m^2 - k^2} - \frac{1}{M^2 - k^2}. \quad (23.7)$$

Регуляризоване значення інтеграла (22.35) отримується шляхом заміни всіх пропагаторів, що містяться у ньому, на регуляризовані

$$\begin{aligned} I^{reg}(p, m, M) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left( \frac{1}{m^2 - k^2} - \frac{1}{M^2 - k^2} \right) \times \\ &\times \left( \frac{1}{m^2 - (k-p)^2} - \frac{1}{M^2 - (k-p)^2} \right) = \\ &= J(p, m, m) + J(p, M, M) - J(p, m, M) - J(p, m, M). \end{aligned} \quad (23.8)$$

Явний вираз для  $J(p, m_1, m_2)$  можна отримати за аналогією з (22.40)

$$\begin{aligned} J(p, m_1, m_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{1}{m_1^2 - k^2} \cdot \frac{1}{m_2^2 - (k-p)^2} = \\ &= i2\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{\infty} dz \frac{z^3}{[\Delta(m_1, m_2) + z^2]^2}, \end{aligned} \quad (23.9)$$

де  $\Delta(m_1, m_2) = (1-x)m_1^2 + xm_2^2 - p^2x(1-x)$ .

Відповідно,

$$I^{reg}(p, m, M) = i2\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^\infty dz z^3 \left[ \frac{1}{[\Delta(m, m) + z^2]^2} + \frac{1}{[\Delta(M, M) + z^2]^2} - \frac{1}{[\Delta(m, M) + z^2]^2} - \frac{1}{[\Delta(M, m) + z^2]^2} \right]. \quad (23.10)$$

Наведені інтеграли можна явно розрахувати в кінцевих межах

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dz \frac{z^3}{[a+z^2]^2} &= -a \int_0^\Lambda dz \frac{z}{[a+z^2]^2} + \int_0^\Lambda dz \frac{z}{[a+z^2]} = /z^2 = x/ = \\ &= -\frac{1}{2}(1 + \ln a) + \frac{1}{2} \ln(\Lambda + a), \quad (23.11) \end{aligned}$$

а потім параметр  $\Lambda$  спрямувати до нескінченності. Використавши цей результат, отримуємо

$$\begin{aligned} I^{reg}(p, m, M) &= -i\pi^2 \int_0^1 dx \ln \frac{\Delta(M, M)\Delta(m, m)}{\Delta(m, M)\Delta(M, m)} = -i\pi^2 \int_0^1 dx \times \\ &\times \ln \frac{[M^2 - p^2x(1-x)][m^2 - p^2x(1-x)]}{[(1-x)m^2 + xM^2 - p^2x(1-x)][(1-x)M^2 + xm^2 - p^2x(1-x)]}. \quad (23.12) \end{aligned}$$

Врахувавши, що  $M \rightarrow \infty$ , вираз можна спростити:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\pi^2} I^{reg}(p, m, M) &= \int_0^1 dx \ln \frac{[M^2][m^2 - p^2x(1-x)]}{[xM^2][(1-x)M^2]} \cdot \frac{m^2}{m^2} = \\ &= -\ln \frac{M^2}{m^2} + \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2x(1-x)}{m^2} + \int_0^1 dx \ln \frac{1}{x(1-x)}, \quad (23.13) \end{aligned}$$

де останній інтеграл елементарно розраховується і дорівнює двійці.

Отже, ми отримали значення регуляризованого інтеграла у вигляді

$$\frac{i}{\pi^2} I^{reg}(p, m, M) = I_{sing} + I_{finite}, \quad (23.14)$$



де явно виділені нескінченна ( $I_{sing}$  при  $M \rightarrow \infty$ ) та скінченна частини ( $I_{finite}$ ):

$$I_{sing} = 2 - \ln \frac{M^2}{m^2}, \quad I_{finite} = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2}. \quad (23.15)$$

### Приклад 2. Розрахунок інтеграла з регуляризацією Паулі-Віларса та використанням $\alpha$ -представлення

Розрахуємо регуляризований інтеграл (23.8):

$$\begin{aligned} I^{reg}(p, m, M) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left( \frac{1}{m^2 - k^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (k-p)^2} - \frac{1}{M^2 - k^2} \cdot \frac{1}{m^2 - (k-p)^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{M^2 - k^2} \cdot \frac{1}{M^2 - (k-p)^2} - \frac{1}{m^2 - k^2} \cdot \frac{1}{M^2 - (k-p)^2} \right) = \\ &= /(\text{22.2}), (\text{22.41}) - (\text{22.43})/ = i\pi^2 \int_0^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} d\beta \frac{e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}p^2}}{(\alpha+\beta)^2} \times \\ &\times \left[ e^{-im^2(\alpha+\beta)} - e^{-iam^2 - i\beta M^2} + e^{-iM^2(\alpha+\beta)} - e^{-i\alpha M^2 - i\beta m^2} \right]. \quad (23.16) \end{aligned}$$

Наступний крок – заміна змінних:  $\alpha = xR$ ,  $\beta = yR$  за додаткової умови  $x + y = 1$ , див. (22.9) – (22.11). Якобіан переходу  $I = R$ , відповідно

$$\begin{aligned} I^{reg}(p, m, M) &= i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \int_0^{\infty} \frac{dR}{R} e^{i\frac{xy}{x+y}p^2 R} \times \\ &\times \left[ e^{-im^2(x+y)R} - e^{-i(xm^2+yM^2)R} + e^{-iM^2(x+y)R} - e^{-i(xM^2+y m^2)R} \right]. \quad (23.17) \end{aligned}$$

Для подальшого розрахунку необхідно зазначити, що кожен з окремих інтегралів у даному виразі є логарифмічно розбіжним, однак їх різниця є кінцевою функцією:

$$\int_0^{\infty} \frac{dR}{R} (e^{-iaR} - e^{-ibR}) e^{-\varepsilon R} = \ln \frac{b - i\varepsilon}{a - i\varepsilon}. \quad (23.18)$$

Відповідно, значення регуляризованого інтеграла дорівнює

$$\begin{aligned}
 I^{reg}(p, m, M) &= i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \times \\
 &\times \ln \left[ \frac{\frac{xy}{x+y}p^2 - xm^2 - yM^2}{\frac{xy}{x+y}p^2 - m^2(x+y)} \cdot \frac{\frac{xy}{x+y}p^2 - xM^2 - ym^2}{\frac{xy}{x+y}p^2 - M^2(x+y)} \right] = i\pi^2 \int_0^1 dx \times \\
 &\times \ln \left[ \frac{x(1-x)p^2 - xm^2 - (1-x)M^2}{x(1-x)p^2 - m^2} \cdot \frac{x(1-x)p^2 - xM^2 - (1-x)m^2}{x(1-x)p^2 - M^2} \right], \quad (23.19)
 \end{aligned}$$

що збігається з виразом (23.12), розрахованим у параметризації Фейнмана.

### Розмірна регуляризація

Ідея розмірної регуляризації полягає у тому, що розбіжний інтеграл у 4-вимірному просторі-часі може бути збіжним у просторі-часі іншої розмірності, наприклад  $4-2\epsilon$ . У кінцевій відповіді, звично, необхідно буде зробити граничний перехід  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### Розмірна регуляризація у параметризації Фейнмана

Перехід до простору іншої розмірності ( $4 \rightarrow 4-2\epsilon$ ) зручно виконати у евклідовому просторі (після повороту Віка)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d^4 k)_E = \int d\Omega_4 \int_0^{\infty} k^3 dk \rightarrow \mu^{2\epsilon} \int d\Omega_{4-2\epsilon} \int_0^{\infty} k^{3-2\epsilon} dk, \quad (23.20)$$

де величина  $\mu$  має розмірність маси та використовується для збереження загальної розмірності значення інтеграла.

Значення інтеграла по кутовій частині зручно записати в узагальненій формі з використанням гамма-функції

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (23.21)$$

що, очевидно, справедливо для простору цілої розмірності, та застосовувати цей вираз і для простору не цілої розмірності.

Для прикладу розглянемо розрахунок інтеграла (22.35) методом розмірної регуляризації. Вираз (22.40) набуде вигляду

$$I^{reg}(p, m) = i\mu^{2\epsilon} \int d\Omega_{4-2\epsilon} \int_0^1 dx \int_0^\infty dz \frac{z^{3-2\epsilon}}{[\Delta(x, p) + z^2]^2}. \quad (23.22)$$

Згідно (23.21) інтеграл за кутовою частиною дорівнює

$$\int d\Omega_{4-2\epsilon} = \frac{2\pi^{2-\epsilon}}{\Gamma(2-\epsilon)}. \quad (23.23)$$

Врахувавши, що при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\pi^{2-\epsilon} = \pi^2(1 - \epsilon \ln \pi)$ ,  $\Gamma(2-\epsilon) = 1 - (1 - \mathbf{C})\epsilon$ , де  $\mathbf{C} \simeq 0,577216$  – стала Ейлера, матимемо

$$\int d\Omega_{4-2\epsilon} = 2\pi^2[1 - \epsilon(\ln \pi + \mathbf{C} - 1)], \quad (23.24)$$

де ми знехтували квадратичними доданками по  $\epsilon$ .

Візьмемо інтеграл за змінною  $z$  у виразі (23.22):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dz \frac{z^{3-2\epsilon}}{[\Delta + z^2]^2} &= -\Delta \int_0^\infty dz \frac{z^{1-2\epsilon}}{[\Delta + z^2]^2} + \int_0^\infty dz \frac{z^{1-2\epsilon}}{\Delta + z^2} = /z^2 = w/ = \\ &= -\frac{\Delta}{2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^\epsilon[\Delta + w]^2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^\epsilon[\Delta + w]} = -\frac{\Delta}{2} I_2 + \frac{1}{2} I_1. \end{aligned} \quad (23.25)$$

Зазначені інтеграли можна обчислити перейшовши в комплексну площину та використавши контур інтегрування, зображений на рис. 23.1.

Згідно теореми Коші про лишки матимемо:

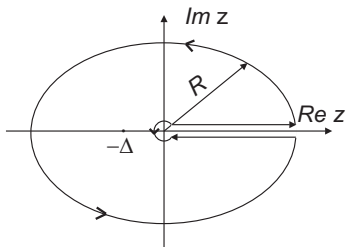
$$I_1 (1 - e^{-2\pi i\epsilon}) = 2\pi i \frac{e^{-i\pi\epsilon}}{\Delta^\epsilon}, \quad (23.26)$$

$$I_2 (1 - e^{-2\pi i\epsilon}) = 2\pi i \epsilon \frac{e^{-i\pi\epsilon}}{\Delta^{1+\epsilon}}. \quad (23.27)$$

Прирівнявши дійсні або уявні частини в останніх виразах, отримаємо:

$$I_1 = \frac{\pi}{\sin(\pi\epsilon)} \frac{1}{\Delta^\epsilon}, \quad I_1|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\Delta^\epsilon} \quad (23.28)$$

$$I_2 = \frac{\pi\epsilon}{\sin(\pi\epsilon)} \frac{1}{\Delta^{1+\epsilon}}, \quad I_2|_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{\Delta^{1+\epsilon}}. \quad (23.29)$$



**Рис. 23.1.** Контур інтегрування: велике коло  $-R \rightarrow \infty$ , маленьке коло  $-r \rightarrow 0$ .

Отже вираз (23.25), домножений на  $\mu^{2\epsilon}$ , дорівнюватиме

$$\mu^{2\epsilon} \int_0^{\infty} dz \frac{z^{3-2\epsilon}}{[\Delta + z^2]^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{\epsilon} - \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{\epsilon} \right). \quad (23.30)$$

Врахувавши, що  $a^{\epsilon} = 1 + \epsilon \ln a$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\mu^{2\epsilon} \int_0^{\infty} dz \frac{z^{3-2\epsilon}}{[\Delta + z^2]^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{\Delta} - 1 - \epsilon \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right). \quad (23.31)$$

Підставивши (23.24) та (23.31) в (23.22) остаточно отримаємо

$$\frac{i}{\pi^2} I^{reg}(p, m) = I_{sing} + I_{finite}, \quad (23.32)$$

де ми знову виділили скінченну ( $I_{finite}$ ) та нескінченну ( $I_{sing}$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ ) частини:

$$I_{sing} = \ln \pi + \mathbf{C} - \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{\epsilon}, \quad I_{finite} = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2}. \quad (23.33)$$

### Розмірна регуляризація у $\alpha$ -представленні

У просторі-часі розмірності  $n = 4 - 2\epsilon$  перехід до  $\alpha$ -представлення (22.2) залишається незмінним, але зміниться результат інтегрування

за імпульсом (22.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^{4-2\epsilon} k e^{i(\alpha k^2 + 2\beta k)} = \left(\frac{i\alpha}{\pi}\right)^\epsilon \frac{\pi^2}{i} \cdot \frac{1}{\alpha^2} e^{-i\frac{\beta^2}{\alpha}}. \quad (23.34)$$

Даний вираз отримується вважаючи  $2\epsilon$  цілим числом, що відноситься до просторових розмірностей, а потім робиться аналітичне продовження для нецілих  $\epsilon$ .

Узагальнення виразів (22.5) – (22.7) на простір-час розмірності  $n = 4 - 2\epsilon$  можна отримати з (23.34) шляхом диференціювання за параметром  $\beta$ . В результаті отримаємо ті ж вирази (22.5) – (22.7), але з додатковим множником  $(i\alpha/\pi)^\epsilon$  у правій частині.

Звичайно, при переході до простору іншої розмірності необхідно також вводити відповідний масовий множник для збереження загальної розмірності виразу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \rightarrow \mu^{2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d^{4-2\epsilon} k. \quad (23.35)$$

Для прикладу розглянемо розрахунок інтеграла (22.35) методом розмірної регуляризації. Вираз (22.42) набуде вигляду

$$I^{reg}(p, m) = i^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d^{4-2\epsilon} k e^{i[k^2 A + 2k B - M^2]}. \quad (23.36)$$

Використавши (23.34), проведемо інтегрування за імпульсом

$$\begin{aligned} I^{reg}(p, m) &= i\pi^2 \left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\epsilon \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-i\left(\frac{B^2}{A} + M^2\right)}}{A^{2-\epsilon}} = \\ &= i\pi^2 \left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\epsilon \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} p^2 - im^2(\alpha+\beta)}}{(\alpha + \beta)^{2-\epsilon}}. \end{aligned} \quad (23.37)$$

Наступний крок – заміна змінних:  $\alpha = xR$ ,  $\beta = yR$  за додаткової умови  $x + y = 1$ , див. (22.9) – (22.11). Якобіан переходу  $I = R$ , відповідно

$$\begin{aligned}
I^{reg}(p, m) &= i\pi^2 \left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\epsilon \int_0^1 dx \int_0^1 dy \delta(x+y-1) \int_0^\infty \frac{dR}{R^{1-\epsilon}} e^{iR[xy p^2 - m^2]} = \\
&= i\pi^2 \left(\frac{i\mu^2}{\pi}\right)^\epsilon \int_0^1 dx \int_0^\infty dR R^{\epsilon-1} e^{-iR[m^2 - x(1-x)p^2]} = (22.17) = \\
&= i\pi^{2-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \left[ \frac{\mu^2}{m^2 - x(1-x)p^2} \right]^\epsilon. \quad (23.38)
\end{aligned}$$

Враховуючи, що  $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a$ ,  $\Gamma(\epsilon) = 1/\epsilon - \mathbf{C} + O(\epsilon)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\frac{i}{\pi^2} I^{reg}(p, m) = I_{sing} + I_{finite}, \quad (23.39)$$

де ми знову виділили скінченну ( $I_{finite}$ ) та нескінченну ( $I_{sing}$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ ) частини:

$$I_{sing} = \mathbf{C} + \ln \pi - \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{\epsilon}, \quad I_{finite} = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2}. \quad (23.40)$$

Як бачимо, в методі розмірної регуляризації, у кінцевій відповіді залишилася залежність від розмірного параметру  $\mu$ , який може приймати довільні значення. Його зміст буде розглянуто пізніше.

### Регуляризація обрізанням

Ідея цього методу надзвичайно проста. Якщо інтеграл за імпульсом розбігається на верхній межі, що сягає нескінченності, то потрібно обмежити верхню межу інтегрування деякою сталою  $\Lambda$ , яку у кінцевій відповіді спрямувати до нескінченності. Це зручно зробити у параметризації Фейнмана після переходу у евклідов простір.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (d^4 k)_E = \int d\Omega_4 \int_0^\infty k^3 dk \rightarrow \int d\Omega_4 \int_0^\Lambda k^3 dk. \quad (23.41)$$

Для прикладу розглянемо розрахунок інтеграла (22.35). Вираз (22.40) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 I^{reg}(p, m) &= i2\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dz \frac{z^3}{[\Delta(x, p) + z^2]^2} = /(\text{23.11})/ = \\
 &= -i\pi^2 \int_0^1 dx \left( \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \Delta(x, p)} + \ln \left[ \frac{\Delta(x, p)}{\Delta(x, p) + \Lambda^2} \cdot \frac{m^2}{m^2} \right] \right) = \\
 &= /\Lambda \rightarrow \infty/ = \frac{\pi^2}{i} [I_{sing} + I_{finite}]. \quad (23.42)
 \end{aligned}$$

де ми знову виділили скінченну ( $I_{finite}$ ) та нескінченну ( $I_{sing}$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) частини:

$$I_{sing} = 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad I_{finite} = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2}. \quad (23.43)$$

### Регуляризація за допомогою вагової функції

Для регуляризації інтегральних виразів, очевидно, можна використувати вагові функції  $f(k, \{\lambda\})$  у такому вигляді, що забезпечать збіжність інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k f(k, \{\lambda\}). \quad (23.44)$$

Природне обмеження на вигляд таких функцій полягає у тому, щоб при прямуванні параметрів  $\{\lambda\}$  до нуля (або нескінченності), вагова функція прямувала до одиниці.

На завершення зазначимо, що проведені у цьому розділі розрахунки інтеграла (22.35) за допомогою різних методів регуляризації давали однакову відповідь для кінцевої частини інтеграла

$$I_{finite} = \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2}.$$

Дещо відмінні вирази для нескінченної складової інтеграла:

$$I_{sing} = 2 - \ln \frac{M^2}{m^2}, \quad M \rightarrow \infty \quad \text{регуляризація Паулі-Віларса,}$$

$$I_{sing} = \ln \pi + C - \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{\epsilon}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{розмірна регуляризація,}$$

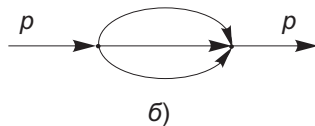
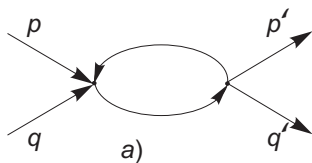
$$I_{sing} = 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}, \quad \Lambda \rightarrow \infty \quad \text{регуляризація обрізанням}$$

не повинні бентежити читача, оскільки величини  $\epsilon, \mu, \Lambda, M$  чітко не фіксовані і жодним чином між собою не пов'язані.

Зазначимо також, що у регуляризованих виразах з'явилася залежність від нових розмірних параметрів, яких не було в початковому лагранжіані ( $\Lambda, M, \mu$ ). Це явище отримало назву *розмірної трансмутції* і обумовлено появою нового масштабу в теорії.

### Завдання

1. Проведіть розрахунок інтеграла (22.35) використовуючи  $\alpha$ -представлення та регуляризацію за допомогою вагової функції у вигляді  $f(k, \Lambda) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - k^2}$ , де параметр  $\Lambda$  слід спрямувати до нескінченності у кінцевому виразі. Покажіть, що цей метод регуляризації є подібним до методу регуляризації Паулі-Віларса.
2. В теорії нейтрального масивного скалярного поля із взаємодією  $\sim \varphi^4$  проведіть розрахунок інтегралів, що відповідають діаграмам скалярної риби (а) та скалярного горіха (б) використовуючи будь-яку регуляризацію





## РОЗДІЛ 24

### Аналіз перенормованості теорій поля

У даному розділі ми на спрощеному рівні розглянемо та сформулюємо критерій того, чи можна певну польову модель вважати *перенормовною*, тобто такою, у якій можна позбавитися від нескінченностей шляхом перевизначення деяких параметрів лагранжіана моделі. Якщо ж *нескінченностей*, що виникають при розрахунках вищих порядків теорії збурень, уникнути не вдається, тоді сам розклад у ряд за теорією збурень втрачає сенс і розрахунок довільного процесу у даній польовій моделі стає неможливим. Такі теорії називають *неперенормовними*. Очевидно, що фізичними є лише перенормовні теорії.

Розглянемо довільну  $n$ -точкову діаграму  $G$  з  $L$  внутрішніми лініями у довільній теорії поля. Згідно діаграмної техніки Фейнмана їй відповідатиме наступний вираз

$$J(G) \sim \int \prod_{\nu=1}^n \delta \left( \sum p_{\nu} \right) \prod_{l=1}^L p_l^{\delta_{\nu}} D_l(p_l) d^4 p_l, \quad (24.1)$$

де у аргументі дельта-функції стоїть сума по усім імпульсам у  $\nu$ -тій вершині,  $p_l^{\delta_{\nu}}$  — імпульс у  $l$ -тій вершині у ступені  $\delta_{\nu}$  (відповідає похідній  $\delta_{\nu}$  ступеня від деякої польової функції у вершині  $\nu$ ),  $D_l$  — пропагатор деякого поля

$$D_l(p) = \frac{P_l(p)}{m_l^2 - p^2 - i\varepsilon}, \quad (24.2)$$

де  $P_l(p)$  — поліном ступеня  $r_l$  за імпульсом  $p$ .

Інтеграл (24.1) може мати нескінченне значення за рахунок розбіжності при великих значеннях імпульсів (*ультрафіолетова розбіжність*) або при значеннях імпульсів, що прямують до нуля (*інфрачервона розбіжність*). Розглянемо питання збіжності інтеграла при великих значеннях імпульса.

Після інтегрування за дельта-функціями та виділення дельта-функції, що виражає загальний закон збереження енергії-імпульсу системи, залишається інтегрування за  $4(L - n + 1)$  імпульсними змінними.

Зробивши віковський поворот та перейшовши у сферичну систему координат у  $4(L - n + 1)$ -вимірному просторі, отримуємо

$$\prod_{l=1}^{L-n+1} \int d^4 p_l \rightarrow \int d\Omega \int dp \frac{p^{4(L-n+1)}}{p}. \quad (24.3)$$

Відповідно, питання оцінки збіжності інтеграла (24.1) зводиться до питання збіжності інтеграла

$$J(G) \sim \int d\Omega \int \frac{p^{4(L-n+1)}}{p} p^{\sum_l (r_l - 2) + \sum_\nu \delta_\nu} dp \sim \int \frac{p^w}{p} dp, \quad (24.4)$$

де величина  $w$  має назву індекса діаграми  $G$

$$w(G) = \sum_{l=1}^L (r_l + 2) - 4(n - 1) + \sum_{\nu=1}^n \delta_\nu. \quad (24.5)$$

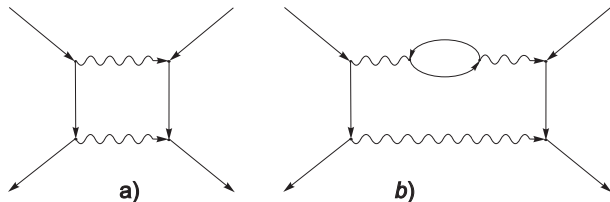
Якщо  $w(G) > 0$ , тоді інтеграл (24.4) є розбіжним і для обчислення інтеграла (24.1) необхідно застосовувати методи регуляризації, в результаті чого отримуємо

$$I_G(p, M) = a_0 M^w + a_1 P M^{w-1} + \dots + a_{w-1} P^{w-1} M + a_w P^w + I_{finite, G}, \quad (24.6)$$

де  $M \rightarrow \infty$ ,  $P$  – певна комбінація імпульсів зовнішніх ліній діаграми, а параметри  $a_i$  можуть у собі містити множники  $\ln M/m$ .

Очевидно, що при  $w(G) < 0$  інтеграл (24.4) збігається і це є необхідною умовою збіжності інтеграла (24.1). Звертаємо увагу, що при  $w(G) < 0$  діаграма може містити розбіжність як за рахунок поведінки підінтегрального виразу при малих значеннях імпульсу інтегрування (та звані інфрачервоні розбіжності), так і за рахунок ультрафіолетових розбіжностей окремих частин діаграми  $G$ . Проілюструємо сказане на прикладі КЕД, див. рис. 24.1. Діаграма  $a$  має значення  $w(G_a) = 2 * 2 + 3 * 2 - 12 = -2$  і не містить ультрафіолетової розбіжності, діаграма  $b$  також має значення  $w(G_b) = 2 * 3 + 3 * 4 - 20 = -2$ , але містить ультрафіолетову розбіжність у своїй піддіаграмі – ферміонній петлі!

Звертаємо увагу, що на даний момент ми розглянули питання збіжності лише окремої діаграми. А ми хотіли розглянути питання перенормовності усієї теорії поля, тобто перенормовності всіх діаграм, що можуть виникати у даній теорії поля.



**Рис. 24.1.** Ілюстрація ультрафіолетових збіжностей діаграм у КЕД. Обидві діаграми мають  $w(G) = -2$ , але діаграма *a* збіжна, а діаграма *b* – розбіжна.

Покажемо тепер більш простий спосіб аналізу розбіжностей в певній теорії поля без необхідності аналізу всіх можливих діаграм. Щоб рухатися далі введемо поняття індекса вершини

$$w_\nu = \frac{1}{2} \sum_{l_{int}} (r_l + 2) - 4 + \delta_\nu, \quad (24.7)$$

де сума відбувається по всім внутрішнім лініям, що відходять від даної вершини, а множник  $1/2$  виник унаслідок того, що кожна внутрішня лінія з'єднує дві вершини. Тоді індекс діаграми можна записати як

$$w(G) = \sum_{\nu=1}^n w_\nu + 4. \quad (24.8)$$

Враховуючи, що для пропагаторів бозонних полів  $r_l = 0$ , а для ферміонних полів  $r_l = 1$ , отримаємо

$$w_\nu = F_{bos,\nu} + \frac{3}{2} F_{fer,\nu} + \delta_\nu - 4, \quad (24.9)$$

де  $F_{bos,\nu}$  ( $F_{fer,\nu}$ ) – кількість внутрішніх бозонних (ферміонних) ліній, що виходять з вершини  $\nu$ .

В цьому місці може виникнути питання з приводу пропагаторів масивних векторних полів, які мають вигляд згідно з (Д4.1.16):

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_A^2}}{m_A^2 - k^2 - i\epsilon}, \quad (24.10)$$

що означає  $r_l = 2$ . Це є катастрофічним з позиції збіжності інтегралів, оскільки при  $k \rightarrow \infty$  матимемо  $D_{\mu\nu}(k) \rightarrow const$ , а не спадаючу функцію. Ситуація рятується використанням пропагатора векторного поля у довільному калібруванні (Д4.5.14):

$$D_{\mu\nu}(k, \xi) = \frac{1}{m_A^2 - k^2 - i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\xi m_A^2 - k^2 - i\epsilon} \right), \quad (24.11)$$

для якого при кінцевих значеннях параметра  $\xi$  ( $R_\xi$ -калібрування, від англ. *renormalization*) матимемо  $D_{\mu\nu}(k \rightarrow \infty, \xi) \sim k^{-2}$  і, відповідно, можна вважати  $r_l = 0$ , а значить і вираз (24.9) справедливим. Зазначимо, якщо перенормованість теорії буде доведена в  $R_\xi$ -калібруванні, то теорія буде перенормованою і у випадку унітарного калібрування (при  $\xi \rightarrow \infty$ ), коли відновлюється вираз (24.10). Так і повинно бути, оскільки фізичні результати не повинні залежати від вибору калібрування, хоча явно довести перенормованість теорії в унітарному калібруванні надзвичайно складно.

Зрозуміло, що індекс вершини буде мати максимальне значення, коли всі лінії, які з неї виходять, є внутрішніми. Тоді величина

$$\Omega_\nu = \text{Max } w_\nu = N_{\text{boz},\nu} + \frac{3}{2} N_{\text{fer},\nu} + \delta_\nu - 4 \quad (24.12)$$

може слугувати характеристикою лагранжіана (або його окремих доданків, що описують взаємодії), де  $N_{\text{boz},\nu}$  ( $N_{\text{fer},\nu}$ ) – кількість усіх бозонних (ферміонних) ліній, що виходять з вершини  $\nu$ . Розглянувши саме цей випадок, з (24.8) можна отримати загальні твердження про перенормовність усієї теорії.

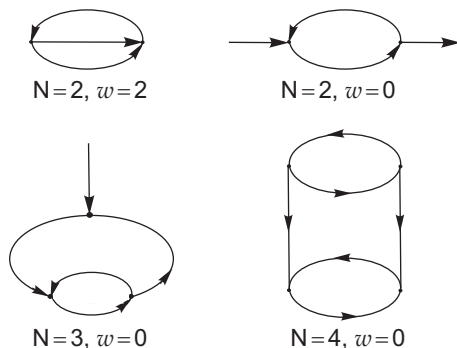
Якщо  $\Omega_\nu \leq 0$ , ми матимемо  $w(G) \leq 4$  і обмежену кількість нескінченних доданків згідно з (24.6), яких можна буде позбутися шляхом перевизначення параметрів початкового лагранжіана. Це є необхідною умовою того, щоб теорія поля була перенормовною. Якщо  $\Omega_\nu > 0$ , ми матимемо, що значення  $w(G)$  (24.8) може бути як завгодно великим в залежності від кількості вершин у діаграмі. Відповідно, ми матимемо необмежену кількість нескінченних доданків згідно з (24.6), а це означає неперенормованість, а значить і нефізичність теорії поля, що розглядається. Наприклад, для КЕД з лагранжіаном взаємодії  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  матимемо  $\Omega = 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 + 0 - 4 = 0$ , що означає перенормовність теорії.

Щоб розібратися які саме діаграми чи типи діаграм в теорії є розбіжними вираз (24.8) зручніше записати у вигляді:

$$w(G) = N\Omega + 4 - n_{bos} - \frac{3}{2}n_{ferm}, \quad (24.13)$$

де  $N$ -кількість вершин,  $n_{bos}$ ,  $n_{ferm}$  кількість зовнішніх бозонних та ферміонних ліній у діаграмі  $G$ . З наведеного виразу відразу випливає, що чим більше зовнішніх ліній, тим краще краще збіжність діаграми (менше значення  $w(G)$ ). Нагадуємо, що діаграма збіжна за умови  $w(G) < 0$ .

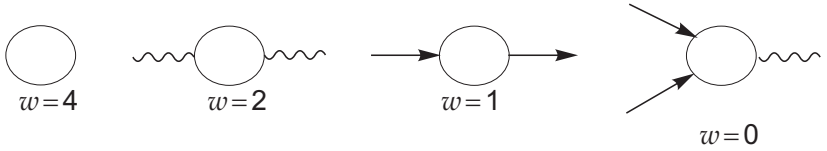
Розглянемо випадок  $\Omega < 0$  на прикладі скалярної теорії з  $\mathcal{L} = -\lambda\phi^3$ . В цьому випадку маємо  $\Omega = -1$ , отже  $w(G) = 4 - N - n_{bos}$ . Відповідно маємо розбіжність у випадках:  $N = 2$  при  $n_{bos} = 2$  та  $n_{bos} = 0$ ;  $N = 3$  при  $n_{bos} = 1$ ;  $N = 4$  при  $n_{bos} = 0$ , див. рис. 24.2. При  $N > 4$  всі діаграми є збіжними, але можуть містити розбіжності у піддіаграмах. Отже теорії поля з  $\Omega < 0$  містять лише обмежену кількість діаграм, що розбігаються! Такі теорії називають суперперенормованими.



**Рис. 24.2.** Розбіжні діаграми в теорії з  $\mathcal{L} = -\lambda\phi^3$ .

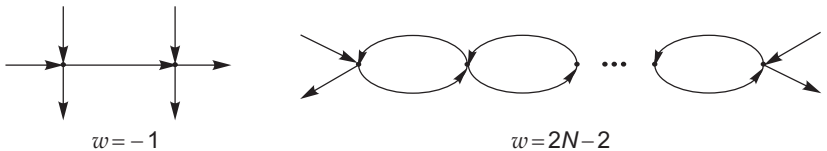
Розглянемо випадок  $\Omega = 0$  на цікавому для нас прикладі КЕД з  $\mathcal{L} = -e\psi\gamma^\mu\psi A_\mu$ . В цьому випадку маємо  $\Omega = 0$ , отже  $w(G) = 4 - n_{bos} - 3n_{ferm}/2$ . Відповідно маємо розбіжність у таких діаграмах з довільною кількістю вершин при  $n_{ferm} = n_{bos} = 0$ ; при  $n_{ferm} = 0$  та  $n_{bos} = 2$ ; при  $n_{ferm} = 2$  та  $n_{bos} = 0$ ; при  $n_{ferm} = 2$ ,  $n_{bos} = 1$ , див. рис. 24.3. Діаграми всіх інших типів (з більшою кількістю зовнішніх

ліній) є збіжними, але можуть містити розбіжності у піддіаграмах. Отже теорії поля з  $\Omega = 0$  містять лише обмежену кількість типів діаграм, що розбігаються і взагалі не містять діаграм з  $w(G) > 0!$  Такі теорії називають перенормованими.



**Рис. 24.3.** Типи розбіжних діаграм в КЕД. Коло – це спрощене позначення діаграми, що містить в собі довільну кількість точок.

Розглянемо випадок  $\Omega > 0$  на прикладі чотириферміонної взаємодії з  $\mathcal{L} = -\lambda\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ . В цьому випадку маємо  $\Omega = 2$ , отже  $w(G) = 2N + 4 - 3n_{ferm}/2$ . В даній теорії існують діаграми, що є збіжними з  $w(G) < 0$ , але існує і нескінченна кількість типів розбіжних діаграм з додатнім, як завгодно великим значенням  $w(G)$ , що вимагають нескінченну кількість контрчленів згідно з (24.6), див. рис. 24.4. Такі теорії називають перенормованими.



**Рис. 24.4.** Приклади діаграм у ферміонній теорії з  $\mathcal{L} = -\lambda\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ . Перша діаграма є збіжною, друга діаграма, в залежності від кількості внутрішніх точок може мати як завгодно велике значення  $W(G)$ .

### Метод розмірного аналізу

Поряд з наведеними вище методом існує більш простий для узагальнення та запам'ятовування метод розмірного аналізу, що визначає перенормовність теорії поля виходячи з розмірності константи зв'язку у лагранжіані взаємодії.

Для початку покажемо як можна визначити розмірність константи

зв'язку. Почнемо з того, що в системі одиниць  $\hbar = c = 1$  дія є безрозмірною величиною  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ , відповідно розмірність лагранжіана  $[\mathcal{L}] = [L]^{-4} = [m]^4$ . Надалі записуватимемо значення розмірності певної величини як значення показника ступеня величини з розмірністю маси, отже  $[\mathcal{L}] = 4$ .

З явного виду лагранжіанів вільних полів визначимо розмірності польових функцій скалярного, векторного та спірного полів відповідно:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2, \quad \text{тобто} \quad [\varphi] = 1, \quad (24.14)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu, \quad \text{тобто} \quad [A_\mu] = 1, \quad (24.15)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad \text{тобто} \quad [\psi] = 3/2, \quad (24.16)$$

де ми врахували, що  $[m] = 1$ ,  $[\partial_\mu] = [\partial^\mu] = 1$ .

Припустимо тепер, що лагранжіан взаємодії містить добуток константи зв'язку  $g$  на  $N_{bos}$  бозонних (скалярних або векторних) функцій,  $N_{fer}$  ферміонних функцій та містить  $\delta$  похідних від польових функцій. Тоді

$$[\mathcal{L}] = [g] + N_{bos} + \frac{3}{2} N_{fer} + \delta = 4,$$

відповідно

$$[g] = 4 - N_{bos} - \frac{3}{2} N_{fer} - \delta = -\Omega, \quad (24.17)$$

де  $\Omega$  було визначено в (24.12), а критерієм перенормовності теорії поля є умова  $[g] \geq 0$  згідно з попереднім розглядом.

Для наступних польових моделей легко визначити, що вони є перенормовними

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= g\varphi^3, & [g] &= 1, \\ \mathcal{L}_{int} &= g\varphi^4, & [g] &= 0, \\ \mathcal{L}_{int} &= g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, & [g] &= 0, \\ \mathcal{L}_{int} &= g\bar{\psi}\psi\varphi, & [g] &= 0. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу, що теорії скалярного поля із взаємодією  $g\varphi^n$  є перенормовними для  $n > 4$ .

### Аналіз перенормовності у просторі-часі довільної розмірності

Розроблений формалізм може бути застосований і для аналізу перенормовності певної теорії поля і в просторі-часі довільної розмірності  $d$ . Умова розмірності константи зв'язку  $[g] \geq 0$  так само означатиме перенормовність теорії.

У нашому випадку розмірність лагранжіана  $[\mathcal{L}] = d$  і з виразів (24.14)–(24.16) легко отримаємо, що розмірність бозонних (скалярних та векторних) полів  $[\varphi] = [A_\mu] = \frac{d-2}{2}$ , а розмірність ферміонних полів  $[\psi] = \frac{d-1}{2}$ . Це означає, наприклад, що у просторі-часі розмірності  $1+1$  ( $d=2$ ) польові функції скалярних та векторних полів безрозмірні, що дозволяє будувати лагранжіани у вигляді поліномів довільної ступені від цих полів. Зазначимо, що лагранжіан КЕД у просторі-часі розмірності  $4+1$  ( $d=5$ ) дає розмірність константи зв'язку  $[g] = -1/2$  і робить теорію неперенормовною.

Наведені у даному розділі критерії перенормовності польових моделей дозволяють відразу відкинути з розгляду цілі класи теорій при побудові розширень стандартної моделі фізики елементарних частинок, або, як у випадку лагранжіана Фермі (взаємодія  $g\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ ), вказують на обмеження застосування моделі в певному діапазоні енергій взаємодіючих частинок.

### Завдання

1. Проведіть аналіз перенормовності теорій поля виходячи з умови збіжності інтегралів не при великих значеннях імпульсів інтегрування, а при імпульсах, що прямують до нуля. Порівняйте отриманий результат зі зробленим у даному розділі критерієм.
2. Проведіть аналіз перенормовності наступних теорій поля із взаємодією  $g\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$  (взаємодія Фермі),  $g\bar{\psi}\psi\partial^\mu A_\mu$ ,  $g\bar{\psi}\partial_\mu\varphi\gamma^\mu\psi$ ,  $gF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , де  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$  (взаємодія полів Янга-Мілса).
3. Розгляньте перенормовність теорії скалярного поля із взаємодією  $g\varphi^n$  у просторі-часі розмірності  $d$ .



## РОЗДІЛ 25

### Структура однопетльових розбіжностей. Контрчлени. $R$ -операція

У попередніх розділах було показано, що розрахунки доданків вищих порядків теорії збурень можуть давати нескінченні величини. При цьому методи регуляризації дозволяють явно виділити скінченну та нескінченні частини у відповідних доданках. У цьому розділі ми розглянемо фізичний зміст виникаючих нескінченних складових.

#### Нейтральне скалярне поле із самодією

Розпочнемо з інтеграла (22.35) у теорії скалярного поля із самодією  $\lambda\varphi^3/3$ . Відповідна діаграма Фейнмана була наведена у розд. 22 і відповідає наступному доданку у розкладі за теорією збурень:

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(2)} &= \hat{N} \frac{(-i\lambda/3)^2}{2!} \sum_{\square} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x') = \\ &= \hat{N}(-i\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\varphi}(x)\overbrace{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')} \hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x') \end{aligned} \quad (25.1)$$

При цьому безпосередньо інтеграл (22.35) відповідає спарюванню

$$I(x, x') = \overbrace{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')} \hat{\varphi}(x') \quad (25.2)$$

Внаслідок однорідності простору-часу функція  $I(x, x')$  буде залежати від різниці координат, тобто  $I(x, x') = I(x - x')$ . Згідно з (0.5) та, наприклад, (23.42), (23.43) матимемо:

$$\begin{aligned} I(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p e^{-ip(x-x')} (-i\pi^2) [I_{sing} + I(p, m)] = \\ &= -i\pi^2 [I_{sing} \delta(x - x') + I_{finite}(x - x')]. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Підставивши (25.3) у (25.1) отримаємо

$$\hat{S}^{(2)} = i\pi^2 \lambda^2 I_{sing} \hat{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x) +$$

$$+(-i\pi^2)(-i\lambda)^2 \hat{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \hat{\varphi}(x) I(x, x') \hat{\varphi}(x'). \quad (25.4)$$

Як бачимо, перший доданок у виразі для  $S^{(2)}$  має структуру першого елемента  $S^{(1)} = i \int \mathcal{L}_{int}(x) dx$  у розкладі  $S$ -матриці за теорією збурень, див. (1.55).

Згадаємо тепер явний вигляд лагранжіана скалярного поля, самодію якого ми розглядаємо:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{3} \varphi^3 \quad (25.5)$$

Очевидно тепер, що перший доданок у (25.4) дає вклад у вигляді масового доданку у лагранжіан взаємодії і, відповідно, має бути віднесений у основну частину лагранжіана, що призведе до зміщення маси кванта скалярного поля

$$m^2 \rightarrow m^2 - 2\pi^2 \lambda^2 I_{sing}. \quad (25.6)$$

### Квантова електродинаміка

Щоб остаточно переконатися, що розбіжності у вищих порядках теорії збурень фізично призводять до зміни параметрів лагранжіану системи, розглянемо вклади однопетльових поправок у КЕД. Це можна зробити, оскільки однопетльові поправки гарно рахуються і є добре дослідженими. Забігаючи наперед, у даному розд. ми наведемо відповідні вирази без доведення.

Однопетльова поправка до електронної лінії представляється у вигляді петлі на діаграмі



Їй відповідає величина  $-i\Sigma$ , де функція  $\Sigma$  має наступний вигляд у імпульсному та, відповідно, координатному просторах, див. (26.28):

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] (4m - \not{p}) + \Sigma_{finite}(p), \quad (25.7)$$

$$\Sigma(x - x') = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] (4m - i \not{\partial}_x) \delta(x - x') + \Sigma_{finite}(x - x'), \quad (25.8)$$

де  $\alpha$  – стала тонкої структури. Зазначимо, що для запису першого доданку однопетльової поправки у координатному просторі ми використали той факт, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p e^{-ip(x-x')} (4m - \not{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p (4m - i \not{\partial}_x) e^{-ip(x-x')} = \\ &= (4m - i \not{\partial}_x) \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p e^{-ip(x-x')} = (4m - i \not{\partial}_x) \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (25.9)$$

Однопетльова поправка до фотонної лінії представляється у вигляді петлі на діаграмі

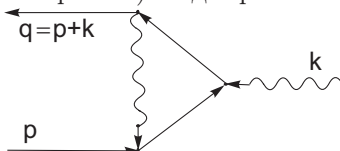


Їй відповідає величина  $i\mathcal{P}$ , де функція  $\mathcal{P}$  має наступний вигляд у імпульсному та координатному просторах, див. (27.15) та (27.27):

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) + \mathcal{P}_{finite}^{\mu\nu}(k), \quad (25.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu\nu}(x - x') &= -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] (g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x - x') + \\ &\quad + \mathcal{P}_{finite}^{\mu\nu}(x - x'). \end{aligned} \quad (25.11)$$

Однопетльова поправка до вершинної функції представляється у вигляді петлі (далі трикутна вершина) на діаграмі

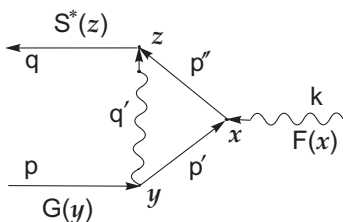


Їй відповідає функція  $\Lambda$ , котра має наступний вигляд у імпульсному та, відповідно, координатному просторах, див. (29.22):

$$\Lambda^\mu(q, p) = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \ln \left[ \frac{M^2}{m^2} \right] + \Lambda_{finite}^\mu(q, p), \quad (25.12)$$

$$\Lambda^\mu(x, y, z) = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \ln \left[ \frac{M^2}{m^2} \right] \frac{\delta(x-y)\delta(x-z)}{(2\pi)^4} + \Lambda_{finite}^\mu(x, y, z). \quad (25.13)$$

Зробимо відступ та доведемо справедливність виразу (25.13). Для цього розглянемо схематичну діаграму, у якій вершинна функція знаходиться всередині іншої діаграми (зовнішні лінії є лініями пропаторів)



Зіставимо даній діаграмі інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz F(x)G(y)S^*(z)\Lambda(x, y, z), \quad (25.14)$$

де  $\Gamma(x, y, z)$  – функція, що відповідає трикутній вершині. Перейдемо до імпульсного простору

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \times \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{\infty} dp'' \int_{-\infty}^{\infty} dq' \times \\ &\times \frac{F(k)e^{-ikx}}{(2\pi)^4} \frac{G(p)e^{-ipy}}{(2\pi)^4} \frac{S^*(q)e^{iqz}}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda(p', p'', q')}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} e^{-ix(p' - p'') + iy(q' + p') - iz(p'' + q')} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{\infty} dp'' \int_{-\infty}^{\infty} dq' \frac{F(k)}{(2\pi)^4} \frac{G(p)}{(2\pi)^4} \frac{S^*(q)}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \frac{\Lambda(p', p'', q')}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} (2\pi)^4 \delta(k + p' - p'') (2\pi)^4 \delta(p - q' - p') (2\pi)^4 \delta(-q + p'' + q') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\delta(k + p - q)}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} F(k)G(p)S^*(q) \int_{-\infty}^{\infty} dq' \Lambda(q - q', p - q', q'), \end{aligned} \quad (25.15)$$

де знак в показнику експоненти залежить від того, входить чи виходить певна лінія з відповідної вершини згідно з правилами діаграмної техніки Фейнмана.

Однак останній інтеграл за  $q'$  є визначенням наведеної вище величини

$\Lambda(q, p)$  (25.12):

$$\Lambda(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq' \Lambda(q - q', p - q', q') = \Lambda_{sing} + \Lambda_{finite}(q, p). \quad (25.16)$$

Відповідно, для сингулярної частини петлі матимемо

$$I_{sing} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\delta(q - k - p)}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} F(k)G(p)S^*(q) \Lambda_{sing}. \quad (25.17)$$

Перевіримо тепер, чи отримаємо ми вираз (25.17) використовуючи сингулярну частину (25.13). Для цього підставимо її до (25.15):

$$\begin{aligned} I_{sing} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz F(x)G(y)S^*(z) \Lambda_{sing} \frac{\delta(x - y)\delta(x - z)}{(2\pi)^4} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{F(k)e^{-ikx}}{(2\pi)^4} \frac{G(p)e^{-ipy}}{(2\pi)^4} \frac{S^*(q)e^{iqz}}{(2\pi)^4} \times \\ &\quad \times \Lambda_{sing} \frac{\delta(x - y)\delta(x - z)}{(2\pi)^4} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq F(k)G(p)S^*(q) \Lambda_{sing} \frac{e^{-i(k+p-q)x}}{(2\pi)^{4 \cdot 4}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\delta(k + p - q)}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} F(k)G(p)S^*(q) \Lambda_{sing}, \quad (25.18) \end{aligned}$$

що й узгоджується з (25.17).

У результаті процедури перенормування, яку ми розглянемо пізніше, буде відкинута сингулярні доданки у розбіжних діаграмах. При цьому явний вигляд перенормованої частини може відрізнитися від виразів для кінцевої частини розбіжних діаграм. Тому, будемо оперувати з наступними виразами для петльових та вершинних поправок у координатному просторі:

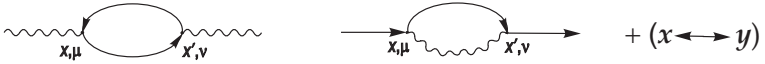
$$\Sigma(x - x') = (am - ib \not{\partial}_x) \delta(x - x') + \Sigma_{ren}(x - x'), \quad (25.19)$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(x - x') = c(g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial^\mu \partial^\nu) \delta(x - x') + \mathcal{P}_{ren}^{\mu\nu}(x - x'), \quad (25.20)$$

$$\Lambda^\mu(x, y, z) = d\gamma^\mu \delta(x - y)\delta(x - z) + \Lambda_{ren}^\mu(x, y, z), \quad (25.21)$$

де позначення *ren* відноситься до перенормованих величин та походить від англ. *renormalization* – перенормування, а параметри  $a, b, c, d$  містять у собі нескінченності.

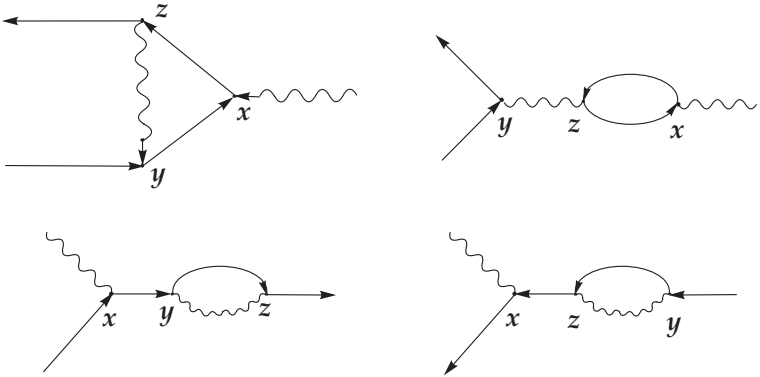
У другому порядку теорії збурень нескінченні внески будуть давати наступні діаграми



Відповідно, можна записати

$$\hat{S}^{(2)} = -i(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(x)(am - ib \not{\partial}_x)\hat{\psi}(x) dx + ic(-ie)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_\mu(x)(g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial^\mu \partial^\nu)\hat{A}_\nu(x) dx + \hat{S}_{ren}^{(2)}. \quad (25.22)$$

У третьому порядку теорії збурень нескінченні внески будуть давати наступні діаграми



Отримаємо для третього порядку  $S$ -матриці

$$\hat{S}^{(3)} = (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{\psi}(z)\hat{A}_\nu(x)\Lambda^\nu(x, y, z)\hat{\psi}(y) +$$

$$\begin{aligned}
& + (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{A}_\nu(x) i \mathcal{P}^{\nu\mu}(x-z) i D_{\mu\lambda}(z-y) \hat{\psi}(y) \gamma^\lambda \hat{\psi}(y) + \\
& + (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{\psi}(z) (-i) \Sigma(z-y) (-i) G(y-x) \gamma^\nu \hat{\psi}(x) \hat{A}_\nu(x) + \\
& + (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{\psi}(x) \gamma^\nu \hat{A}_\nu(x) (-i) G(x-z) (-i) \Sigma(z-y) \hat{\psi}(y) + \dots,
\end{aligned} \tag{25.23}$$

де ми врахували, що множник  $1/3!$  зник з виразів за рахунок всіх можливих розташувань точок  $x, y, z$  на діаграмах. Врахувавши явні вирази для петльових поправок (25.19)–(25.21), отримаємо

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{(3)} = & ie^3 d \int_{-\infty}^{\infty} dx \hat{\psi}(x) \hat{A}_\nu(x) \gamma^\nu \hat{\psi}(x) - \\
& - ie^3 c \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{A}_\nu(x) (g^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha - \partial^\mu \partial^\nu) D_{\mu\lambda}(x-y) \hat{\psi}(y) \gamma^\lambda \hat{\psi}(y) - \\
& - ie^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{\psi}(y) (am - ib \not{\partial}_x) G(y-x) \hat{\psi}(x) \gamma^\nu \hat{A}_\nu(x) - \\
& - ie^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{\psi}(x) \gamma^\nu \hat{A}_\nu(x) G(x-y) (am - ib \not{\partial}_x) \hat{\psi}(x) + S_{ren}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{25.24}$$

Очевидно, що перший доданок з останнього виразу та перших два доданки з (25.22) можна перенести до першого порядку розкладу в ряд за теорією збурень:

$$S^{(1)} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}_{int}(x) \rightarrow i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\mathcal{L}_{int}(x) + \Delta \mathcal{L}(x)), \tag{25.25}$$

де  $\mathcal{L}_{int} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$  – лагранжіан взаємодії квантової електродинаміки, а поправка до нього

$$\Delta\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(ae^2m - ibe^2 \not{\partial}_x)\psi(x) - e^2cA_\mu(x)(g^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) + e^3d\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)A_\nu(x). \quad (25.26)$$

Корисно зазначити, що інтегруванням за частинами густини лагранжіану КЕД можна показати, що

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \equiv -2A_\mu(g^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\alpha - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu, \quad (25.27)$$

відповідно до лагранжіана КЕД необхідно додати доданки

$$\Delta\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x)(ae^2m - ibe^2 \not{\partial}_x)\psi(x) + \frac{ce^2}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + de^3\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)A_\nu(x), \quad (25.28)$$

що ідентичні за структурою усім доданкам лагранжіана КЕД!

Звертаємо увагу, що другий, третій та четвертий доданки з (25.24) можна записати як

$$\begin{aligned} \frac{i^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{T}(\mathcal{L}(x) + \Delta\mathcal{L}(x))(\mathcal{L}(y) + \Delta\mathcal{L}(y)) - \\ - \frac{i^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{T}\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y), \end{aligned} \quad (25.29)$$

де  $\Delta\mathcal{L}$  визначено у (25.28), але без останнього доданку. Справді

$$\begin{aligned} \hat{T}\mathcal{L}(x)\Delta\mathcal{L}(y) &= \hat{T} \left[ \hat{\psi}(x)\gamma^\mu\hat{\psi}(x)\hat{A}_\mu(x)\hat{\psi}(y)(ae^2m - ibe^2 \not{\partial}_y)\hat{\psi}(y) \right] + \dots = \\ &= \hat{N} \left[ \hat{\psi}(x)\gamma^\mu\hat{A}_\mu(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)(ae^2m - ibe^2 \not{\partial}_y)\hat{\psi}(y) \right] + \dots = \\ &= \hat{N} \left[ \hat{\psi}(x)\gamma^\mu\hat{A}_\mu(x)(-i)G(x-y)(ae^2m - ibe^2 \not{\partial}_y)\hat{\psi}(y) \right] + \dots \end{aligned} \quad (25.30)$$

і ми отримали четвертий доданок у (25.24). Звичайно, доданок типу  $\hat{T}\Delta\mathcal{L}(x)\Delta\mathcal{L}(y)$  відсутній у (25.24), оскільки він виникає за наявності у діаграмі Фейнмана двох петель, що може бути лише у четвертому порядку за теорією збурень.

Отже ми приходимо до висновку, що виділення у другому порядку теорії збурень у довільній теорії поля підінтегральних розбіжних внесків типу  $A(x)\delta(x-x')B(x')$ , а у третьому порядку, відповідно, внесків  $\hat{A}(x)\delta(x-x')\hat{B}(x')\delta(x'-x'')\hat{C}(x'')$  є еквівалентним додаванню



до підінтегрального виразу у першому порядку теорії збурень (до лагранжіана) доданків  $A(x)B(x)$  та  $\tilde{A}(x)\tilde{B}(x)\tilde{C}(x)$ . Такого типу доданки називають *контрчленами*. Зазначимо, що контрчлени це функції, котрі залежать лише від однієї координати, тобто вони є локальними. Очевидно також, що петльові розбіжності у вищих порядках теорії збурень будуть давати внески у нижчі порядки за теорією збурень і змінять там коефіцієнти поблизу відповідних діаграм. Отже наявні петльові розбіжності в усіх порядках теорії збурень врешті-решт приведуть до зміни коефіцієнтів у всіх доданках початкового лагранжіана, а у доданки вищих порядків  $S$ -матриці будуть входити параметри модифікованого лагранжіану.

Той факт, що контрчлени додаються до  $\mathcal{L}_{int}$  свідчить про те, що природа цих доданків — взаємодія полів у вищих порядках теорії збурень. Лагранжіан зі зміненими коефіцієнтами слід вважати фізичним, а початковий (стартовий) лагранжіан і його параметри є лише формальними. Більш того, оскільки контрчлени є нескінченними величинами, а після додавання їх до початкового лагранжіану отримується лагранжіан з фізичними параметрами (маси та заряди частинок), то зрозуміло, що параметри початкового лагранжіану самі по собі можуть бути нескінченними, див., наприклад, (25.6).

Оскільки введення контрчленів еквівалентне зміні коефіцієнтів початкового лагранжіану, тобто зміні нормування цих доданків, то процедура позбавлення розбіжностей і отримала назву процедури *перенормування*.

Проілюструємо сказане на прикладі КЕД. Після урахування усіх контрчленів лагранжіан КЕД набуде вигляду

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_2 i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e_0 Z_1 \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - m_0 Z_0 \bar{\psi}\psi, \quad (25.31)$$

де  $Z_i$  — нові коефіцієнти лагранжіану, що містять у собі нескінченності. Щоб позбутися двох з чотирьох нескінченних коефіцієнтів, зробимо заміну змінних

$$\psi' = \sqrt{Z_2}\psi, \quad A'_\mu = \sqrt{Z_3}A_\mu, \quad (25.32)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - e_0 \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}} \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' A'_\mu - m_0 \frac{Z_0}{Z_2} \bar{\psi}'\psi' = \\ &= -\frac{1}{4} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + i\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - e \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' A'_\mu - m \bar{\psi}'\psi'. \end{aligned} \quad (25.33)$$

Зміна нормування польових функцій (25.32) не є принциповою, адже при побудові вторинно квантованої теорії ми самі будемо нормувати функції накладаючи певні фізичні вимоги, наприклад, щоб усереднений за станом оператор енергії системи невзаємодіючих частинок відповідав сумі енергій кожної окремої частинки і т.п. Тоді додавання контрчленів до лагранжіана фізично зводиться до зміни маси  $m = \frac{Z_0}{Z_2} m_0$  та заряду  $e = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} e_0$  частинок шляхом множення на нормуючі множники, цей факт називають *мультиплікативним перенормуванням*. Чотири нескінченних коефіцієнти  $Z_i$  повністю зникають з теорії. Підкреслимо, що фізичні значення маси та заряду частинок це значення саме після врахування усіх контрчленів. Звертаємо увагу на те, що контрчлени залежать від параметрів регуляризації ( $\Lambda$ ,  $\varepsilon$ )

Зазначене можна якісно зрозуміти на прикладі КЕД з наступних міркувань. Згідно квантової теорії поля на малих відстанях (менше комптонівського радіуса частинки) поблизу електрона внаслідок поляризації вакуума за рахунок величезних значень електромагнітних полів знаходяться електрон-позитронні пари, які "окутують" реальну частинку. У наслідок цього маса електрона повинна змінитися. Також повинен змінитися і його заряд, адже пару частинка-античастинка можна представити собі як диполь, що складається з електрона та позитрона. Такі диполі будуть розвернуті до реального електрона стороною з позитивним зарядом. На великих відстанях ми будемо спостерігати звичайний ефект екранування заряду.

Коротко підсумувавши вище сказане, можна схематично записати розклад для  $S$ -матриці у вигляді:

$$S = 1 + i \int d^4x \hat{\mathcal{L}}_{i,int}(e_0, m_0) + S'_{sing}(e_0, m_0), \quad (25.34)$$

де  $S'_{sing}(e_0, m_0) \in S$ -матрицею без перших доданків розкладу та містить у собі всі можливі розбіжності теорії. Виділивши розбіжності у вигляді контрчленів отримаємо лагранжіан теорії з фізичними значеннями параметрів заряду та маси  $e, m$  та скінчений вираз для  $S'$ , що містить лише фізичні параметри  $e, m$ :

$$\begin{aligned} S &= 1 + i \int d^4x [\mathcal{L}_{i,int}(e_0, m_0) + \mathcal{L}_c] + S'_{finite}(e, m) = \\ &= 1 + i \int d^4x \mathcal{L}(e, m) + S'_{finite}(e, m). \end{aligned} \quad (25.35)$$

### Теорія перенормування. Загальний випадок

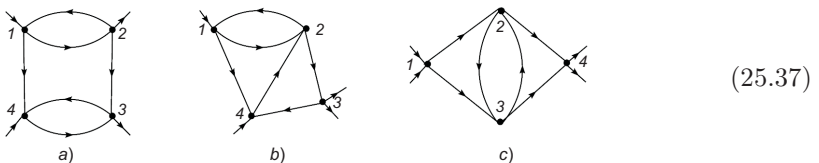
Перейдемо тепер від питання перенормування у КЕД до перенормування в довільній теорії поля [3, 8]. Для початку зазначимо, що процедура позбавлення нескінченних доданків  $S$ -матриці за рахунок введення контрчленів отримала назву  $R$ -операції і була розроблена ще в 50-х роках ХХ століття. Принципово важливою є *теорема Боголюбова-Парасюка*: для довільної перенормованої теорії поля у будь-якому порядку теорії збурень всі розбіжності можна прибрати введенням локальних контрчленів. У всіх перенормованих теоріях контрчлени повторюють доданки початкового лагранжіану.

Може виникнути питання як можна всі розбіжності прибрати за допомогою локальних контрчленів, адже ми бачили на частковому прикладі в КЕД (25.24), що в діаграмах з петлями виникають нелокальні доданки з контрчленами. Відповідь наступна: в загальному випадку для виконання процедури перенормування для кожної діаграми окремо потрібно спочатку відняти розбіжні доданки у розбіжних піддіаграмах, а потім відняти розбіжність самої діаграми, яка повинна бути локальною. Це й буде свідченням того, що розбіжності у піддіаграмах були правильно відкнуті. Запис  $R$ -операції по відношенню до діаграми  $G$  символічно можна записати у вигляді

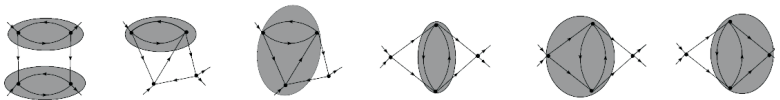
$$RG = \prod_i (1 - M_{\gamma_i})G \quad (25.36)$$

де добуток відбувається по розбіжним піддіаграмам, включаючи і саму діаграму, а  $M_{\gamma_i}$  позначає розбіжну частину піддіаграми  $\gamma_i$ .

Не розглядаючи загальну теорію  $R$ -операції [3], проілюструємо сказане на прикладі трьох багатопетльових діаграм з теорії  $\varphi^4$  [8]:



Для початку виділимо піддіаграми, що є розбіжними:



Наступний крок – коректно записати  $R$ -операцію згідно з (25.36):

$$RG_a = (1 - M_{1234})(1 - M_{34})(1 - M_{12})G_a; \quad (25.38)$$

$$RG_b = (1 - M_{1234})(1 - M_{124})(1 - M_{12})G_b; \quad (25.39)$$

$$RG_c = (1 - M_{1234})(1 - M_{234})(1 - M_{123})(1 - M_{23})G_c, \quad (25.40)$$

де  $M_{i\dots j}$  – видаляє контрчлен піддіаграми, що обмежена точками  $i\dots j$  та зводить точки  $i\dots j$  в одну точку<sup>1</sup>. Звертаємо увагу, що віднімання розбіжностей починається з найбільш простих піддіаграм (однопетльових), потім з більш складних і у самому кінці відбувається віднімання розбіжностей діаграми уцілому.

Розглянемо детально як відбувається перенормування найбільш складної діаграми  $c$ . Оскільки піддіаграми  $M_{123}$ ,  $M_{234}$  містять спільні частини, то, згідно з теорією  $R$ -операції [3], правильно записати<sup>2</sup>

$$RG_c = (1 - M_{1234})(1 - M_{123} - M_{234})(1 - M_{23})G_c. \quad (25.41)$$

Дію оператора  $(1 - M_{23})G_c$  можна графічно представити у вигляді

$$(1 - M_{23}) \left( \text{diagram with vertices } i, j, 2, 4 \right) = \left( \text{diagram with vertices } i, j, 2, 4 \right) - \left( \text{diagram with vertices } i, j, 2, 4 \text{ and a dashed circle around } 2, 3 \right) \quad (25.42)$$

де діаграмі, що обведена пунктиром, відповідає стала  $C$  та значення діаграми при нульових зовнішніх імпульсах (контрчлен)<sup>3</sup>

$$\left( \text{diagram with vertices } i, j, 2, 3 \text{ and a dashed circle around } 2, 3 \right) = \left. \text{diagram with vertices } i, j, 2, 3 \right|_{k=0} + C \quad (25.43)$$

Введення сталої  $C$  не впливає на збіжність діаграм, але дозволяє проводити перенормування не тільки в точці з нульовими імпульсами.

Дію оператора  $(1 - M_{123} - M_{234})(1 - M_{23})G_c$  можна графічно представити у вигляді

<sup>1</sup> Це не дивно, адже всі розбіжні доданки в діаграмах пропорційні  $\delta$ -функціям.

<sup>2</sup> Оскільки  $M_{123}M_{234}(1 - M_{23})G_c = 0$ , то вираз у (25.40) є правильним.

<sup>3</sup> Теорія  $\varphi^4$  є перенормовною, тобто не містить діаграм з  $w(G) > 0$ . Тому для перенормування одного віднімання достатньо.

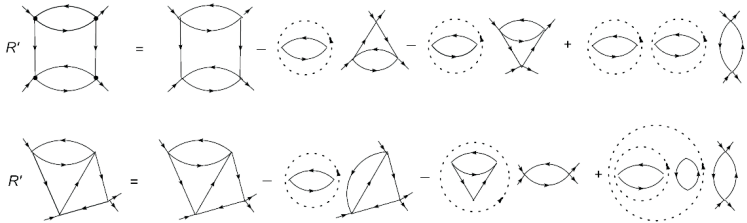
$$\begin{aligned}
 & \left( \text{diag}_1 - \text{diag}_2 - \text{diag}_3 - \text{diag}_4 - \text{diag}_5 - \text{diag}_6 - \text{diag}_7 - \text{diag}_8 - \text{diag}_9 - \text{diag}_{10} - \text{diag}_{11} - \text{diag}_{12} - \text{diag}_{13} - \text{diag}_{14} - \text{diag}_{15} - \text{diag}_{16} - \text{diag}_{17} - \text{diag}_{18} - \text{diag}_{19} - \text{diag}_{20} \right) \quad (25.44)
 \end{aligned}$$

Нарешті дію повного оператора  $R$ , після зведення подібних доданків, можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
 R(G) \left( \text{diag}_1 \right) &= \left( \text{diag}_1 - \text{diag}_2 \right) - \\
 &- \left( \text{diag}_3 - \text{diag}_4 \right) \left( \text{diag}_5 - \text{diag}_6 \right) - \left( \text{diag}_7 - \text{diag}_8 \right) \left( \text{diag}_9 - \text{diag}_{10} \right) - \\
 &- \left( \text{diag}_{11} - \text{diag}_{12} \right) \left( \text{diag}_{13} - \text{diag}_{14} \right) \left( \text{diag}_{15} - \text{diag}_{16} \right) \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

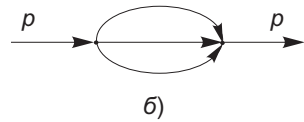
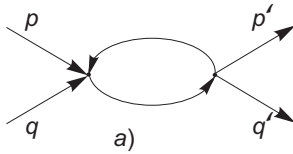
В останньому виразі з усіх розбіжних доданків відкидаються їх контрчлени. Віднімання зводиться до віднімання або безпосередньо контрчленів, або контрчленів, що множаться на гарно визначені множники.

Для прикладу наведемо результат дії  $R'$ -операції ( $R$ -операція без дії першого зліва множника) на діаграми  $a$  та  $b$  (25.37) у графічному вигляді:



## Завдання

1. Перевірте справедливість твердження (25.1).
2. Переконайтеся у справедливості виразу (25.8) за допомогою формалізму, що був використаний для доведення справедливості (25.13).
3. В теорії масивного скалярного поля із взаємодією  $\frac{\lambda}{4}\varphi^4$  знайдіть контрчлени від діаграм скалярної риби (а) та горіха (б)

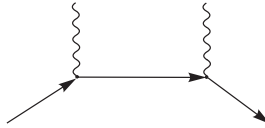


4. Покажіть дію  $R$ -операції на діаграми  $a$  та  $b$  (25.37) у графічному вигляді.

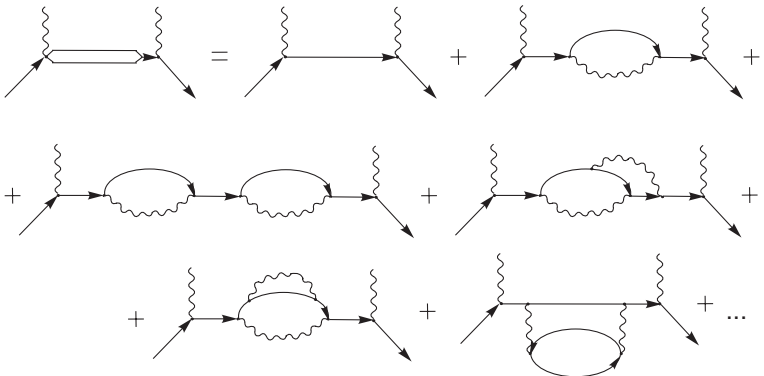
## РОЗДІЛ 26

### Точний електронний пропагатор. Розрахунок в однопетльовому наближенні

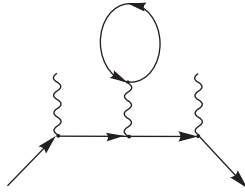
Спробуємо описати процес електрон-фотонного розсіяння враховуючи усі порядки теорії збурень. У першому неznикаючому наближенні (у другому порядку теорії збурень) процес описується діаграмою



У вищих порядках теорії збурень будуть з'являтися діаграми з різноманітними поправками до зовнішніх ліній, до наявних двох вершин у наведеній діаграмі другого порядку, а також до внутрішньої електронної лінії. Всі зазначені поправки отримали назву *радіаційних поправок*. Поправки до зовнішніх ліній та до вершин будуть розглянуті в подальших розділах. В даному розділі ми зупинимось на розгляді поправок до внутрішньої електронної лінії, тобто до електронного пропагатора. Внутрішня електронна лінія з урахуванням всіх можливих до неї поправок у всіх порядках теорії збурень відповідає *точному електронному пропагатору*. Ми позначатимемо її подвійною лінією. Сказане можна графічно проілюструвати включно до діаграм 6-го порядку



Звичайно, ми не враховували внесок діаграми



бо замкнена ферміонна петля відповідає вакуумному середньому від струму  $\langle 0 | \hat{j}^\mu | 0 \rangle$ , а струм входить до  $\hat{S}$ -матриці нормально впорядкованим, відповідно  $\langle 0 | \hat{j}^\mu | 0 \rangle = 0$  і всі діаграми, що містять замкнені на себе ферміонні лінії слід відкинути.

Часто графічно представляють діаграми окремо для точного електронного пропагатора (без зовнішніх ліній)

Розіб'ємо всі діаграми, що дають внесок у повний електронний пропагатор на *компактні* (не можна розділити на дві окремі діаграми розрізавши одну з електронних ліній) та *некомпактні* діаграми (всі інші). Позначимо вираз для суми усіх компактних частин діаграм (без крайніх електронних пропагаторів) як  $-i\Sigma(p)$ , повний електронний пропагатор як  $-i\mathcal{G}(p)$ , а звичайний електронний пропагатор позначаємо як  $-iG(p)$ . Тоді на графічному рівні матимемо



або на матричному рівні у імпульсному просторі

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= G - G \Sigma G + G \Sigma G \Sigma G - G \Sigma G \Sigma G \Sigma G + \dots = \\ &= G(1 - \Sigma G + \Sigma G \Sigma G - \Sigma G \Sigma G \Sigma G + \dots) = G \frac{1}{1 + \Sigma G} = \\ &= (G^{-1})^{-1}(1 + \Sigma G)^{-1} = /(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}/ = \frac{1}{G^{-1} + \Sigma}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

Враховуючи явний вигляд електронного пропагатора  $G(p)$  (4.14), легко отримати

$$G^{-1}(p) = m - \not{p}, \quad (26.3)$$

відповідно

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{m + \Sigma(p) - \not{p} - i\varepsilon}. \quad (26.4)$$

Як бачимо, величина  $\Sigma$  входить у вираз для точного електронного пропагатора як добавка до маси<sup>1</sup>, саме тому величину  $\Sigma$  називають *масовим оператором*. В літературі його також називають *власною енергією електрона*.

З виразу для суми діаграм (26.2) можна отримати ще одне корисне співвідношення, а саме записавши його у вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= G - G \Sigma G + G \Sigma G \Sigma G - G \Sigma G \Sigma G \Sigma G + \dots = \\ &= G - G \Sigma (G - G \Sigma G + G \Sigma G \Sigma G - G \Sigma G \Sigma G \Sigma G + \dots), \end{aligned} \quad (26.5)$$

отримаємо *рівняння Дайсона для електронного пропагатора*<sup>2</sup>:

$$\mathcal{G}(p) = G(p) - G(p) \Sigma(p) \mathcal{G}(p). \quad (26.6)$$

Дане рівняння можна зводиться до (26.2), якщо з лівого боку його помножити на  $G^{-1}(p)$ , а з правого боку на  $\mathcal{G}^{-1}(p)$ :

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) + \Sigma(p). \quad (26.7)$$

<sup>1</sup> Насправді, як побачимо далі,  $\Sigma(p)$  буде змінювати коефіцієнт як поблизу маси так і поблизу 4-імпульсу у виразі для електронного пропагатора (26.3).

<sup>2</sup> Добуток величин у цьому виразі є добутком матриць (не тензорів)  $4 \times 4$ , типу згорток 4-векторів з  $\gamma$ -матрицями. Поняття верхніх (нижніх) індексів є формальним.

В даному місці доречно зазначити, що незважаючи на те, що для повного розрахунку точного електронного пропагатора слід врахувати внесок від нескінченного числа діаграм, математичне визначення точного електронного пропагатора можна зробити надзвичайно простим та красивим. Нагадаємо для цього, що звичайний (без врахування радіаційних поправок) електронний пропагатор визначається згідно з (3.27)

$$-iG_{\alpha\beta}(x-x') = \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta} | 0 \rangle, \quad (26.8)$$

де вторинноквантовані функції ферміонного поля записані у представленні взаємодії. Виявляється, що вираз для точного електронного пропагатора можна зробити ідентичним щойно наведеному виразу, якщо вторинноквантовані функції ферміонного поля задати у представленні Гайзенберга

$$-iG_{\alpha\beta}(x-x') = \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_{H,\alpha} \hat{\Psi}'_{H,\beta} | 0 \rangle. \quad (26.9)$$

Щоб довести дане твердження слід встановити зв'язок між операторами в представленні Гайзенберга та в представленні взаємодії. Зробимо природне припущення, що в момент часу  $t_0 \rightarrow -\infty$  у фізичній системі взаємодія була відсутня (див. розд. 1), тоді в цей час представлення Гайзенберга, Шредінгера та взаємодії були тотожними. У певний фіксований момент часу  $t$  стан системи в представленні взаємодії задається виразом (1.8):

$$\Phi_I(t) = \hat{U}(t, t_0) \Phi(t_0) = \hat{U}(t, t_0) \Phi_H, \quad (26.10)$$

де  $\hat{U}(t, t_0)$  – оператор еволюції системи (1.19). Середнє значення операторів знаходиться як

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \langle \Phi_I(t) | \hat{Q}_I(t) | \Phi_I(t) \rangle = \langle \Phi_H | \hat{U}^+(t, t_0) \hat{Q}_I(t) \hat{U}(t, t_0) | \Phi_H \rangle = \\ &= / (1.20) / = \langle \Phi_H | \hat{U}(t_0, t) \hat{Q}_I(t) \hat{U}(t, t_0) | \Phi_H \rangle. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Отже зв'язок між операторами має вигляд

$$\hat{Q}_H(t) = \hat{U}(-\infty, t) \hat{Q}_I(t) \hat{U}(t, -\infty). \quad (26.12)$$

Розглянемо тепер вираз (26.9) для випадку  $t > t'$ :

$$\begin{aligned} -iG_{\alpha\beta}(x-x') &= \langle 0 | \hat{\Psi}_{H,\alpha} \hat{\Psi}'_{H,\beta} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{U}(-\infty, t) \hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{U}(t, -\infty) \hat{U}(-\infty, t') \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{U}(t', -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (26.13)$$

Використавши властивості оператора еволюції (1.20)

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, -\infty)\hat{U}(-\infty, t') &= \hat{U}(t, t'), \\ \hat{U}(-\infty, t) &= \hat{U}(-\infty, \infty)\hat{U}(\infty, t) = \hat{U}^{-1}(\infty, -\infty)\hat{U}(\infty, t),\end{aligned}$$

можна записати

$$-i\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | \hat{U}^{-1}(\infty, -\infty) \hat{U}(\infty, t) \hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{U}(t, t') \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{U}(t', -\infty) | 0 \rangle. \quad (26.14)$$

Використаємо оператор хронологічного впорядкування, щоб мати можливість переставити доданки в потрібному нам порядку — це справді можна робити, оскільки оператор хронологічного впорядкування потім розставить доданки так як потрібно:

$$\begin{aligned}-i\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') &= \langle 0 | \hat{U}^{-1}(\infty, -\infty) \hat{T}[\hat{U}(\infty, t) \hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{U}(t, t') \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{U}(t', -\infty)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{U}^{-1}(\infty, -\infty) \hat{T}[\hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{U}(\infty, t) \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', -\infty)] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \hat{U}^{-1}(\infty, -\infty) \hat{T}[\hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{U}(\infty, -\infty)] | 0 \rangle = \\ &= / \hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty), (1.21) / = \langle 0 | \hat{S}^{-1} \hat{T}[\hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{S}] | 0 \rangle. \quad (26.15)\end{aligned}$$

Даний вираз залишиться справедливим і при розгляді ситуації, коли  $t' > t$ .

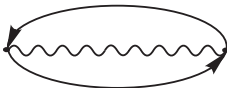
Згадаємо, що згідно з (1.1)  $\Phi(t = \infty) = \hat{S}\Phi(t = -\infty)$ , де  $\Phi$  стан системи. Нехай  $\Phi(t = -\infty)$  буде вакуумний стан  $|0\rangle$ , тоді він буде тотожним вакуумному стану в представленні Гайзенберга. З іншої сторони вакуумний стан є стаціонарним станом, у якому не можливі процеси народження та знищення частинок без зовнішнього впливу. Відповідно з часом вакуумний стан залишиться вакуумним станом і може відрізнитися від початкового вакуумного стану лише на фазовий множник:  $\Phi(t = +\infty) = e^{i\alpha}|0\rangle$ . З іншого боку  $\hat{S}\Phi(t = -\infty) = \hat{S}|0\rangle = \Phi(t = +\infty) = e^{i\alpha}|0\rangle$ , звідки  $e^{i\alpha} = \langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle$  та  $\hat{S}|0\rangle = \langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle | 0 \rangle$ . Проведемо ермітове спряження останнього виразу та отримаємо  $\langle 0 | \hat{S}^+ = \langle 0 | \langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle^+$ , або

$$\langle 0 | \hat{S}^{-1} = \langle 0 | \langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle^{-1}. \quad (26.16)$$



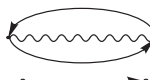
З урахуванням (26.16) вираз для точного електронного пропагатора набуде вигляду:

$$-i\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') = \frac{\langle 0 | \hat{T}[\hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta} \hat{S}] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}. \quad (26.17)$$

Вираз у знаменнику відповідає всім діаграмам Фейнмана, що не містять зовнішніх ліній (інакше усереднення за вакуумом дасть нуль), а саме:

знаменник:  $1 +$    $+ \dots$

Чисельник являє собою добуток під знаком хронологічного впорядкування елементів  $\hat{S}$ -матриці (див. схематичний розклад  $\hat{S}$ -матриці в ряд за допомогою діаграм Фейнмана в розд.5) на оператори ферміонних функцій  $\hat{\Psi}_{I,\alpha} \hat{\Psi}'_{I,\beta}$ . Згідно з другою теоремою Віка (5.3) зазначені оператори ферміонних функцій можуть бути спарені з відповідними двома вільними ферміонними кінцями діаграм Фейнмана у довільному порядку теорії збурень. Спарені таким чином вільні кінці діаграми відповідатимуть ферміонним пропэгаторам. Якщо при цьому діаграма Фейнмана не міститиме інших вільних кінців, то така конструкція при усередненні за вакуумом даватиме ненульовий внесок. Якщо ж зазначені ферміонні оператори будуть спарені між собою утворюючи пропэгатори, то ненульовий внесок даватимуть ті доданки  $\hat{S}$ -матриці, що не містять зовнішніх ліній. Наприклад, в перших порядках теорії збурень (нульовий та другий доданок розкладу  $\hat{S}$ -матриці) внесок у чисельник даватимуть діаграми:

чисельник:   $+$    $+$  

де останні діаграми являють собою добуток виразів, що відповідають вакуумній діаграмі та пропэгатора. Наведені діаграми можна записати як

чисельник:   $\left( 1 + \text{loop} \right) + \text{propagator}$

Таким чином, з точністю до  $e^2$  матимемо для повного електронного пропэгатора<sup>1</sup>

$$-i\mathcal{G} = \text{propagator} + \text{loop-propagator}$$

<sup>1</sup>Зовнішнім точкам не відповідає стала зв'язку  $e$ , оскільки вони відповідають спаренням функцій  $\hat{\Psi}_{I,\alpha}$  та  $\hat{\Psi}'_{I,\beta}$ , що входять у (26.17) без домноження на  $e$ .

що й потрібно було довести. Розглядаючи внески вищих порядків у чисельник та знаменник виразу (26.17), отримуємо розклад для повного електронного пропагатора у формі (26.1).

Повернемося тепер до питання безпосереднього розрахунку масового оператора. Для його прямого розрахунку необхідно розрахувати нескінченну суму наступних частин компактних діаграм

$$-i\Sigma_{\alpha\beta} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \quad (25.18)$$

Звичайно таку нескінченну суму діаграм неможливо явно розрахувати. Її рахують лише в першому незникаючому наближенні, а саме масовому оператору зіставляється лише перший доданок

$$-i\Sigma = \text{diagram 1}$$

Таке наближення називають однопетльовим. Оскільки йому відповідають лише діаграми з двома вершинами, то  $\Sigma \sim \alpha$ , де  $\alpha$  – стала тонкої структури. Зрозуміло, що наступне, двопетльове наближення, дасть поправку  $\sim \alpha^2$  і т.д. Оскільки масовий оператор розраховуватиметься наближено, то отриманий за його допомогою електронний пропагатор називають не точним, а *покращеним пропагатором*.

Для запису виразу для масового оператора використаємо наступні допоміжні діаграми (без зовнішніх ліній) та їх математичні записи в однопетльовому наближенні:

$$-iG(p) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

$$= (2\pi)^4 \left[ (-i)G(p) + (-i)G(p) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie)^2 \gamma^\nu (-i)G(p-k) \gamma^\mu (+i)D_{\nu\mu}^0(k) \right\} (-i)G(p) + (-i)G(p) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie)^2 \gamma^\nu (-i)G(p-k) \gamma^\mu (+i)D_{\nu\mu}^0(k) \right\} (-i)G(p) \times \dots \right]$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} (-ie)^2 \gamma^\sigma (-i) G(p - k') \gamma^\delta (+i) D_{\sigma\delta}^0(k') \right\} (-i) G(p) + \dots \Bigg], \quad (26.19)$$

де ми навмисно штучно винесли загальний множник діаграми другого порядку електрон-фотонного розсіяння  $(2\pi)^4$  для того, щоб при розгляді фізичних процесів ми могли коректно замінити внутрішню лінію електронного пропатора на лінію покращеного електронного пропатора без зміни правил діаграмної техніки Фейнмана. При цьому для другого та третього доданку загальний множник відповідної діаграми  $(2\pi)^{4(n-k)}$  (9.1) знаходиться у правильному ступеню, а саме  $(2\pi)^0$  та  $(2\pi)^{-4}$ . Відповідно, вираз у фігурних дужках можна зіставити масовому оператору

$$\Sigma(p) = -i \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \gamma^\nu G(p - k) \gamma^\mu D_{\nu\mu}^0(k). \quad (26.20)$$

Оскільки масовий оператор не є калібрувально інваріантним внаслідок наявності фотонного пропатора, а наведений інтеграл окрім ультрафіолетової має також і інфрачервону розбіжність, то в якості фотонного пропатора ми будемо використовувати вираз (Д4.5.14) у довільному калібруванні, де вважатимемо електромагнітне поле масивним з масою  $m_A$ . У кінцевій відповіді, звичайно, параметр  $m_A$  слід буде спрямувати до нуля. Отримаємо

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{\gamma^\nu (m + (\not{p} - \not{k})) \gamma_\nu}{(m^2 - (p - k)^2)(m_A^2 - k^2)} + \\ &+ (1 - \xi) \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{\not{k} (m + (\not{p} - \not{k})) \not{k}}{(m^2 - (p - k)^2)(m_A^2 - k^2)(\xi m_A^2 - k^2)} = \\ &= \Sigma^a(p) + (1 - \xi) \Sigma^b(p), \quad (26.21) \end{aligned}$$

де ми виділили у масовому операторі частину, що не залежить від калібрування ( $\Sigma^a$ ) та частину, що залежить від калібрування ( $\Sigma^b$ ).

### Масовий оператор у калібруванні Фейнмана

Для початку розрахуємо вираз для масового оператора у калібруванні Фейнмана ( $\xi = 1$ ) за допомогою  $\alpha$ -представлення. У цьому

випадку масовий оператор  $\Sigma(\xi = 1) = \Sigma^a$ . Запишемо знаменник виразу згідно з (22.2) як

$$\frac{1}{m_A^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha' e^{i\alpha'(k^2 - m_A^2 + i\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{m^2 - (p - k)^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\beta e^{i\beta((p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}.$$

та проінтегруємо за 4-імпульсом  $k$  згідно з (22.4), (22.5). Отримаємо

$$\Sigma^a(p) = \frac{e^2 \pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\alpha' \int_0^\infty d\beta \frac{\gamma^\nu \left( m + \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta} \not{p} \right) \gamma_\nu}{(\alpha' + \beta)^2} e^{i \frac{\alpha' \beta}{\alpha' + \beta} p^2 - i(m_A^2 \alpha' + m^2 \beta)}. \quad (26.22)$$

Використавши співвідношення (14.5) та (14.12), отримаємо

$$\gamma^\nu \left( m + \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta} \not{p} \right) \gamma_\nu = 2 \left( 2m - \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta} \not{p} \right).$$

Наступний крок – заміна змінних:  $\alpha' = xR$ ,  $\beta = yR$  за додаткової умови  $x + y = 1$ , див. (22.9) – (22.11). Якобіан переходу  $I = R$ , відповідно

$$\Sigma^a(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{dR}{R} (2m - x \not{p}) e^{iR[(p^2 x(1-x) - m_A^2 x - m^2(1-x))]}, \quad (26.23)$$

де ми використали, що  $\alpha = e^2/(4\pi)$  – стала тонкої структури.

Інтеграл у (26.23) є розбіжним на нижній межі, див. (22.17), і потребує регуляризації, яка виконується наступним чином:

$$e^{iR[(p^2 x(1-x) - m_A^2 x - m^2(1-x))]} \rightarrow e^{iR[(p^2 x(1-x) - m_A^2 x - m^2(1-x))]} \_$$

$$- e^{iR[(p^2 x(1-x) - \Lambda^2 x - m^2(1-x))]} \Big|_{\Lambda \rightarrow \infty} = e^{iR[(p^2 x(1-x) - m_A^2 x - m^2(1-x))]} \_ e^{-iR\Lambda^2 x}. \quad (26.24)$$

Зрозуміло, що інтеграл від швидкоосцилюючої функції (при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) дорівнюватиме нулю і тому ми справді можемо провести таку заміну

експоненти. Окрім того, дана регуляризація є подібною до регуляризації Паулі-Віларса, оскільки відповідає заміні пропагатора електромагнітного поля на різницю пропагаторів з масою поля  $m_A$  та  $\Lambda$ .

Використавши співвідношення (23.18), отримаємо

$$\Sigma^a(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx (2m - x \not{x}) \ln \frac{\Lambda^2 x}{m^2(1-x) + m_A^2 x - p^2 x(1-x)}. \quad (26.25)$$

Проаналізуємо отриманий вираз. Нехай  $p^2 < (m + m_A)^2$ , тоді

$$m^2(1-x) + m_A^2 x - p^2 x(1-x) > [(1-x)m - xm_A]^2 \geq 0$$

і під знаком логарифма буде величина більша, або рівна нулю. Нехай  $p^2 < m^2$ , тоді

$$m^2(1-x) + m_A^2 x - p^2 x(1-x) > (1-x)^2 m^2 + xm_A^2 > 0$$

і під знаком логарифма буде величина більша за нуль. Нехай  $p^2 > (m + m_A)^2$ , тоді

$$m^2(1-x) + m_A^2 x - p^2 x(1-x) < 0$$

і масовий оператор буде мати як дійсну, так і уявну частину. Фізично умова  $p^2 > (m + m_A)^2$  означає, що значення 4-імпульсу віртуального електрона  $p$  буде таким, що дозволить йому народити нові частинки – електрон та фотон.

Розглянемо поки найпростіший випадок<sup>1</sup>, коли  $p^2 < m^2$  і логарифм підінтегрального виразу (26.25) не міститиме особливостей навіть при  $m_A = 0$ . Тому поки будемо проводити розрахунок при нульовому  $m_A$ .

Для розрахунку масового оператора  $\Sigma^a(p)$  виділимо 4 окремих інтеграла:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\alpha} \Sigma^a(p) &= 2m \left[ \int_0^1 dx \ln \Lambda^2 x - \int_0^1 dx \ln [m^2(1-x) - p^2 x(1-x)] \right] - \\ &- \not{x} \left[ \int_0^1 dx x \ln \Lambda^2 x - \int_0^1 dx x \ln [m^2(1-x) - p^2 x(1-x)] \right] = \\ &= 2m[I_1 - I_2] - \not{x}[I_3 - I_4], \quad (26.26) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Випадок  $p^2 > m^2$  буде розглянуто пізніше.



які можна розрахувати шляхом інтегрування за частинами:

$$\begin{aligned} I_1 &= -1 + \ln \Lambda^2, & I_3 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \Lambda^2, \\ I_2 &= -2 + \ln m^2 + \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \ln \left[1 - \frac{p^2}{m^2}\right], \\ I_4 &= \frac{1}{2} \left\{ -2 - \frac{m^2}{p^2} + \ln m^2 + \left(1 - \frac{m^4}{(p^2)^2}\right) \ln \left[1 - \frac{p^2}{m^2}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (26.27)$$

Остаточно отримаємо для масового оператора наступний вираз

$$\begin{aligned} \Sigma^a(p, \Lambda \rightarrow \infty, m_A = 0) &= \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \left(2m - \frac{\not{p}}{2}\right) \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \right. \\ &+ 2m \left[ 1 + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right] - \frac{\not{p}}{2} \left[ \frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (26.28)$$

що містить у собі нескінченний доданок  $\sim \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}$ .

### Перенормування покращеного електронного пропагатора

Зараз ми вперше проведемо процедуру перенормування виходячи з принципу, що після врахування вкладів у вищих порядках теорії збурень маси, заряди частинок та всеможливі константи зв'язку у взаємодії частинок між собою повинні приймати фізичноспостережувані значення. Зазначимо, що під масами частинок розуміють їх маси спокою, а заряди частинок визначаються по взаємодії при низьких, нерелятивістських значеннях енергій частинок – тобто як у добре експериментально відомому класичному випадку.

У цьому сенсі корисно зазначити властивість пропагатора довільного поля мати полюс у точці, коли квадрат переданого імпульсу ( $p$ ) дорівнює квадрату маси частинки поля ( $m$ ). З фізичної точки зору це обумовлено тим, що для двох частин довільної діаграми, з'єднаних одним пропагатором, в точці  $p^2 = m^2$  можливий розрив цієї внутрішньої лінії і народження нових частинок поля. Математичне доведення цього твердження наведено в кінці розд. 12.

Для кращого засвоєння теми наведемо розгляд декількох підходів до перенормування на прикладі покращеного електронного пропагатора. Повний розгляд теорії перенормувань буде наведено в розд. 35.

### Підхід 1. Маса та заряд відразу мають фізичні значення

Будемо вважати, що параметри мас та зарядів частинок, які входять до початкового лагранжіана КЕД мають свої фізичні значення  $m_e$  та  $e$ . Отже для розрахованого нами покращеного електронного пропагатора (26.4) матимемо

$$\mathcal{G}(p) = [m_e + \Sigma(p, m_e, e) - \not{p}]^{-1}, \quad (26.29)$$

де  $\Sigma(p, m_e, e)$  містить нескінченну частину, див. (26.28). Однак наявність нескінченних внесків від вищих порядків теорії збурень повинна привести до зміни значень мас та зарядів частинок, а також норм польових функцій у початковому лагранжіані згідно з розд. 25. Щоб у кінцевому результаті маси та заряди частинок знову мали свої фізичні значення, ми зобов'язані додати до початкового лагранжіану доданки, які б скомпенсували внесок контрчленів від вищих порядків теорії збурень<sup>1</sup>, див. детальніше розділ 35.

Такі доданки не будуть впливати на всі ті величини, що описують взаємодію реальних електронів та фотонів та були розраховані за допомогою початкового лагранжіану (напр., масовий оператор), але вони будуть змінювати характеристики вільних частинок. З явного вигляду (26.29) зрозуміло, що у покращеному електронному пропагаторі контрчлени можуть змінювати лише коефіцієнти поблизу маси та імпульсу, але не будуть впливати на масовий оператор. Отже нам необхідні додаткові доданки, що змінять початковий лагранжіан наступним чином

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e)\psi \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e)\psi + \\ + ai\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - bm_e\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi(1+a) - m_e(1+b)\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (26.30)$$

що приведе до наступних змін у покращеному пропагаторі:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{(1+b)m_e + \Sigma(p, m_e, e) - (1+a)\not{p}}, \quad (26.31)$$

де ми врахували, що зміна коефіцієнта у доданку лагранжіану з похідною призведе до зміни коефіцієнта поблизу імпульсу у імпульсному

<sup>1</sup>Іншими словами кінцевий вираз (25.35)  $S = 1 + i \int d^4x \mathcal{L}(e, m) + S'_{finite}(e, m)$  ми представляємо у вигляді  $S = 1 + i \int d^4x [\mathcal{L}(e, m) - \mathcal{L}_c] + [i \int d^4x [\mathcal{L}_c + S'_{finite}(e, m)]]$ , що й являє собою наш стартовий вираз  $S = 1 + i \int d^4x [\mathcal{L}(e, m) - \mathcal{L}_c] + S'_{sing}(e, m)$ .

просторі. Для спрощення записів далі ми будемо писати  $\Sigma(p)$  замість  $\Sigma(p, m_e, e)$ .

Наступний крок – визначити коефіцієнти  $a$  та  $b$  таким чином, щоб фізичні значення маси та заряду електрона не змінилися. Перша умова – маса електрона повинна дорівнювати  $m_e$ . Математично ця умова реалізується як вимога для пропагатора мати полюс у точці  $p^2 = m_e^2$ . Враховуючи, що для звичайного пропагатора справедливо

$$G(p) = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2} = \frac{1}{m - \not{p}}, \quad (26.32)$$

як нібито  $\not{p}$  не є матрицею, будемо формально вважати  $\not{p}$  скалярною змінною та вважатимемо, що покращений пропагатор є функцією лише від змінної  $\not{p}$ , бо величину  $p^2$  можна записати як  $\not{p}^2$ . Тоді він повинен мати полюс у точці<sup>1</sup>  $\not{p} = m_e$ :

$$\mathcal{G}^{-1}(\not{p} = m_e) = \Sigma(\not{p} = m_e) - (a - b)m_e = 0. \quad (26.33)$$

Виконання цієї умови автоматично забезпечує наступну поведінку покращеного пропагатора:

$$\mathcal{G}(\not{p} \rightarrow m_e) = \frac{Z_2}{m_e - \not{p}}, \quad (26.34)$$

де  $Z_2$  – довільна стала. Тоді при описі електрон-фотонної взаємодії, коли звичайний електронний пропагатор замінимо на покращений, ми отримаємо при  $\not{p} \rightarrow m_e$ , що амплітуда процесу буде пропорційною не  $e^2$ , а  $Z_2 e^2$ , а це рівнозначно зміні значення заряду електрона або норми польових функцій. Вимагаючи збереження фізичного значення заряду електрона та незмінності норми польових функцій, вважатимемо другою умовою  $Z_2 = 1$  при  $\not{p} \rightarrow m_e$ .

Запишемо розклад оберненої матриці покращеного електронного пропагатора у ряд Тейлора відносно точки  $\not{p} = m_e$ :

$$\mathcal{G}^{-1}(\not{p}) = \mathcal{G}^{-1}(m_e) + \left. \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p} = m_e} (\not{p} - m_e) + \dots, \quad (26.35)$$

де перший доданок дорівнює нулю згідно з умовою (26.33), а

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}^{-1}}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p} = m_e} = \left. \frac{\partial}{\partial \not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p} = m_e} - (a + 1). \quad (26.36)$$

---

<sup>1</sup>Звичайно, це є формальним прийомом. Матриця  $\not{p} = \gamma^\nu p_\nu$  не є діагональною і не може дорівнювати  $I m$ , де  $I$  – одинична матриця.

Тоді в околі точки  $\not{p} = m_e$  матимемо

$$\mathcal{G}(\not{p} \rightarrow m_e) = \frac{Z_2}{m_e - \not{p}} = \frac{1}{a + 1 - \Sigma'(m_e)} \cdot \frac{1}{m_e - \not{p}}, \quad (26.37)$$

звідки

$$Z_2^{-1} = a + 1 - \Sigma'(m_e), \quad (26.38)$$

де ми позначили позначили похідну від масового оператора за  $\not{p}$  в точці  $\not{p} = m_e$  як  $\Sigma'(m_e)$ . З умов (26.33) та  $Z_2 = 1$  знаходимо

$$a = \Sigma'(m_e), \quad bm_e = m_e \Sigma'(m_e) - \Sigma(m_e). \quad (26.39)$$

Тоді вираз (26.31) набуде вигляду

$$\mathcal{G}^{-1}(\not{p}) = m_e - \not{p} + [\Sigma(\not{p}) - \Sigma(m_e) - \Sigma'(m_e)(\not{p} - m_e)]. \quad (26.40)$$

Позначимо вираз у квадратних дужках як

$$\Sigma_R(\not{p}) = \Sigma(\not{p}) - \Sigma(m_e) - \Sigma'(m_e)(\not{p} - m_e). \quad (26.41)$$

З явного вигляду масового оператора (26.28) випливає, що віднімання від нього зазначених доданків знищить у ньому розбіжний доданок  $\sim \ln \Lambda^2/m^2$ , тобто  $\Sigma_R(p)$  і є перенормованим масовим оператором, а нескінченності містилися у  $\Sigma(m_e)$  та  $\Sigma'(m_e)$ . Як бачимо, у цьому випадку перенормування полягає у відніманні перших двох доданків розкладу масового оператора у ряд Тейлора відносно точки  $\not{p} = m_e$ . При цьому з явного вигляду (26.41) випливає, що перенормована величина  $\Sigma_R(p)$  має наступні властивості:

$$\Sigma_R(m_e) = 0, \quad \Sigma'_R(m_e) = 0. \quad (26.42)$$

Отже перенормований покращений електронний пропагатор має вигляд

$$\mathcal{G}_R(\not{p}) = \frac{1}{m_e + \Sigma_R(\not{p}) - \not{p} - i\varepsilon}. \quad (26.43)$$

Слід зазначити, що даний підхід до перенормування має також назву *перенормування на ходу*.

Цікаво тепер подивитися на явний вигляд лагранжіана (26.30) з додатковими доданками:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1+a) - m_e(1+b)\bar{\psi}\psi = /(\mathbf{26.39})/ = \\ &= \bar{\psi} \left( i\gamma^\mu\partial_\mu - m_e \left[ 1 - \frac{\Sigma(m_e)}{m_e} \frac{1}{1 + \Sigma'(m_e)} \right] \right) \psi \cdot (1 + \Sigma'(m_e)) \quad (\mathbf{26.44}) \end{aligned}$$

з якого видно як модифікується маса електрона та норма польових функцій спірного поля.

### Підхід 2. Початкове значення маси не є фізичним

Нехай у початковий лагранжіан КЕД входять не фізичні значення маси ( $m_0$ ) та заряду ( $e_0$ ) електрона. Тоді для розрахованого нами покращеного електронного пропагатора ( $\mathbf{26.4}$ ) матимемо

$$\mathcal{G}(\not{p}) = \frac{1}{m_0 + \Sigma(\not{p}) - \not{p}}. \quad (\mathbf{26.45})$$

Вираз для  $\Sigma(\not{p})$  містить нескінченну частину, див. ( $\mathbf{26.28}$ ), а також фізичні значення маси та заряду електрона як і у попередньому випадку. Це пов'язано з тим, що нескінченності від розбіжних діаграм, які ми тут явно виділемо, відповідним чином модифікуватимуть лагранжіан взаємодії у всіх порядках теорії збурень, див. розділ 25.

У попередньому підході ми вводили до лагранжіану два контрчлени з невідомими коефіцієнтами  $a$  та  $b$ , див. ( $\mathbf{26.30}$ ), та накладали дві фізичні умови для їх визначення. У підході, що зараз розглядається, нескінченні контрчлени містяться у неперенормованому масовому операторі, перейдуть у початковий лагранжіан і будуть анульовані перевизначенням параметрів  $m_0$ ,  $e_0$  та норм польових функцій.

Запишемо перші два доданки розкладу масового оператора у ряд Тейлора відносно точки  $\not{p} = m_e$ :

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(m_e) + \Sigma'(m_e)(\not{p} - m_e) + \tilde{\Sigma}(\not{p}), \quad (\mathbf{26.46})$$

де  $\tilde{\Sigma}(\not{p})$  розкладається в ряд Тейлора починаючи з доданку, що пропорційний  $\sim (\not{p} - m_e)^2$ .

З умови, щоб полюс пропагатора був у точці  $\not{p} = m_e$  отримуємо:

$$\mathcal{G}^{-1}(\not{p} = m_e) = m_0 + \Sigma(m_e) - m_e = 0. \quad (\mathbf{26.47})$$

Тобто значення початкової маси частинки зсувається на величину

$$m_e = m_0 + \delta m, \quad \delta m = \Sigma(m_e). \quad (\mathbf{26.48})$$

Шляхом перевизначення маси ми прибрали один з нескінченних доданків масового оператора, а саме  $\Sigma(m_e)$ . Тоді, покращений електронний пропaгатор отримає вигляд

$$\mathcal{G}^{-1}(\not{p}) = m_e + \Sigma'(m_e)(\not{p} - m_e) + \tilde{\Sigma}(\not{p}) - \not{p} \quad (26.49)$$

і, як ми знаємо з попереднього підходу до перенормування, містить ще одну нескінченну величину,  $\Sigma'(m_e)$ .

Фіксація полюсу пропaгатора призводить до того, що в околі значення  $\not{p} = m_e$  пропaгатор у загальному випадку матиме вигляд (26.34). З явного вигляду (26.49) випливає

$$\mathcal{G}(\not{p})|_{\not{p} \rightarrow m_e} = \frac{1}{(m_e - \not{p})(1 - \Sigma'(m_e))}, \quad (26.50)$$

тобто

$$\mathcal{G}(\not{p})|_{\not{p} \rightarrow m_e} = \frac{Z_2}{(m_e - \not{p})}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \Sigma'(m_e). \quad (26.51)$$

Тоді можна записати

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\not{p}) &= \frac{1}{m_e + (1 - Z_2^{-1})(\not{p} - m_e) + \tilde{\Sigma}(\not{p}) - \not{p}} = \frac{1}{(m_e - \not{p})Z_2^{-1} + \tilde{\Sigma}(\not{p})} = \\ &= \frac{Z_2}{m_e - \not{p} + Z_2\tilde{\Sigma}(\not{p})}, \end{aligned} \quad (26.52)$$

де нескінченну величину  $\Sigma'(m_e)$  увібрала у себе константа  $Z_2$ . Оскільки покращений електронний пропaгатор "з'єднує" дві зовнішні електронні лінії, наприклад, у процесі електрон-фотонного розіяння, то від сталої  $Z_2$  можна у подальшому позбавитися шляхом зміни норми польових функцій спірного поля  $\psi' = \sqrt{Z_2}\psi$ , див. (25.32). Після цього вираз для покращеного електронного пропaгатора має перейти у вираз для пропaгатора (26.43). Отже доданок  $Z_2\tilde{\Sigma}$  повинен відповідати величині<sup>1</sup>  $\Sigma_R(e, m_e, k^2)$  (26.41). У зв'язку з цим, в літературі можна зустріти запис для виділення перших доданків розкладу масового оператора у ряд Тейлора у вигляді:

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(m_e) + \Sigma'(m_e)(\not{p} - m_e) + Z_2^{-1}\Sigma_R(\not{p}) \quad (26.53)$$

і, відповідно, покращений електронний пропaгатор матиме вигляд

<sup>1</sup> Див. також аргументацію у іншому підході до перенормування у розділі 35 та при отриманні співвідношення (35.41).

$$\mathcal{G}(\not{p}) = \frac{Z_2}{m_e - \not{p} + \Sigma_R(\not{p})}. \quad (26.54)$$

Якщо при розрахунку радіаційних поправок не виділяти окремо розбіжні частини, то результат розрахунків залишиться функцією від початкових параметрів теорії. В цьому випадку можна прирівняти вирази (26.45), (26.54) та записати співвідношення, що знадобиться нам у подальшому:

$$\frac{1}{m_0 - \not{p} + \Sigma(e_0, m_0, \not{p})} = \frac{Z_2}{m_e - \not{p} + \Sigma_R(e, m_e, \not{p})}. \quad (26.55)$$

### Явний вигляд перенормованого масового оператора

Для отримання явного вигляду перенормованого покращеного електронного пропагатора необхідно отримати перенормований масовий оператор  $\Sigma_R^a(\not{p})$  (26.28), (26.41). Для цього нам знадобляться наступні вирази (будемо позначати фізичну масу електрона як  $m$ ):

$$\Sigma(m) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{3m}{4} \left( 1 + 2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (26.56)$$

$$\Sigma'(m) = -\frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + 2 \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \Big|_{\not{p} \rightarrow m} \right). \quad (26.57)$$

Як бачимо, вираз для похідної в точці  $\not{p} = m$  є погано визначеним і застосовуватися не може. Щоб позбавитися цієї проблеми нам необхідно відновити у виразі масу фотона. Простіше це зробити наступним чином. Візьмемо похідну за імпульсом від інтегрального виразу (26.25) у точці  $\not{p} = m$ :

$$\begin{aligned} \Sigma'^a(m) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ \frac{2mx(1-x)(2m-mx)}{m^2(x-1)^2 + m_A^2 x} - \right. \\ \left. - x \ln \frac{\Lambda^2 x^2}{m^2(x-1)^2 + m_A^2 x} \right] = \frac{\alpha}{2\pi} [I_1 - I_2]. \end{aligned} \quad (26.58)$$

Перший інтеграл має кінцеве значення лише при  $m_A \neq 0$ . Його значення є громіздким, але в границі  $m_A/m \rightarrow 0$  матимемо

$$I_1 = -1 - \ln \frac{m_A^2}{m^2}. \quad (26.59)$$

Інтеграл  $I_2$  можна рахувати відразу поклавши  $m_A = 0$ . Отримаємо

$$I_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \quad (26.60)$$

Остаточоно отримаємо

$$\Sigma^a(m) = -\frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{m_A^2}{m^2} \right). \quad (26.61)$$

Враховуючи (26.56), (26.61) отримаємо перенормований вираз для масового оператора  $\Sigma^a$  у випадку  $p^2 < m^2$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_R^a(p) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ (p - m) \left( \frac{9}{4} + \ln \frac{m_A^2}{m^2} \right) + 2m \left( \frac{5}{8} + \frac{m^2 - p^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \right) - \right. \\ \left. - \frac{p}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \right) \right]. \quad (26.62) \end{aligned}$$

Нажаль, даний вираз не можна використовувати внаслідок наявності нескінченного доданку, що містить фіктивну масу фотона. Для зручності аналізу отриманих результатів у виразі для масового оператора можна ввести безрозмірні скалярні функції  $\Sigma_m$  та  $\Sigma_p$

$$\Sigma_R^a(p) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ m \Sigma_m \left( \frac{p^2}{m^2}, \frac{m_A^2}{m^2} \right) - p \Sigma_p \left( \frac{p^2}{m^2}, \frac{m_A^2}{m^2} \right) \right]. \quad (26.63)$$

В області значень  $p^2 < m^2$  функції  $\Sigma_m$  та  $\Sigma_p$  будуть дійсними та дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} \Sigma_m^a(x, \mu) &= -2 - 2 \ln \mu - 4(1 - x^{-1}) \ln(1 - x); \\ \Sigma_p^a(x, \mu) &= -3 - 2 \ln \mu + x^{-1} - (1 - x^{-2}) \ln(1 - x). \end{aligned} \quad (26.64)$$

Значимо, що при безпосередній перевірці справедливості виразів (26.42) для перенормованого масового оператора необхідно врахувати

$$2 \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right]_{p^2 \rightarrow m^2} \rightarrow \ln \frac{m_A^2}{m^2}, \quad (26.65)$$

що впливає з порівняння виразів (26.57) та (26.61), які були розраховані при нульовій та ненульовій масі фотона.

У випадку  $p^2 > m^2$  використовується функція, що є аналітичним продовженням виразу (26.62). В області  $p^2 > m^2$  вона матиме уявну



частину, яка коректно знаходиться в наближенні  $p^2 \rightarrow p^2 + i\varepsilon$ , див. розд. 28. В цьому випадку  $\ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \rightarrow \ln \left[ \frac{p^2}{m^2} - 1 \right] - i\pi$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma_m^a &= -2 - 2 \ln \frac{m_A^2}{m^2} - 4 \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left[ \frac{p^2}{m^2} - 1 \right], \quad \operatorname{Im} \Sigma_m^a = 4\pi \frac{p^2 - m^2}{p^2}, \\ \operatorname{Re} \Sigma_p^a &= -3 + \frac{m^2}{p^2} - 2 \ln \frac{m_A^2}{m^2} - \frac{(p^2)^2 - m^4}{(p^2)^2} \ln \left[ \frac{p^2}{m^2} - 1 \right], \quad \operatorname{Im} \Sigma_p^a = \pi \frac{(p^2)^2 - m^4}{(p^2)^2}. \end{aligned} \quad (26.66)$$

Як бачимо уявні частини скалярних функцій масового оператора ( $\Sigma_m$ ,  $\Sigma_p$ ) є гарно визначеними (не містять маси фотона), прямують до сталого значення при великих значеннях  $p^2$  та дорівнюють нулю при фізичному значенні квадрата 4-імпульса  $p^2 = m^2$ , що відповідає тому факту, що електрон є стабільною частинкою, див. розд. 13. З фізичної точки зору, уявні частини скалярних функцій масового оператора визначають уявну частину амплітуди переходу  $M_{ii}$ , котра, згідно з умовою унітарності (12.92), визначає ефекти народження частинок.

### Масовий оператор у довільному калібруванні

Для розгляду масового оператора у довільному калібруванні (26.21) нам необхідно розрахувати величину  $\Sigma^b$ , що, на перший погляд, є лінійно розбіжною при великих значеннях змінної інтегрування<sup>1</sup>. Однак, якщо записати  $\Sigma^b$  у вигляді:

$$\begin{aligned} \Sigma^b(p) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(m_A^2 - k^2)(\xi m_A^2 - k^2)} \times \\ &\quad \times \left( \frac{\not{k}(p^2 - m^2)}{m^2 - (p - k)^2} - \frac{k^2(\not{p} - m)}{m^2 - (p - k)^2} + \not{k} \right), \end{aligned} \quad (26.67)$$

то останній доданок можна відкинути як інтеграл від непарної функції по симетричним межах. Отже матимемо комбінацію двох інтегралів

<sup>1</sup>Нагадуємо, що величина  $\Sigma^a$  є логарифмічно розбіжною.

$$\begin{aligned}\Sigma^b(p) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(m_A^2 - k^2)(\xi m_A^2 - k^2)} \left( \frac{k(p^2 - m^2)}{m^2 - (p - k)^2} - \frac{k^2(\not{p} - m)}{m^2 - (p - k)^2} \right) = \\ &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} [(p^2 - m^2)I_1 - (\not{p} - m)I_2]. \quad (26.68)\end{aligned}$$

перший з яких є збіжним, а другий логарифмічно розбігається при великих значеннях змінної інтегрування. Отже  $\Sigma^b$  містить лише логарифмічну розбіжність. Подальший розрахунок проводимо у припущенні  $p^2 < m^2$  як і у випадку калібрування Фейнмана.

Використавши техніку інтегрування за допомогою  $\alpha$ -представлення

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_A^2 - k^2 - i\varepsilon} &= i \int_0^{\infty} d\alpha' e^{i\alpha'(k^2 - m_A^2 + i\varepsilon)}, \\ \frac{1}{\xi m_A^2 - k^2 - i\varepsilon} &= i \int_0^{\infty} d\beta e^{i\beta(k^2 - \xi m_A^2 + i\varepsilon)}, \\ \frac{1}{m^2 - (p - k)^2 - i\varepsilon} &= i \int_0^{\infty} d\gamma e^{i\gamma((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)},\end{aligned}$$

стандартним чином отримаємо<sup>1</sup>

$$I_1 = i\pi^2 \not{p} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - x - y}{D(x, y, m_A)}, \quad (26.69)$$

де ми позначили

$$D(x, y, m_A) = m_A^2 x + \xi m_A^2 y + m^2(1 - x - y) - p^2(1 - x - y)(x + y) \quad (26.70)$$

та використали співвідношення

$$\begin{aligned}\int d\{x\}_3 f(x, y, z) &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) f(x, y, z) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy f(x, y, 1 - x - y). \quad (26.71)\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Було використано заміну  $\alpha' = xR$ ,  $\beta = yR$ ,  $\gamma = zR$ .

Оскільки  $I_1$  не містить інфрачервоної розбіжності, то при його розрахунку можна відразу покласти  $m_A = 0$ , тоді

$$I_1 = -i\pi^2 \not{p} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{(p^2)^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \right). \quad (26.72)$$

За аналогією для другого інтеграла матимемо

$$I_2 = -\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^\infty dR \left[ p^2(1-x-y)^2 e^{iR(-D+i\varepsilon)} + \frac{2i}{R} e^{iR(-D+i\varepsilon)} \right], \quad (26.73)$$

де величину  $D$  було визначено в (26.70). Оскільки другий доданок є розбіжним, використаємо регуляризацию (26.24) з тим самим параметром  $\Lambda$ , що і при розрахунку  $\Sigma^a$ . Отримаємо

$$I_2 = i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ p^2 \frac{(1-x-y)^2}{D} - 2 \ln \frac{\Lambda^2(x+\xi y)}{D} \right]. \quad (26.74)$$

У даному випадку можна також відразу покласти  $m_A = 0$ , тоді

$$I_2 = -i\pi^2 \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] + \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right). \quad (26.75)$$

Підставимо (26.72), (26.75) у (26.68) та отримаємо вираз для  $\Sigma^b$ , що містить нескінченну складову  $\ln(\Lambda^2/m^2)$  та вимагає перенормування:

$$\Sigma^b(p) = -\frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \not{p} \frac{p^2 - m^2}{p^2} \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \right) - (\not{p} - m) \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] + \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right) \right\}. \quad (26.76)$$

Для отримання перенормованої величини  $\Sigma_R^b(\not{p})$  (26.41) нам необхідно буде розрахувати  $\Sigma^b(m)$  та  $\Sigma'^b(m)$ . Як випливає з явного вигляду (26.68), (26.76)  $\Sigma^b(m) = 0$  і це добре, бо величина  $\Sigma(m)$  визначає зсув маси електрона між її початковим та фізичним значеннями. Було б дуже дивно, аби цей параметр залежав від калібрування. В той же час  $\Sigma'^b(\not{p} = m) \neq 0$ , а отже норма польової функції електрона буде залежати від вибору калібрування згідно з (26.21) та (26.44).

Оскільки значення  $\Sigma^{'b}(\not{p} = m)$  є погано визначеним

$$\Sigma^{'b}(m) = \frac{\alpha}{4\pi} \left( \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} - 3 - 2 \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \Big|_{\not{p} \rightarrow m} \right), \quad (26.77)$$

нам необхідно буде відновити у виразах масу фотона  $m_A$ . При цьому для безпосереднього розрахунку похідної від масового оператора його зручно представити у вигляді

$$\begin{aligned} \Sigma^b(\not{p}) &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} [J_1(\not{p}) - J_2(\not{p})], \text{ де} \\ J_1(\not{p}) &= (p^2 - m^2)I_1(\not{p}), \quad J_2(\not{p}) = (\not{p} - m)I_2(\not{p}), \end{aligned} \quad (26.78)$$

а складові  $I_1, I_2$  задані у (26.69), (26.74) та містять  $m_A$ . Матимемо

$$\begin{aligned} J'_1(p) &= i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{2p^2(p^2 - m^2)(1-x-y)^2(x+y)}{D^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3p^2 - m^2)(1-x-y)}{D} \right], \quad (26.79) \\ J'_2(p) &= i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{p^2(1-x-y)^2}{D} - 2 \ln \frac{\Lambda^2(x+y\xi)}{D} + \right. \\ &\quad \left. + (p-m) \left[ \frac{2p^3(1-x-y)^3(x+y)}{D^2} - \frac{2p(3x+3y-1)(1-x-y)}{D} \right] \right]. \end{aligned}$$

Після проведення достатньо громіздких розрахунків<sup>1</sup>, в наближенні  $m_A/m \rightarrow 0$ , отримаємо

$$J'_1(m) = -i\pi^2 \left[ 1 + \ln \frac{m_A^2}{m^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right] \quad (26.80)$$

$$J'_2(m) = -i\pi^2 \left[ 1 + \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right], \quad (26.81)$$

$$\Sigma^{'b}(m) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \frac{m_A^2}{m^2} \right]. \quad (26.82)$$

<sup>1</sup>Для перевірки автор радить використовувати пакети математичних програм, наприклад, *Wolfram Mathematica* або *MatLab*.

Відповідно

$$\begin{aligned}\Sigma_R^b(\not{p}) &= \Sigma^b(\not{p}) - (\not{p} - m)\Sigma'^b(m) = \\ &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[ \not{p} \frac{p^2 - m^2}{p^2} \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\not{p} - m) \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left[ 1 - \frac{p^2}{m^2} \right] + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} + \ln \frac{m_A^2}{m^2} \right) \right], \quad (26.83)\end{aligned}$$

а повний вираз для перенормованого масового оператора у довільному калібруванні набуде вигляду

$$\Sigma_R = \Sigma_R^a + (1 - \xi)\Sigma_R^b = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ m\Sigma_m \left( \frac{p^2}{m^2}, \frac{m_A^2}{m^2}, \xi \right) - \not{p}\Sigma_p \left( \frac{p^2}{m^2}, \frac{m_A^2}{m^2}, \xi \right) \right], \quad (26.84)$$

де  $\Sigma_m$ ,  $\Sigma_p$  безрозмірні скалярні функції, що були розраховані в припущенні  $p^2/m^2 \leq 1$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_m(x, \mu, \xi) &= -(\xi + 3)(1 - x^{-1}) \ln(1 - x) + (\xi - 3)(1 + \ln \mu) + \xi \ln \xi, \\ \Sigma_p(x, \mu, \xi) &= \frac{\xi}{x} - \xi(1 - x^{-2}) \ln(1 - x) + (\xi - 3) \ln \mu + \xi \ln \xi - 3.\end{aligned} \quad (26.85)$$

Звертаємо увагу, що маса фотона залишилися у виразі для перенормованого масового оператора, але її можна позбутися обравши калібрування з параметром  $\xi = 3$  (калібрування Йенні та Фріда). Опосередковано це підтверджує, що маса фотона є нефізичним параметром. Як обходити проблему маси фотона у довільному калібруванні буде розглянуто пізніше.

Корисно навести явний вигляд складових масового оператора у калібруванні Йенні та Фріда:

$$\Sigma_m^{YF}(x) = 3 \left[ \ln 3 - 2(1 - x^{-1}) \ln(1 - x) \right], \quad (26.86)$$

$$\Sigma_p^{YF}(x) = 3 \left[ \ln 3 - 1 + x^{-1} - (1 - x^{-2}) \ln(1 - x) \right], \quad (26.87)$$

поведінку яких в області  $x \leq 1$  ( $p^2/m^2 \leq 1$ ) представлено на рис. 26.1. В граничних випадках поведінка складових масового оператора у калібруванні Йенні та Фріда матиме вигляд:

$$\Sigma_m^{YF}(x=1) = \Sigma_p^{YF}(x=1) = 3 \ln 3, \quad (26.88)$$

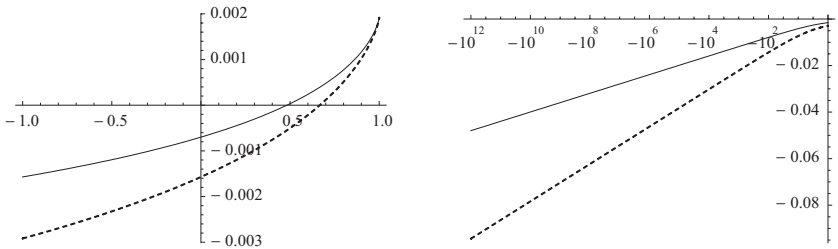
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Sigma_m^{YF}(x) = 3 \ln 3 - 6 \ln |x|, \quad (26.89)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Sigma_p^{YF}(x) = 3(\ln 3 - 1) - 3 \ln |x|. \quad (26.90)$$

З урахуванням (26.84) перенормований покращений електронний пропагатор (26.43) набуде вигляду

$$\mathcal{G}_R(\not{p}) = \left[ m \left( 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \Sigma_m \right) - \not{p} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \Sigma_p \right) - i\varepsilon \right]^{-1}. \quad (26.91)$$

Враховуючи логарифмічну поведінку складових масового оператора при великих від'ємних значеннях  $p^2$ , бачимо широкий діапазон, в якому можна обмежитися застосуванням масового оператора у однопетльовому наближенні (рис. 26.1). Очевидно, що врахування двопетльового наближення дасть поправку  $\sim \alpha^2$ .



**Рис. 26.1.** По осі ординат відкладено складові масового оператора (26.84):  $\frac{\alpha}{4\pi} \Sigma_m^{YF}$  (суцільна крива) та  $\frac{\alpha}{4\pi} \Sigma_p^{YF}$  (пунктирна крива). По осі абсцис відкладено змінну  $x = p^2/m^2$ .

### Завдання

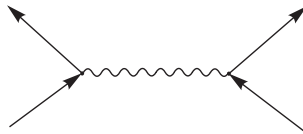
1. Доведіть справедливість виразу (26.3).
2. Переконайтесь у справедливості виразів (26.22), (26.23).
3. Доведіть справедливість співвідношень (26.42) для перенормованого масового оператора (26.62).
4. Отримайте вираз (26.69).

5. Отримайте вираз (26.74).
6. Запишіть аналітичне продовження складових функцій масового оператора (26.85) в області  $p^2 > m^2$ . Виділіть дійсну та уявну частини. Побудуйте продовження графіків на рис. 26.1 в область  $p^2 > m^2$  (для дійсної та уявної частини).

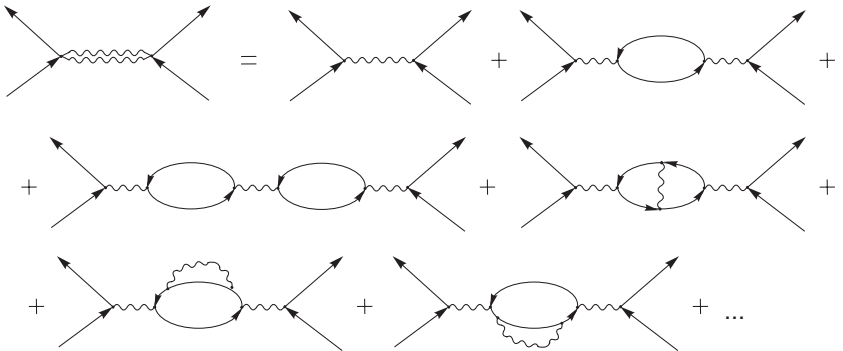
## РОЗДІЛ 27

### Точний фотонний пропагатор. Розрахунок в однопетльовому наближенні

Поняття точного фотонного пропагатора природнім чином виникає при спробі описати процес електрон-електронного розсіяння з урахуванням всіх порядків теорії збурень. У першому незникаючому наближенні (у другому порядку теорії збурень) процес описується діаграмою

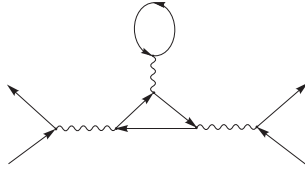


Як і у попередньому розділі, ми опустимо для подальшого розгляду поправки до вершин та не будемо розглядати поправки до зовнішніх електронних ліній. Тоді інші внески від вищих порядків теорії збурень будуть модифікувати внутрішню фотонну лінію. Внутрішня фотонна лінія з урахуванням всіх можливих до неї поправок у всіх порядках теорії збурень відповідає *точному фотонному пропагатору*. Ми позначатимемо її подвійною хвилястою лінією. Сказане можна графічно проілюструвати включно до діаграм 6-го порядку



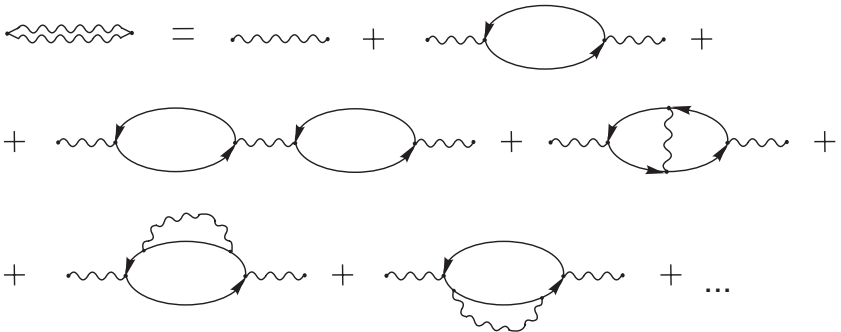


Як і у попередньому розділі, ми не враховували внесок діаграми



що містить замкнену ферміонну петлю ( $\langle 0 | \hat{j}^\mu | 0 \rangle \equiv 0$ ).

Часто графічно представляють діаграми окремо для точного фотонного пропагатора (без зовнішніх ліній)



Позначимо вираз для суми усіх компактних частин діаграм (без крайніх фотонних пропагаторів) як  $i\mathcal{P}(p)$ , повний фотонний пропагатор як  $i\mathcal{D}^0(p)$ , а звичайний фотонний пропагатор позначаємо як  $iD^0(p)$ . Тоді на графічному рівні матимемо

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{D}^0 &= iD^0 + iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 + iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 + \\
 &+ iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 \circlearrowleft i\mathcal{P} iD^0 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{27.1}$$

або на матричному рівні у імпульсному просторі

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^0 &= D^0 - D^0 \mathcal{P} D^0 + D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 - D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 + \dots = \\
 &= D^0 (1 - \mathcal{P} D^0 + \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 - \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 + \dots) = D^0 \frac{1}{1 + \mathcal{P} D^0} =
 \end{aligned}$$

$$= [(D^0)^{-1}]^{-1}(1 + \mathcal{P}D^0)^{-1} = / (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} / = \frac{1}{(D^0)^{-1} + \mathcal{P}}. \quad (27.2)$$

Тензорну величину  $\mathcal{P}$  називають *поляризаційним оператором*. В літературі його також називають *фотонною власноенергетичною функцією*. Як легко побачити, розмірність  $[\mathcal{P}] = [(D^0)^{-1}] = [\text{енергія}]^2$ .

З виразу для суми діаграм (27.2) можна отримати ще одне корисне співвідношення, а саме записавши його у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^0 &= D^0 - D^0 \mathcal{P} D^0 + D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 - D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 + \dots = \\ &= D^0 - D^0 \mathcal{P} (D^0 - D^0 \mathcal{P} D^0 + D^0 \mathcal{P} D^0 \mathcal{P} D^0 - \dots) \end{aligned} \quad (27.3)$$

отримаємо *рівняння Дайсона для фотонного пропагатора*:

$$\mathfrak{D}^0 = D^0 - D^0 \mathcal{P} \mathfrak{D}^0, \quad (27.4)$$

або з урахуванням тензорної природи пропагатора

$$\mathfrak{D}_{\mu\nu}^0 = D_{\mu\nu}^0 - D_{\mu\alpha}^0 \mathcal{P}^{\alpha\beta} \mathfrak{D}_{\beta\nu}^0. \quad (27.5)$$

Рівняння (27.4) зводиться до вигляду (27.2), якщо його зліва помножити на  $(D^0)^{-1}$ , а справа на  $(\mathfrak{D}^0)^{-1}$ :

$$(\mathfrak{D}^0)^{-1} = (D^0)^{-1} + \mathcal{P}. \quad (27.6)$$

Слід також відзначити, що точний фотонний пропагатор можна визначити так само як і звичайний фотонний пропагатор (2.26), але за допомогою операторів в представленні Гайзенберга

$$i\mathfrak{D}_{\mu\nu}^0(x, x') = \langle 0 | \hat{T} \hat{A}_{H,\mu} \hat{A}'_{H,\nu} | 0 \rangle. \quad (27.7)$$

Деталі див. розд. 26, де аналогічним чином було визначено точний електронний пропагатор (26.9).

Для знаходження явного вигляду поляризаційного оператора необхідно розрахувати нескінченну суму наступних частин компактних діаграм

$$i\mathcal{P} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \quad (26.8)$$

Наведену нескінченну суму діаграм неможливо явно розрахувати. Як правило, її рахують лише в першому незникаючому наближенні, а саме поляризаційному оператору зіставляється лише перший доданок

$$i\mathcal{P} = \text{diagram}$$

Таке наближення називають однопетльовим. Оскільки йому відповідають лише діаграми з двома вершинами, то  $\mathcal{P} \sim \alpha$ , де  $\alpha$  – стала тонкої структури. У даному посібнику ми проведемо розрахунок поляризаційного оператора в однопетльовому наближенні<sup>1</sup>. Оскільки поляризаційний оператор розраховуватиметься наближено, то отриманий за його допомогою фотонний пропагатор називають не точним, а *покрощеним пропагатором*.

Для запису виразу для поляризаційного оператора використаємо наступні допоміжні діаграми (без зовнішніх ліній) та їх математичні записи в однопетльовому наближенні:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{D}^0(k) &= \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \dots \\
 &= (2\pi)^4 \left[ iD_{\mu\nu}^0(k) + iD_{\mu\sigma}^0(k) \times \right. \\
 &\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-ie)^2 (-1) \text{Tr} [\gamma^\sigma (-i)G(p)\gamma^\delta (-i)G(p-k)] \right\} iD_{\delta\nu}^0(k) + \\
 &\quad + iD_{\mu\sigma}^0(k) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (-ie)^2 (-1) \text{Tr} [\gamma^\sigma (-i)G(p)\gamma^\delta (-i)G(p-k)] \right\} iD_{\delta\nu}^0(k) \\
 &\quad \times \left. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (-ie)^2 (-1) \text{Tr} [\gamma^\theta (-i)G(p')\gamma^\omega (-i)G(p'-k)] \right\} iD_{\theta\omega}^0(k) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

де ми навмисно винесли множник  $(2\pi)^4$  з тих самих міркувань, що і у попередньому розділі. Відповідно, вираз у фігурних дужках можна зіставити поляризаційному оператору

<sup>1</sup>У [6] наведено аналітичний розрахунок поляризаційного оператора у двопетльовому наближенні.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) &= i \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \operatorname{Tr} [\gamma^\sigma G(p) \gamma^\delta G(p-k)] = \\ &= i \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \frac{\operatorname{Tr} [\gamma^\sigma(m+\not{p}) \gamma^\delta(m+\not{p}-\not{k})]}{(m^2-p^2)(m^2-(p-k)^2)}. \end{aligned} \quad (27.9)$$

Використовуючи техніку обчислення згорток, наведену у розд. 14, можна перекоонатися, що

$$\operatorname{Tr} [\gamma^\sigma(m+\not{p}) \gamma^\delta(m+\not{p}-\not{k})] = 4[p^\sigma(p-k)^\delta + p^\delta(p-k)^\sigma - g^{\sigma\delta}(p^2 - pk - m^2)], \quad (27.10)$$

і, відповідно,

$$\mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) = i \frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \frac{2p^\sigma p^\delta - g^{\sigma\delta} p^2 + g^{\sigma\delta} p^\alpha k_\alpha - p^\sigma k^\delta - p^\delta k^\sigma + g^{\sigma\delta} m^2}{(m^2-p^2)(m^2-(p-k)^2)}. \quad (27.11)$$

Отже, поляризаційний оператор є квадратично розбіжним.

Для проведення інтегрування за 4-імпульсом  $p$  та визначення тензорної структури поляризаційного оператора використаємо метод параметризації за допомогою  $\alpha$ -представлення. Запишемо знаменник виразу згідно з (22.2) як

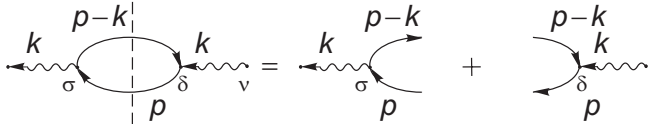
$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon} &= i \int_0^\infty d\alpha' e^{i\alpha'(p^2-m^2+i\varepsilon)}, \\ \frac{1}{m^2-(p-k)^2-i\varepsilon} &= i \int_0^\infty d\beta e^{i\beta((p-k)^2-m^2+i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

та проінтегруємо за 4-імпульсом  $p$  згідно з (22.4) – (22.7). Отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha' \int_0^\infty d\beta \frac{e^{i\frac{\alpha'\beta}{\alpha'+\beta}k^2 - i(\alpha'+\beta)m^2}}{(\alpha'+\beta)^2} \times \\ &\times \left[ \frac{2\alpha'\beta}{(\alpha'+\beta)^2} k^\sigma k^\delta - g^{\sigma\delta} \left\{ \frac{\alpha'\beta}{(\alpha'+\beta)^2} k^2 + m^2 - \frac{i}{\alpha'+\beta} \right\} \right], \end{aligned} \quad (27.12)$$

де ми використали, що  $\alpha = e^2/(4\pi)$  – стала тонкої структури.

Оскільки взаємодія поляризаційного оператора в кожній зі своїх вершин з віртуальним фотонем є подібною до взаємодії струму з електромагнітним полем (див. схематичний рис.)



то повинні виконуватися наступні співвідношення, що випливають із закону збереження електричного заряду в кожній вершині ( $\partial^\mu j_\mu = 0$ ):

$$k_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) = 0, \quad \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) k_\delta = 0, \quad k_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) k_\delta = 0. \quad (27.13)$$

Отже поляризаційний оператор має бути поперечним до 4-вектора імпульса. Однак, поляризаційний оператор у формі (27.12) не задовольняє зазначеній умові. Справді, тензорна структура поляризаційного оператора визначається виразом у квадратних дужках, який можна представити у вигляді:

$$\left[ \dots \right] = (k^\sigma k^\delta - g^{\sigma\delta} k^2) \frac{2\alpha'\beta}{(\alpha' + \beta)^2} - g^{\sigma\delta} \left\{ m^2 - \frac{\alpha'\beta k^2}{(\alpha' + \beta)^2} - \frac{i}{\alpha' + \beta} \right\}. \quad (27.14)$$

Згортка першого доданку з 4-імпульсом  $k$  дорівнює нулю, а другого доданку (у фігурних дужках) – ні. Відповідно, внесок від другого доданку (вираз у фігурних дужках) до поляризаційного оператора повинен дорівнювати нулю, див. [6]. Отже поляризаційний оператор можна представити у вигляді

$$\mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) = (k^\sigma k^\delta - g^{\sigma\delta} k^2) w(k^2, m), \quad (27.15)$$

де  $w(k^2, m)$  є скалярною безрозмірною функцією

$$w(k^2, m) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha' \int_0^\infty d\beta \frac{\alpha'\beta}{(\alpha' + \beta)^4} e^{i\frac{\alpha'\beta}{\alpha'+\beta}k^2 - i(\alpha'+\beta)m^2}. \quad (27.16)$$

Наступний крок – заміна змінних:  $\alpha' = xA$ ,  $\beta = yA$  за додаткової умови  $x + y = 1$ , див. (22.9) – (22.11). Якобіан переходу  $I = A$ , відповідно

$$w(k^2, m) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \int_0^\infty \frac{dA}{A} e^{-iA[m^2 - x(1-x)k^2]}. \quad (27.17)$$

Звертаємо увагу, що вираз (27.17) містить лише логарифмічну розбіжність на відміну від квадратичної розбіжності, що містилася у (27.11). Причиною цього факту є відкидання від поляризаційного оператора доданків, чия згортка з 4-імпульсом  $k$  не дорівнює нулю.

Для регуляризації виразу (27.17) використовуємо регуляризацію, що є подібною до регуляризації Паулі-Віларса (23.3), а саме:

$$w^{reg}(k^2, m, \{\lambda_s\}) = \sum_{s=0}^S C_s w(k^2, \lambda_s m), \quad \lambda_0 = 1, C_0 = 1, \quad (27.18)$$

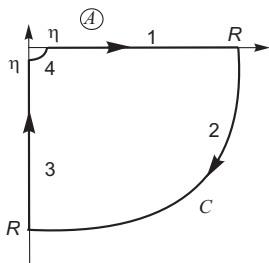
де безрозмірні параметри  $\lambda_s$  у кінцевих виразах будуть спрямовані до нескінченності ( $s \neq 0$ ), а умови на константи  $C_s$  будуть накладені пізніше для коректного проведення процедури регуляризації. Справді, при  $\lambda_s \rightarrow \infty$  функція  $w(k^2, \lambda_s m) \rightarrow 0$  і  $w^{reg}(k^2, m, \{\lambda_s\}) \rightarrow w(k^2, m)$ .

Як і у попередньому розд. будемо розглядати ситуацію, коли 4-імпульс віртуального фотона не може призвести до народження нових частинок – електрон-позитронної пари, тобто коли  $k^2 < 4m^2$ . У цьому випадку вираз у показнику експоненти для  $w(k^2, \lambda_s m)$  (див. (27.17))

$$B_s = (\lambda_s m)^2 - x(1-x)k^2 > (\lambda_s m)^2 - 4m^2 x(1-x) > 0, \quad (27.19)$$

де ми врахували, що  $\max[x(1-x)] = 1/4$  при  $x \in [0, 1]$ .

Для розрахунку інтеграла за змінною  $A$  у (27.17) покладемо нижню границю інтегрування рівною  $\eta$ , яку у кінцевому виразі спрямуємо до нуля. Розглянемо допоміжний інтеграл за контуром  $C$  у комплексній площині.



Звичайно, цей інтеграл дорівнює нулю, оскільки всередині контуру підінтегральна функція не містить полюсів:

$$\oint_C \frac{dA}{A} e^{-iAB_s} = \sum_{i=1}^4 I_i = 0, \quad (27.20)$$

де інтеграл за великим півколом  $I_2$  дорівнює нулю<sup>1</sup>, інші інтеграли:

$$I_4 = /A \rightarrow 0/ = \int_4 \frac{dA}{A} = /A = r e^{i\varphi} / = \int_{-\pi/2}^0 i d\varphi = i \frac{\pi}{2}, \quad (27.21)$$

$$I_3 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-i\infty}^{-i\eta} \frac{dA}{A} e^{-iAB_s} = /iAB_s = t/ = - \int_{\eta B_s}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t}. \quad (27.22)$$

Інтегруванням за частинами ( $dt/t = dU$ ,  $e^{-t} = V$ )  $I_3$  зводиться до

$$I_3 = \ln(\eta B_s) - \int_0^{\infty} dt e^{-t} \ln t = \ln(\eta B_s) + C, \quad (27.23)$$

де  $C$  – стала Ейлера. З (27.20) – (27.23) випливає, що

$$I_1 \equiv I_s = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^{\infty} \frac{dA}{A} e^{-iAB_s} = -(I_3 + I_4) = - \left( C + \ln \eta + i \frac{\pi}{2} \right) - \ln B_s. \quad (27.24)$$

Отже

$$w^{reg}(k^2, m, \{\lambda_s\}) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \sum_{s=0}^S C_s \left[ \left( C + \ln \eta + i \frac{\pi}{2} \right) + \ln B_s \right].$$

Накладемо умову на невідомі параметри  $\sum C_s = 0$  і отримаємо

$$w^{reg}(k^2, m, \{\lambda_s\}) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \sum_{s=0}^S C_s \ln B_s. \quad (27.25)$$

Очевидно, що найпростіший варіант це вважати, що  $S = 1$  і  $C_1 = -1$ ,  $\lambda_1 = \Lambda$  отже

---

<sup>1</sup> $B_s$  насправді слід замінити на  $B_s - i\varepsilon$  внаслідок наявності нескінченно малої уявної частини у ферміонних пропагаторах.

$$\begin{aligned}
w^{reg}(k^2, m, \Lambda) &= \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) (\ln[m^2 - x(1-x)k^2] - \ln[\Lambda^2 m^2 - x(1-x)k^2]) = \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{1 - x(1-x)\frac{k^2}{m^2}}{\Lambda^2 - x(1-x)\frac{k^2}{m^2}} = / \Lambda \rightarrow \infty / = \\
&= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left( \ln \left[ 1 - x(1-x)\frac{k^2}{m^2} \right] - \ln \Lambda^2 \right). \quad (27.26)
\end{aligned}$$

Інтегрування за змінною  $x$  в області  $z = k^2/m^2 < 4$  дає

$$\begin{aligned}
w^{reg}(z, \Lambda) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[ -\ln \Lambda^2 + \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{2}{z} + 1 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left( \sqrt{\frac{4}{z} - 1} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{4}{z} - 1} - 1 \right) \right], \quad z = \frac{k^2}{m^2}. \quad (27.27)
\end{aligned}$$

Як бачимо регуляризований вираз містить нескінченний доданок та потребує перенормування. Звертаємо також увагу, що при  $k^2/m^2 > 4$  функція  $w^{reg}$  отримує уявну частину.

Повернемося тепер до питання знаходження явного вигляду повного фотонного пропагатора. Згідно з (27.2)

$$\mathfrak{D}^0 = \frac{1}{(D^0)^{-1} + \mathcal{P}}, \quad (27.28)$$

де фотонний пропагатор заданий згідно з (Д4.5.15)

$$D_{\mu\nu}^0(k, \xi) = -\frac{1}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) = D^0(k^2) \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}, \quad (27.29)$$

де  $D^0(k^2) = 1/k^2$  – скалярна функція. Щоб знайти обернений пропагатор  $(D^0)_{\mu\nu}^{-1}$  слід зазначити, що він повинен бути тензором і залежати від 4-імпульсу  $k$ . Єдиний можливий його вигляд це

$$(D^0)_{\mu\nu}^{-1} = A g_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu, \quad (27.30)$$



де  $A, B$  – скалярні величини, що знаходяться з умови

$$(D^0)^{-1}_{\mu\alpha} D^{0,\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (27.31)$$

Відповідно, отримаємо

$$(D^0)^{-1}_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - \xi^{-1} k_\mu k_\nu, \quad (27.32)$$

$$(\mathfrak{D}^0)^{-1}_{\mu\nu} = (D^0)^{-1}_{\mu\nu} + \mathcal{P}_{\mu\nu} = (1 + w)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - \xi^{-1} k_\mu k_\nu. \quad (27.33)$$

Щоб отримати тепер повний фотонний пропагатор, достатньо зробити заміну  $K_\nu = \sqrt{1 + w} k_\nu$ ,  $\Xi = \xi(1 + w)$ . Тоді

$$(\mathfrak{D}^0)^{-1}_{\mu\nu} = -K^2 g_{\mu\nu} - \Xi^{-1} K_\mu K_\nu. \quad (27.34)$$

Використавши (27.29) та (27.32), легко отримаємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^0_{\mu\nu} &= \left( (D^0)^{-1}_{\mu\nu} + \mathcal{P}_{\mu\nu} \right)^{-1} = \frac{K_\mu K_\nu - g_{\mu\nu} K^2}{(K^2)^2} - \Xi \frac{K_\mu K_\nu}{(K^2)^2} = \\ &= \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2}{(1 + w)(k^2)^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}, \end{aligned} \quad (27.35)$$

де  $w$  визначено у (27.27).

Звертаємо увагу, що поперечна частина фотонного пропагатора не змінюється під дією радіаційних поправок (27.33), (27.35), що є свідченням незалежності фізичних результатів від вибору калібрування та нефізичності повздовжнього доданку. Як бачимо випадок калібрування Ландау ( $\xi = 0$ ) є виділеним. Це можна пояснити вимогою до поляризаційного оператора бути поперечним до 4-імпульса (27.15) з однієї сторони та обмеженню на фотонні пропагатори, що впливає з (27.6):  $(\mathfrak{D}^0)^{-1}_{\mu\nu} - (D^0)^{-1}_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\mu\nu}$ , адже поляризаційний оператор  $\mathcal{P}_{\mu\nu}$  не залежить від вибору калібрування.

З явного вигляду (27.35) впливає, що у покращеному фотонному пропагаторі  $\mathfrak{D}^0$  полюс буде у тій самій точці, що й для фотонного пропагатора<sup>1</sup>. Отже радіаційні поправки не змінять маси фотона.

Застосуємо два окремих підходи до перенормування, як ми це робили у випадку електронного пропагатора. **В першому підході**

<sup>1</sup>З явного вигляду  $w^{reg}$  (27.27) впливає, що  $1 + w^{reg} > 0$  при енергіях, для яких справедливо застосування однопетлевого наближення.

вважатимемо, що маси та заряди частинок відповідають їх фізичним значенням. Оскільки фотонний пропагатор залежить лише від імпульса (маса фотона дорівнює нулю і не змінюється), то для позбавлення нескінченного доданка у (27.27) нам знадобиться лише один контрчлен кінетичного доданка електромагнітного поля  $\sim F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , що ми додамо до лагранжіану (26.30):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1+a) - m_e(1+b)\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \rightarrow \\ \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - \frac{c}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1+a) - m_e(1+b)\bar{\psi}\psi - \frac{1+c}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.\end{aligned}\quad (27.36)$$

Оскільки в імпульсному просторі

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow -2A_\mu[g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu]A_\nu, \quad (27.37)$$

то даний контрчлен змінить імпульс фотона  $k_\nu \rightarrow k_\nu\sqrt{1+c}$  у вільних поперечних доданках пропагатора:

$$(D^0)_{\mu\nu}^{-1} \rightarrow (1+c)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - \xi^{-1}k_\mu k_\nu. \quad (27.38)$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}(D^0)_{\mu\nu}^{-1} + \mathcal{P}_{\mu\nu} &\rightarrow (1+c+w)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) - \xi^{-1}k_\mu k_\nu, \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}^0(k, \xi) &\rightarrow \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2}{(1+c+w)(k^2)^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}.\end{aligned}\quad (27.39)$$

Сталу  $c$  слід обрати з міркувань того, що при малих значеннях квадрата переданого 4-імпульса  $k$  покращений фотонний пропагатор повинен співпадати зі звичайним фотонним пропагатором, тобто

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^0(k, \xi)|_{k^2 \rightarrow 0} = D_{\mu\nu}^0(k, \xi), \quad (27.40)$$

що буде за умови

$$c = -w \left( \frac{k^2}{m^2} = 0 \right) = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \Lambda^2. \quad (27.41)$$

Отже перенормований покращений фотонний пропагатор в однопетльовому наближенні матиме вигляд

$$\mathfrak{D}_{\mu\nu}^{0,\text{ren}}(k, \xi) = \mathfrak{D}^{\text{ren}}(k^2) \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}, \quad (27.42)$$

де

$$\mathfrak{D}^{\text{ren}}(k^2) = \frac{1}{1 + w^{\text{ren}}(k^2/m^2)} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1 + w^{\text{ren}}(k^2/m^2)} D^0(k^2), \quad (27.43)$$

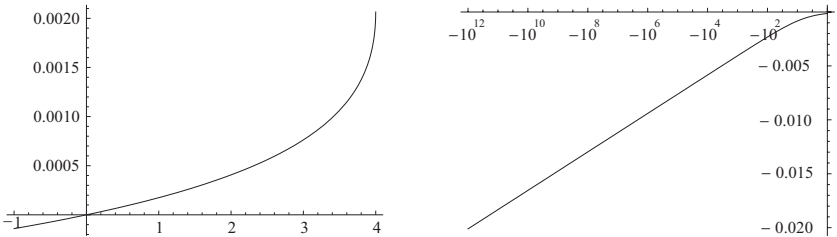
$$\begin{aligned} w^{\text{ren}}(x) &= w^{\text{reg}}(x, \Lambda) - w^{\text{reg}}(0, \Lambda) = \\ &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{2}{x} + 1 \right) \left( \sqrt{\frac{4}{x} - 1} \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{4}{x} - 1} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (27.44)$$

Звертаємо увагу, що процедура перенормування звелася до віднімання першого доданку розкладу функції в ряд Тейлора, а тензорна структура покращеного фотонного пропагатора збігається зі структурою звичайного пропагатора (27.29).

Можна перекоонатися, що

$$\begin{aligned} w^{\text{ren}}(4) &= \frac{8\alpha}{9\pi}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} w^{\text{ren}}(x) &= \frac{\alpha}{15\pi} x, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} w^{\text{ren}}(x) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln|x| - \frac{5}{3} \right). \end{aligned} \quad (27.45)$$

Поведінку перенормованої функції  $w^{\text{ren}}(k^2)$  наведено на рис. 27.1 в області  $x = k^2/m^2 < 4$ .



**Рис. 27.1.** По осі ординат відкладено  $w^{\text{ren}}(x)$  в області  $x < 4$ . По осі абсцис відкладено змінну  $x = k^2/m^2$ .

В області  $x > 4$  будується функція, що є аналітичним продовженням виразу (27.44). Отримана функція буде мати уявну частину в

області  $x > 4$ , яка коректно знаходиться в наближенні  $w(x + i\varepsilon)$ , див. розд. 28. Фактично, щоб отримати поведінку функції в області  $x > 4$  досить зробити заміну:

$$\sqrt{\frac{4}{x} - 1} \rightarrow i\sqrt{1 - \frac{4}{x}} = iy,$$

$$\operatorname{arccctg}(iy) = \frac{i}{2} \ln \frac{y-1}{y+1} = /y \in (0, 1)/ = \frac{i}{2} \ln(-1) \frac{1-y}{1+y} = -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \frac{1-y}{1+y}.$$

В результаті отримуємо явний вираз для  $w$  в області  $x > 4$ :

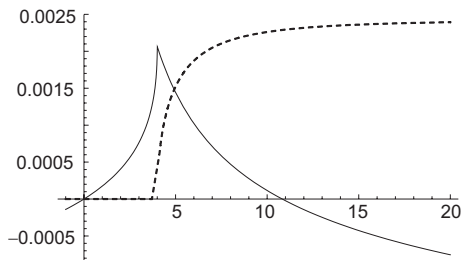
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w(x) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[ \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{2}{x} + 1 \right) \left( \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4/x}}{1 - \sqrt{1 - 4/x}} - 1 \right) \right], \\ \operatorname{Im} w(x) &= \frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \cdot \left( \frac{2}{x} + 1 \right), \end{aligned} \quad (27.46)$$

що має наступні властивості, див. рис. 27.2. Корисно навести граничні випадки поведінки функції  $w$  в області  $x > 4$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w(x < 4) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{Im} w(x) = \frac{\alpha}{4\pi} \sqrt{x-4} \rightarrow 0, \quad (27.47) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) &= -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \ln x - \frac{5}{3} - i\pi \right). \end{aligned}$$

Підкреслюємо, що на нескінченності уявна частина функції прямує до сталого значення, а в точці, що відповідає реальній частинці  $x=0$  уявна частина функції дорівнює нулю, що відповідає тому факту, що фотон є стабільною частинкою, див. розд. 13. З фізичної точки зору, уявна частина функції  $w$  визначає уявну частину амплітуди переходу  $M_{ii}$ , котра, згідно з умовою унітарності (12.92), визначає ефекти народження частинок при  $x > 4$  (28.51), див. детальніше розд. 28.

**Розглянемо тепер другий підхід** до перенормування, коли в лагранжіан входять початкові нефізичні значення мас та зарядів частинок. В цьому підході ми можемо перевизначити загальний множник поблизу пропагатора (напр., шляхом зміни норми польових функцій електромагнітного поля, див. (25.32)). Враховуючи, що перенормований покращений фотонний пропагатор повинен містити перенормовану функцію  $\tilde{w}^{ren}$  та переходити у звичайний пропагатор (з точністю



**Рис. 27.2.** По осі ординат відкладено  $w^{ren}(x)$  в області  $x > 4$ . Суцільна лінія відповідає функції  $Re w(x)$ , пунктирна лінія відповідає функції  $Im w(x)$ . По осі абсцис відкладено змінну  $x = k^2/m^2$ .

до множника  $Z_3$ ) при  $k^2 = 0$ , можна записати

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mu\nu}^0(k, \xi) &= \frac{1}{1 + w(k^2)} \cdot \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2}{(k^2)^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} = \\ &= \frac{Z_3}{1 + w^{ren}(k^2)} \cdot \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2}{(k^2)^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} = \\ &= Z_3 \left[ \frac{1}{1 + w^{ren}(k^2)} \cdot \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2}{(k^2)^2} - \xi' \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \right], \quad (27.48) \end{aligned}$$

де нескінченні величини увібрала у себе константа  $Z_3$ , калібрувальний параметр змінився  $\xi' = Z_3^{-1}\xi$ , а на функцію  $w^{ren}$  слід накласти умову  $\tilde{w}^{ren}(k^2 = 0) = 0$ . Розглянувши окремі множники (27.48) при  $k^2 \rightarrow 0$ :

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{1}{1 + w(k^2)} = \lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{Z_3}{1 + w^{ren}(k^2)} \quad (27.49)$$

отримаємо

$$Z_3 = \frac{1}{1 + w(0)}. \quad (27.50)$$

З (27.49) при довільних  $k^2$ , з урахуванням (27.50), перенормовна функція  $w$  визначається як

$$w(k^2) = w(0) + Z_3^{-1} w^{ren}(k^2), \quad w^{ren}(k^2) = Z_3 [w(k^2) - w(0)], \quad (27.51)$$

що узгоджується з визначенням (27.44) у першому неznикаючому наближенні, а також є подібним до визначенням перенормованого масового оператора (26.53). Остаточо перенормований покращений фотонний пропагатор запишемо у вигляді

$$\mathfrak{D}_{\mu\nu}^0(k, \xi) = Z_3 \left[ \frac{1}{1 + w^{ren}(k^2)} \cdot \frac{k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2}{(k^2)^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \right], \quad (27.52)$$

Зручно визначити фізичний заряд електрона ( $e$ ) як коефіцієнт, що визначає інтенсивність електрон-електронної взаємодії на великих відстанях між частинками. У цьому випадку віртуальний фотон повинен мати достатньо великий час життя, що може бути при  $k^2 \rightarrow 0$  згідно з міркуваннями наведеними у розд. 6. З іншого боку, зазначений випадок відповідає взаємодії частинок згідно з класичною теорією електродинаміки. Оскільки дана взаємодія визначається фотонним пропагатором, то з (27.48), (27.50) впливає, що

$$e^2 = Z_3 e_0^2 = \frac{e_0^2}{1 + w(0)}. \quad (27.53)$$

При такому розумінні параметра  $Z_3$  норму польової функції  $A_\mu$  змінювати не потрібно. Звертаємо увагу, що у другому підході до перенормування змінюється значення калібрувального параметра  $\xi \rightarrow \xi' = Z_3^{-1} \xi$ , див. (27.48). Однак це жодним чином не впливає на результати розрахунків фізичних процесів.

Гарно визначеним методом визначення числового значення фізичного заряду електрона є розгляд розсіяння електромагнітної хвилі (фотонів) малої частоти ( $k \rightarrow 0$ ) на електроні, що покоїться. Дана задача має розв'язок в класичній теорії електродинаміки і не містить впливу радіаційних поправок. Повний переріз розсіяння задається формулою Томсона (17.37)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi m} \right)^2 \quad (27.54)$$

та містить у собі фізичний заряд електрона. У розд. 30 буде показано, що всі діаграми Фейнмана, які описують даний процес, міститимуть заряд електрона саме у комбінації  $\sqrt{Z_3} e_0$ .

**Завдання**

1. Розрахуйте згортку (27.10).
2. Отримайте вираз (27.12).
3. Доведіть явним розрахунком, що другий доданок у виразі (27.14) не дає внеску до поляризаційного оператора (27.12). Коректно це можна зробити для регуляризованого поляризаційного оператора. Покажіть, що додаткових умов на параметри  $C_s$  не виникає.
4. Знайдіть покращений пропагатор масивного векторного поля, що має пропагатор (Д4.5.13) без урахування радіаційних поправок, та проведіть його перенормування.
5. Доведіть справедливість співвідношення (27.37).
6. Перевірте справедливість співвідношень (27.45).
7. Знайдіть діапазон енергій взаємодіючих частинок, в якому можна використовувати покращений фотонний пропагатор в однопетльовому наближенні. Порівняйте з діапазоном енергій, в якому можна застосовувати покращений електронний пропагатор в однопетльовому наближенні.
8. Перевірте справедливість співвідношень (27.47). Переконайтесь, що  $Im w(k^2 + i\varepsilon)$  можна також знайти з неперенормованої функції (27.27) і результат при цьому не зміниться.

## РОЗДІЛ 28

### Власно-енергетична функція фотона. Розклад Челлена-Лемана. Альтернативні методи розрахунку поляризаційного оператора

Виявляється, що окрім поляризаційного оператора, що був введений нами у попередньому розділі (як вираз для суми частин усіх компактних діаграм, див. (27.6)) і розрахований в однопетльовому наближенні за умови  $k^2 < 4m^2$ , надзвичайно корисною є так звана *власно-енергетична функція фотона*, що визначається з такого графічного рівняння як сума частин усіх діаграм (компактних та некомпактних):

$$\text{~~~~~} \overset{iD^0}{=} = \text{~~~~~} \overset{iD^0}{=} + \text{~~~~~} \textcircled{i\Pi} \text{~~~~~} \overset{iD^0}{=}$$

або на матричному рівні (порівняйте з (27.5)) у імпульсному просторі

$$\mathfrak{D}_{\mu\nu}^0 = D_{\mu\nu}^0 - D_{\mu\alpha}^0 \Pi^{\alpha\beta} D_{\beta\nu}^0, \quad (28.1)$$

або, домноживши зліва та справа на  $(D^0)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) &= (D^0)_{\mu\nu}^{-1} - (D^0)_{\mu\alpha}^{-1} \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta} (D^0)_{\beta\nu}^{-1} = /(\text{27.32}), (\text{27.42})/ = \\ &= \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) k^2 \frac{w}{1+w} = \left( \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) \Pi(k^2). \end{aligned} \quad (28.2)$$

Звідси легко отримати зв'язок між тензором  $\Pi_{\mu\nu}$  та його скалярною складовою  $\Pi$ :

$$\Pi(k^2) = -\frac{1}{3} \sum_{\mu} \Pi^{\mu}_{\mu}(k). \quad (28.3)$$

З виразу (28.2) також випливає, що власно-енергетична функція фотона (як і поляризаційний оператор) не залежить від вибору калібрування (параметра  $\xi$ ). Зокрема маємо корисне співвідношення

$$\Pi(k^2) = k^2 \frac{w}{1+w}. \quad (28.4)$$



Використавши співвідношення (27.43) та (28.4) отримаємо зв'язок між скалярними частинами власно-енергетичної функції та повного фотонного пропагатора:

$$\mathfrak{D}(k^2) = \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{\Pi(k^2)}{k^2} \right). \quad (28.5)$$

Враховуючи, що перенормована скалярна частина повного фотонного пропагатора  $\mathfrak{D}(k^2) = 1/k^2$  при  $k^2 \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} \frac{\Pi(k^2)}{k^2} = 0. \quad (28.6)$$

Розглянемо тепер власно-енергетичну функцію фотона в координатному представленні, яку легко записати використавши запис (28.2):

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (D^0)_{\mu\alpha}^{-1} (D^0)_{\beta\nu}^{-1} (D^{0,\alpha\beta}(k) - \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta}(k)). \quad (28.7)$$

Справді, вираз  $D^{0,\alpha\beta}(k) - \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta}(k)$ , згідно з (27.29), (27.42) є поперечним, тобто  $\sim (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})$ , отже частину з  $\xi$  в (27.32) можна прибрати і тоді

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\alpha - k^2 g_{\mu\alpha})(k_\beta k_\nu - k^2 g_{\beta\nu}) (D^{0,\alpha\beta}(k) - \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta}(k)), \quad (28.8)$$

або в координатному просторі:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(x - x') &= (\partial_\mu \partial_\alpha - g_{\mu\alpha} \partial^\lambda \partial_\lambda) (\partial'_\beta \partial'_\nu - g_{\beta\nu} \partial'^\lambda \partial'_\lambda) \times \\ &\times (D^{0,\alpha\beta}(x - x') - \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta}(x - x')), \end{aligned} \quad (28.9)$$

де похідні беруться за  $x$  та за  $x'$ , оскільки з графічних міркувань точки  $x$  та  $x'$  відповідають різним фотонним пропагаторам  $(D^0)^{-1}$ .

Врахуємо тепер, що

$$\begin{aligned} D^{0,\alpha\beta}(x - x') - \mathfrak{D}^{0,\alpha\beta}(x - x') &= / (2.26), (30.6) / = \\ &= -i \langle 0 | \hat{T} \hat{A}_{int}^\alpha(x) \hat{A}_{int}^\beta(x') - \hat{T} \hat{A}_H^\alpha(x) \hat{A}_H^\beta(x') | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (28.10)$$

де нижні індекси  $int$ ,  $H$  означають представлення взаємодії або Гайзенберга. Незважаючи на те, що хронологічний добуток погано визначений у точці  $x = x'$ , різниця функцій у (28.10) визначена добре, тому

диференцювання можна проводити під знаком хронологічного впорядкування. Використавши рівняння Максвелла в системі одиниць Хевісайда - Лоренца для функцій в представленні Гайзенберга:

$$\partial^\nu \hat{F}_{\mu\nu} = \partial^\nu \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial^\nu \partial_\nu \hat{A}_\mu = -e \hat{j}_\mu, \quad \hat{j}_\mu = \hat{\psi} \gamma_\mu \hat{\psi} \quad (28.11)$$

та врахувавши, що в представленні взаємодії в правій частині цього рівняння буде нуль, отримуємо:

$$\Pi^{\mu\nu}(x - x') = ie^2 \langle 0 | \hat{T} \hat{j}_H^\mu(x) \hat{j}_H^\nu(x') | 0 \rangle. \quad (28.12)$$

Згідно міркувань, аналогічних тим, що були наведені при доведенні справедливості виразу (26.17), можемо записати

$$\Pi^{\mu\nu}(x - x') = ie^2 \frac{\langle 0 | \hat{T} [\hat{j}^\mu(x) \hat{j}^\nu(x') \hat{S}] | 0 \rangle}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle}. \quad (28.13)$$

Тоді на графічному рівні матимемо діаграми Фейнмана, що мають вільні ферміонні кінці (відповідають двом струмам), котрі спарюються зі струмами  $\hat{j}^\mu(x)$  та  $\hat{j}^\nu(x')$ . Наприклад, для нульового, другого та окремих доданків четвертого порядку розкладу  $\hat{S}$  матриці матимемо:

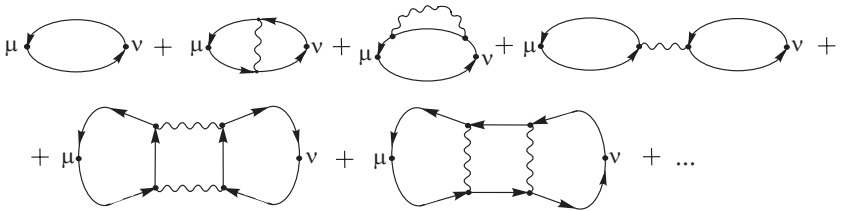


Рис. 28.1 Графічне зображення власно-енергетичної функції фотона  $\Pi^{\mu\nu}$ .

Знайдемо тепер скалярну складову власно-енергетичної функції (28.3), а саме:

$$\Pi(x - x') = -\frac{1}{3} \sum_{\mu} \Pi^{\mu}_{\mu} = -\frac{ie^2}{3} \langle 0 | \hat{T} \hat{j}_H^\mu(x) \hat{j}_{H,\mu}(x') | 0 \rangle. \quad (28.14)$$

У даній вираз можна ставити одиничний оператор (2.9),

$$\Pi(x - x') = -\frac{ie^2}{3} \sum_n \left\{ \begin{array}{ll} \langle 0 | \hat{j}_H^\mu(x) | n \rangle \langle n | \hat{j}_{H,\mu}(x') | 0 \rangle, & t > t', \\ \langle 0 | \hat{j}_H^\mu(x') | n \rangle \langle n | \hat{j}_{H,\mu}(x) | 0 \rangle, & t' > t, \end{array} \right. \quad (28.15)$$

де  $n$  пробігає всі можливі стани в представленні Фока з визначеними значеннями енергії та імпульсу для реальних частинок ферміонів та фотонів. Нерівність нулеві середніх від струмів у представленні Гайзенберга очевидна з наведених вище діаграм<sup>1</sup>, а саме  $\langle 0|\hat{j}_{H,\mu}(x)|n\rangle$  відповідає одній з діаграм на рис. 28.1, що розрізана та має зовнішні лінії, які відповідають стану  $|n\rangle$ .

Залежність від часу оператора струму в представленні Гайзенберга визначається згідно з (Д1.14), тобто

$$\begin{aligned}\langle m|\hat{j}_H^\mu(x^0, \vec{x})|n\rangle &= \langle m|\hat{R}(x^0, 0)^{-1}\hat{j}_H^\mu(0, \vec{x})\hat{R}(x^0, 0)|n\rangle = \\ &= \langle m|\hat{j}_H^\mu(0, \vec{x})|n\rangle e^{-i(E_n - E_m)x^0}.\end{aligned}\quad (28.16)$$

Залежність від просторових координат – за допомогою оператора еволюції:

$$\langle m|\hat{j}_H^\mu(x^0, \vec{x})|n\rangle = \langle m|\hat{j}_H^\mu(x^0, 0)|n\rangle e^{i(\vec{p}_n - \vec{p}_m)\vec{x}}.\quad (28.17)$$

Остаточно, залежність від 4-координати задається у вигляді:

$$\langle m|\hat{j}_H^\mu(x^0, \vec{x})|n\rangle = \langle m|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle e^{-i(p_n - p_m)x}.\quad (28.18)$$

Відповідно, вираз (28.15) можна записати як ( $y = x - x'$ ):

$$\begin{aligned}\Pi(y) &= -\frac{ie^2}{3} \sum_n \left\{ \begin{array}{l} \langle 0|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle \langle n|\hat{j}_{H,\mu}(0)|0\rangle e^{-ip_n y}, \quad t > t', \\ \langle 0|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle \langle n|\hat{j}_{H,\mu}(0)|0\rangle e^{+ip_n y}, \quad t' > t, \end{array} \right. = \\ &= -\frac{ie^2}{3} \sum_n \langle 0|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle \langle n|\hat{j}_{H,\mu}(0)|0\rangle e^{\mp ip_n y}, \quad y^0 \geq 0.\end{aligned}\quad (28.19)$$

де матричні елементи  $\langle 0|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle$  залежать від 4-імпульсу та інших квантових чисел стану  $|n\rangle$ .

Спробуємо знайти Фур'є образ функції  $\Pi$  враховуючи внески проміжних станів. Для цього введемо функцію

$$\rho(k^2) = \frac{e^2}{3} (2\pi)^3 \sum_n \langle 0|\hat{j}_H^\mu(0)|n\rangle \langle n|\hat{j}_{H,\mu}(0)|0\rangle \delta^4(k - p_n),\quad (28.20)$$

<sup>1</sup>Оскільки оператор струму зберігає електричний заряд, то у середнє  $\langle 0|\hat{j}_{H,\mu}(x)|n\rangle$  повинен вводити стан  $|n\rangle$  з нульовим сумарним зарядом, тобто стан повинен містити однакову кількість електронів та позитронів. Враховуючи, що ззовні в точку  $\mu$  входить фотонна лінія, що є зарядово-непарною, то для збереження зарядової парності стан  $|n\rangle$  повинен містити непарну кількість фотонів, див. розд. 8.

де  $p_n$  — 4-імпульс стану  $|n\rangle$ ,  $k = (w, \vec{k})$  — 4-імпульс віртуального фотона, що входить ззовні у точку  $\mu$  відповідної діаграми. Підсумовування за  $n$  означає підсумовування за всіма можливими станами системи електрон-позитронів та фотонів (див. примітку на попередній стор.), за 4-імпульсами, спіральностями, поляризаціями тощо частинок стану  $|n\rangle$ . Наявність  $\delta$ -функції забезпечує виділення з усіх доданків підсумовування за  $n$  станів, що задовольняють закону збереження енергії-імпульсу. Враховуючи, що функція  $\rho$  є скалярною функцією<sup>1</sup>, то після підсумовування за всіма іншими квантовими числами, функція  $\rho$  повинна залежати лише від  $k^2$ .

Використавши означення (28.20), можна записати

$$\Pi(y) = -i \int_0^\infty dw \int_{-\infty}^\infty \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \rho(k^2) e^{-iw|y^0| + i\vec{k}\vec{y}}, \quad (28.21)$$

де ми зробили заміну  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  для випадку  $y^0 < 0$ . Наступним кроком знімемо залежність функції  $\rho$  від  $k^2$

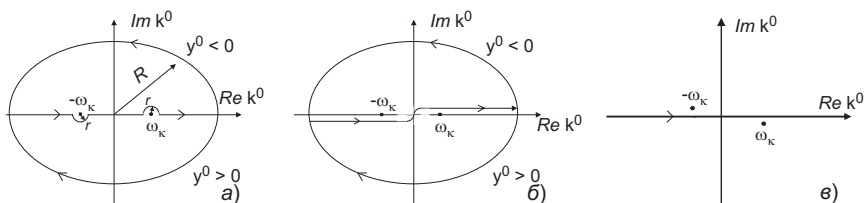
$$\Pi(y) = -i \int_0^\infty dw \int_{-\infty}^\infty \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d(\mu^2) \delta(\mu^2 - k^2) \rho(\mu^2) e^{-iw|y^0| + i\vec{k}\vec{y}} \quad (28.22)$$

та позбавимося знака модуля в експоненті за допомогою співвідношення (2.42) у формі

$$e^{-iw|y^0|} = \frac{i2w}{2\pi} \oint_c dk_0 \frac{e^{-ik_0 y^0}}{k_0^2 - w^2} = \frac{i2w}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk_0 \frac{e^{-ik_0 y^0}}{k_0^2 - w^2 + i\varepsilon}, \quad (28.23)$$

де контур інтегрування заданий на рис. 2.2 і, очевидно, може бути представлений у трьох рівнозначних формах

<sup>1</sup>Не слід думати, що наявність  $\delta$ -функції в (28.20) робить функцію  $\rho$  дискретною, адже кожному значенню  $k^2 > 0$  завжди можна зіставити систему з декількох частинок з загальним 4-імпульсом  $p = k$ .



Отримаємо (28.24)

$$\Pi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dk^0 \left[ \int_0^{\infty} d(w^2) \int_0^{\infty} d(\mu^2) \delta(\mu^2 - k^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2 - w^2 + i\varepsilon} \right] e^{-iky}, \quad (28.25)$$

де вираз у квадратних дужках і є Фур'є образом скалярної складової власно-енергетичної функції

$$\Pi(k^2) = \int_0^{\infty} d(\mu^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (28.26)$$

Величина  $\rho$  отримала назву *спектральної функції*. З визначення (28.20) стає очевидним, що  $\rho(k^2) = 0$  при  $k^2 < 0$ , бо стає неможливим народити частинки в стані  $|n\rangle$ . В силу закону збереження електричного заряду  $\partial^\mu \langle 0 | \hat{j}_{H,\mu}(x) | n \rangle = 0$  матимемо  $p^\mu \langle 0 | \hat{j}_{H,\mu}(0) | n \rangle = 0$ . Однак, 4-вектор  $p^\mu$  є часоподібним ( $p^2 > 0$ ), це означає що 4-вектор  $\langle 0 | \hat{j}_{H,\mu}(0) | n \rangle$  є просторовоподібним, тобто

$$\langle 0 | \hat{j}_H^\mu(0) | n \rangle \langle n | \hat{j}_{H,\mu}(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{j}_H^\mu(0) | n \rangle \langle 0 | \hat{j}_{H,\mu}(0) | n \rangle^* < 0.$$

Отже, врахувавши означення (28.20), матимемо  $\rho(k^2) < 0$  при  $k^2 > 0$ .

Позначимо  $k^2 = z$  та розглянемо тепер властивості скалярної складової власно-енергетичної функції в комплексній площині змінної  $z$ :

$$\Pi(z) = \int_0^{\infty} dz' \frac{\rho(z')}{z - z' + i\varepsilon}. \quad (28.27)$$

Очевидно, що при дійсних від'ємних значеннях  $z$  функція  $\Pi(z)$  є дійсною. При комплексних значеннях  $z$  справедливе співвідношення:

$$\Pi(z^*) = \Pi^*(z). \quad (28.28)$$

Для подальшого розгляду теми слід нагадати правило інтегрування при зсуві полюса у комплексну область:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - x_0} \mp i\pi f(x_0), \quad (28.29)$$

де  $\int$  означає інтеграл в сенсі головного значення по Коші.

Враховавши (28.29) можна стверджувати, що особливі точки функції  $\Pi(z)$  будуть збігатися з особливими точками спектральної функції  $\rho(z)$ . Спектральна функція  $\rho(z)$  може мати особливості при таких значеннях  $z > 0$ , що дозволяють народження нових частинок віртуальним фотоном. Наприклад, значення  $z = 0$  є пороговим значенням для народження непарної кількості фотонів,  $z = 4m^2$  є пороговим для народження електрон-позитронної пари і т.д. Відповідно спектральна функція може мати розриви, коли в суму станів у (28.20) включаються внески від нових частинок. Отже, якщо провести розріз вздовж дійсної додатної піввісі змінної  $z$ , то в усій таким чином розрізаній комплексній площині власно-енергетична функція фотона  $\Pi(z)$  буде аналітичною.

Застосувавши співвідношення (28.29) до визначення власно-енергетичної функції при  $z > 0$  матимемо для верхнього берегу розрізу:

$$\Pi(z + i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho(z')}{z - z'} - i\pi\rho(z), \quad (28.30)$$

тобто для уявних частин рівності можна записати

$$\text{Im}\Pi(z + i\varepsilon) = -\pi\rho(z). \quad (28.31)$$

Для функції на нижньому березі розрізу матимемо

$$\text{Im}\Pi(z - i\varepsilon) = +\pi\rho(z). \quad (28.32)$$

При цьому дійсні частини власно-енергетичної функції на верхньому та нижньому березі розрізу є однаковими:

$$\text{Re}\Pi(z + i\varepsilon) = \text{Re}\Pi(z - i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho(z')}{z - z'}. \quad (28.33)$$

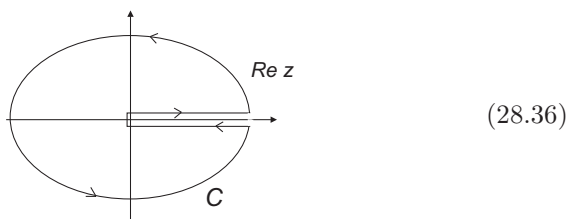
Отже можемо записати для стрибка функції на розрізі

$$\Pi(z + i\varepsilon) - \Pi(z - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} \Pi(z + i\varepsilon) = -2\pi i \rho(z). \quad (28.34)$$

З іншого боку, властивості власно-енергетичної функції дозволяють застосувати формулу Коші

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c dz' \frac{\Pi(z')}{z' - z} \quad (28.35)$$

для довільної точки  $z$  всередині контуру  $C$ :



(28.36)

Справді, якщо вважати, що значення функції прямує до нуля на колі при  $R \rightarrow \infty$ , то матимемо

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c dz' \frac{\Pi(z')}{z' - z} = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_0^\infty dz' \frac{\Pi(z' + i\varepsilon)}{z' + i\varepsilon - z} + \int_\infty^0 dz' \frac{\Pi(z' - i\varepsilon)}{z' - i\varepsilon - z} \right] = \\ &= /(\text{28.28})/ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz' \frac{\operatorname{Im} \Pi(z' + i\varepsilon)}{z' - z} = /(\text{28.34})/ = \int_0^\infty dz' \frac{\rho(z')}{z - z'}. \end{aligned} \quad (28.37)$$

Якщо в якості точки  $z$  взяти точку, уявна частина якої трохи вище лінії верхнього розрізу контуру, то отримаємо визначення власно-енергетичної функції для дійсних значень  $z$  (28.27). Це означає, що при дійсних додатних значеннях  $z$  функції  $\Pi(z)$  слід зіставити значення на верхньому березі розрізу.

Самим головним в наведеному вище є те, що ми отримали *дисперсійне співвідношення*, котре дозволяє відновити значення функції по її уявній частині:

$$\Pi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{Im\Pi(z')}{z' - z - i\varepsilon}, \quad (28.38)$$

де аргумент власно-енергетичної функції має нескінченно малу додатну уявну частину (задані на верхній частині розрізу).

Корисно записати співвідношення (28.37) в узагальненому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_c dz' \frac{\Pi(z')}{F'(z')(z' - z)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{Im\Pi(z' + i\varepsilon)}{F'(z')(z' - z)} = \\ &= \sum_i \frac{\Pi(z_i)}{F'(z_i)(z_i - z)} + \frac{\Pi(z)}{F(z)}, \end{aligned} \quad (28.39)$$

або

$$\Pi(z) = Q(z) + \frac{F(z)}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{Im\Pi(z' + i\varepsilon)}{F'(z')(z' - z)}, \quad (28.40)$$

де  $F(z)$  – довільний поліном,  $z_i$  – корені полінома  $F(z)$ ,

$$Q(z) = -F(z) \sum_i \frac{\Pi(z_i)}{F'(z_i)(z_i - z)}. \quad (28.41)$$

Візьмемо в якості полінома  $F(z) = z^2$ , тоді, з урахуванням (28.6) отримаємо співвідношення

$$\frac{\Pi(z)}{z^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{Im\Pi(z' + i\varepsilon)}{z'^2(z' - z)} = /(\text{28.34})/ = \int_0^{\infty} dz' \frac{\rho(z')}{z'^2(z' - z)}, \quad (28.42)$$

за допомогою якого легко записати інтегральне представлення для скалярної частини повного фотонного пропатора (28.5):

$$\mathfrak{D}(z) = \frac{1}{z + i\varepsilon} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{Im\Pi(z' + i\varepsilon)}{z'^2(z' - z - i\varepsilon)} = \frac{1}{z + i\varepsilon} - \int_0^{\infty} \frac{\rho(z') dz'}{z'^2(z' - z - i\varepsilon)}, \quad (28.43)$$

де поява  $i\varepsilon$  пов'язана з тим, що при додатних  $z = k^2$  функція визначена на верхньому березі розрізу ( $z \rightarrow z + i\varepsilon$ ). Співвідношення (28.43) отримало назву *розкладу Челлена-Лемана*.



Враховавши співвідношення (28.5), можна зробити висновок, що аналітичні властивості функції  $w(z)$  збігаються з властивостями  $\Pi(z)$ , відповідно можна записати:

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{\text{Im } w(z' + i\epsilon)}{z' - z - i\epsilon}. \quad (28.44)$$

Цікаво відзначити, що можна спочатку розрахувати уявну частину функції  $w$  (далі буде показано) і вона не міститиме розбіжностей. Розбіжності виникнуть при обчисленні інтегралу (28.44), однак їх можна уникнути та одразу отримати регуляризований вираз перевизначивши інтеграл таким чином:

$$w^{reg}(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{\text{Im } w(z' + i\epsilon)}{z'(z' - z - i\epsilon)}. \quad (28.45)$$

Справді, враховавши, що

$$\frac{z}{z'^2(z' - z)} = \frac{1}{z' - z} - \frac{1}{z'} \quad (28.46)$$

отримаємо

$$w^{reg}(z) = w(z) - w(0). \quad (28.47)$$

## Альтернативні методи розрахунку поляризаційного оператора

### Використання умови унітарності

Наведемо переваги використання дисперсійних співвідношень та розрахуємо поляризаційний оператор в однопетльовому наближенні шляхом знаходження його уявної частини. Для цього при описі петльової поправки до лінії фотонного пропагатора з  $k^2 > 0$  останню можна розуміти як лінію реальної частинки масивного векторного бозона з масою  $M^2 = k^2$  (відповідно, з трьома можливими поляризаційними станами). Тоді для амплітуди, що описує розповсюдження масивного бозона з петльовою поправкою можна записати співвідношення (12.91):

$$Im[M_{ii}] = \frac{1}{2^5 \pi^2} \sum_{\text{поляр.}} \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}| d\Omega}{M}, \quad (28.48)$$

якому відповідає наступне діаграмне співвідношення

$$Im \left[ \text{Diagram 1} \right] \sim \sum_{\text{поляр.}} \left| \text{Diagram 2} \right|^2 \quad (28.49)$$

де в лівій частині (28.48) амплітуда  $M_{ii}$  відповідає лівій частині діаграми з однаковим початковим та кінцевим станом, а амплітуді  $M_{fi}$  в правій частині (28.48) відповідає діаграма в правій частині (28.49), що описує розпад масивного векторного бозона на електрон-позитронну пару. При цьому повинна виконуватися умова  $k^2 > 4m^2$ .

Для усередненої за поляризаціями амплітуди процесу в лівій частині (28.48) можна записати

$$\begin{aligned} iM_{ii} &= \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\mu,\lambda} i\mathcal{P}_{\mu\nu} \epsilon^{*\nu,\lambda} = /(\text{27.15}), (\text{Д4.1.17})/ = \\ &= -i \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \left( g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) w(k^2) = ik^2 w(k^2). \end{aligned} \quad (28.50)$$

Отже

$$Im M_{ii} = k^2 Im w(k^2). \quad (28.51)$$

Амплітуда процесу розпаду масивного векторного бозона на електрон-позитронну пару у правій частині (28.48) дорівнює

$$M_{fi} = -e \bar{v}_{-p+}^{\xi+} \gamma^\mu v_{p-}^{\xi-} \epsilon_\mu^\eta, \quad M_{fi}^+ = e \bar{v}_{p-}^{\xi-} \gamma^\nu v_{-p+}^{\xi+} \epsilon_\nu^{*\eta}. \quad (28.52)$$

Використавши (4.9) та (14.3), отримаємо

$$|M_{fi}|^2 = e^2 Tr[\gamma^\mu \rho^{+1,\xi-} \gamma^\nu \rho^{-1,\xi+}] \epsilon_\mu^\eta \epsilon_\nu^{*\eta} \quad (28.53)$$

Усереднимо за поляризаційними станами векторного бозона та підсумуємо за спіральними станами електрона ( $\xi_-$ ) та позитрона ( $\xi_+$ ), от-

римаємо

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}|^2 &\rightarrow \frac{1}{3} \sum_{\xi_-, \xi_+, \eta} = \frac{e^2}{3} \text{Tr}[\gamma^\mu(m + \not{p}_-)\gamma^\nu(m - \not{p}_+)] \left( g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right) = \\
 &= \frac{e^2}{3} \text{Tr}[\gamma^\mu(m + \not{p}_-)\gamma_\mu(m - \not{p}_+)] = /(\mathbf{16.16})/ = \frac{8e^2}{3}(2m^2 + p_-p_+),
 \end{aligned} \tag{28.54}$$

де ми відкинули доданки  $\sim k_\nu$  як такі, що дають нульову згортку з ферміонним струмом  $k_\nu j^\nu = k_\nu = 0$ . Значення 4-імпульсів знаходяться з умови  $k = p_- + p_+$ . В системі центру мас матимемо:  $\sqrt{k^2} = M = \varepsilon_- + \varepsilon_+$ ,  $\vec{p}_- + \vec{p}_+ = 0$ . Для зручності позначимо  $\vec{p} = \vec{p}_- = -\vec{p}_+$ . Модуль вектора  $\vec{p}$  знаходиться однозначно згідно з (12.12), а за його напрямком відбувається інтегрування за  $d\Omega$ .

Отже права частина (28.48), після інтегрування за  $d\Omega$ , дорівнюватиме

$$\frac{1}{2^5 \pi^2} \sum_{\text{поляри.}} \frac{|M_{fi}|^2 |\vec{p}| d\Omega}{M} = \frac{4\alpha}{3} \frac{|\vec{p}|}{M} (2m^2 + p_-p_+). \tag{28.55}$$

Остаточно, вираз (28.48) запишемо у вигляді

$$\text{Im } w(k^2) = \frac{4\alpha}{3} \frac{|\vec{p}|}{(k^2)^{3/2}} (2m^2 + p_-p_+). \tag{28.56}$$

Позначивши  $x = k^2 = (p_- + p_+)^2 = 2(m^2 + p_-p_+)$ ,  $|\vec{p}| = \sqrt{x - 4m^2}/2$ , отримаємо

$$\text{Im } w(z) = \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{x - 4m^2}{z}} \cdot \frac{2m^2 + x}{x}, \quad x > 4m^2. \tag{28.57}$$

Як бачимо, уявна частина  $w$  справді не містить розбіжних величин. Знайдена нами уявна частина функції відповідає фізичному значенню  $\text{Im } w(k^2 + i\varepsilon)$ .

Функція  $w$  матиме уявну частину лише при  $k^2 > 4m^2$ , що є пороговим значенням для народження електрон-позитронної пари. Отже дисперсійне співвідношення (28.45) можна записати як

$$w^{\text{reg}}(z) = \frac{\alpha z}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} dz' \frac{2m^2 + z'}{z'^2(z' - z - i\varepsilon)} \sqrt{\frac{z' - 4m^2}{z'}}. \tag{28.58}$$

Щоб уникнути проблем в точці  $z = z'$ , розглянемо інтеграл при  $z < 0$ . В цьому випадку доданок  $i\varepsilon$  є несуттєвим і його можна відкинути. Перейшовши до безрозмірної змінної інтегрування  $z'/4m^2 = 1/(1-x^2)$  та аргументу функції  $z = m^2y$ , отримуємо:

$$w^{reg} = \frac{\alpha y}{3\pi} \int_0^1 dx \frac{x^2(3-x^2)}{4-y(1-x^2)}, \quad (28.59)$$

що й відновлює значення (27.44) в області  $z < 0$ . В області  $z > 0$  використовується та сама функція – робиться її аналітичне продовження. Звертаємо увагу – в даному підході ми явно не виконували процедуру перенормування.

### Правило Каткоського

Вираз для поляризаційного співвідношення задається (27.11), з якого випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \mathcal{P}_{\mu}^{\mu}(k) &= /(\text{27.15})/ = -3k^2 w(k^2) = \\ &= i \frac{8e^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p \frac{2m^2 + (pk) - p^2}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (28.60)$$

або

$$k^2 w(k^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p)}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\varepsilon)}, \quad (28.61)$$

де

$$\varphi(p) = -\frac{e^2}{6\pi^4} (2m^2 + pk - p^2). \quad (28.62)$$

Ми будемо шукати уявну частину функції  $w$ , тому розглядатимو випадок  $k^2 > 0$ . Перейдемо у систему відліку, коли  $k = (k_0, 0)$ , тоді

$$m^2 - (p-k)^2 = m^2 + \vec{p}^2 - (p_0 - k_0)^2 = E^2 - (p_0 - k_0)^2, \quad (28.63)$$

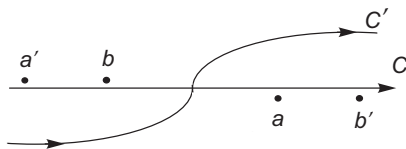
де  $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$  – формальне позначення. Тоді можна записати

$$k^2 w(k^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{i\varphi(p)}{(E^2 - p_0^2 - i\varepsilon)(E^2 - (p_0 - k_0)^2 - i\varepsilon)}. \quad (28.64)$$

Даний вираз має 4 полюси відносно змінної  $p_0$ , а саме:

$$\begin{aligned} a) \quad p_0 &= E - i\varepsilon, & a') \quad p_0 &= -E + i\varepsilon, \\ b) \quad p_0 &= k_0 - E + i\varepsilon, & b') \quad p_0 &= k_0 + E - i\varepsilon. \end{aligned} \quad (28.65)$$

На рис. нижче вказано розташування полюсів за умови  $k_0 > 0$  (знак  $k_0$  не є принциповим, оскільки  $w = w(k^2)$ ) та зображено проходження контуру інтегрування в комплексній площині  $p_0$ , згідно з формалізмом наведеним у розд. 2.



Згідно з наведеним вище формалізмом уявну частину функції  $w$  можна знайти як

$$w(x + i\varepsilon) - w(x - i\varepsilon) = 2i \operatorname{Im} w(x + i\varepsilon), \quad x = k^2 > 0. \quad (28.66)$$

З наведеного рис. випливає, що при зазначеному розташуванні полюсів значення інтегрування суттєво не зміниться, якщо точки  $b$  та  $b'$  (їх розташування залежить від  $k_0$ ) трохи змістяться в комплексній площині (піднімуться або спустяться по вертикальній вісі). А отже  $w(x + i\varepsilon) - w(x - i\varepsilon) = 0$ , бо контур  $C$ , який проходить поблизу полюсів, можна деформувати у контур  $C'$ , який проходить віддалено від полюсів, а значить невелика зміна розташування полюсів не має вплинути на значення інтегрування.

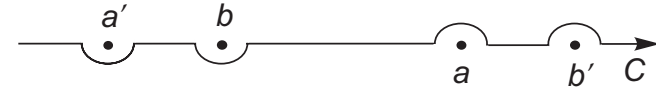
Можна задати питання: при якому розташуванні полюсів їх невелике зміщення може призвести до суттєвої зміни значення інтегрування? Відповідь очевидна: полюси повинні бути розташовані так, щоб контур був затиснутий між ними і його не можна було відвести від точок полюсів. Описаній ситуації відповідає випадок, коли точка  $b$  розташована над точкою  $a$ , тобто коли

$$k_0 - E = E, \quad \text{або} \quad k_0 = 2E = 2\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \quad (28.67)$$

Як бачимо, дана умова означає, що стрибок функції та уявна частина у  $w$  з'явиться лише у випадку  $k_0 > 2m$ , що й повинно бути. З

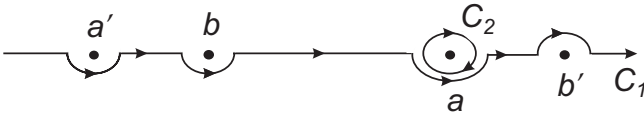
іншого боку, виникнення стрибка функції безпосередньо пов'язане з неможливістю відвести контур інтегрування від точки  $a$ , коли точка  $b$  розташована над точкою  $a$ .

Розглянемо, чому саме буде дорівнювати стрибок функції, коли точка  $b$  розташована над точкою  $a$ . Для цього приберемо  $i\epsilon$  у знаменнику виразу (28.64) змінивши контур інтегрування таким чином:



$$k^2 w(k^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_C dp_0 \frac{i\varphi(p)}{(E^2 - p_0^2)(E^2 - (p_0 - k_0)^2)} = I(k_0, \vec{k}) \quad (28.68)$$

Щоб відвести контур інтегрування від точки  $a$  модифікуємо контур так, щоб виділити контур  $C_2$  наколо точки  $a$  та контур  $C_1$ , який можна довільним чином відвести вниз від точки  $a$ . Очевидно, що  $\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$ .



Таким чином ми виділили частину функції, що не змінюватиметься при нескінченно малих зміщенні точок полюсів (задається інтегруванням за  $C_1$ ) та частину іфункції, що буде при цьому змінюватися (задається інтегруванням за  $C_2$ ). Тоді стрибок при нескінченно малому зсуві точок полюсів буде давати лише частина функції, що визначається інтегруванням за контуром  $C_2$ . Однак інтегрування за контуром  $C_2$  це просто лишок функції в точці  $a$ , для знаходження якого у підінтегральному виразі можна, згідно з (12.100), просто замінити:

$$\frac{1}{p_0^2 - E^2} \rightarrow -2\pi i \delta(E^2 - p_0^2), \quad (28.69)$$

де знак мінус пов'язаний з напрямком обходу контуру. При цьому нам потрібен буде лише доданок з  $p_0 = +E$  (обхід навколо точки  $a$ ), що можна автоматично забезпечити, якщо інтегрування за  $p_0$  прводити від нуля до нескінченності.

Відповідно, уявну частину функції можна знайти як

$$2k^2 \text{Im } w(k^2) = I(k_0 + i\varepsilon, \vec{k}) - I(k_0 - i\varepsilon, \vec{k}) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_0^{\infty} dp_0 \delta(E^2 - p_0^2) \\ \times \varphi(p) \left[ \frac{1}{(p_0 - k_0)^2 - E^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p_0 - k_0)^2 - E^2 - i\varepsilon} \right]. \quad (28.70)$$

Застосовавши (12.106), можна записати:

$$\frac{1}{(p_0 - k_0)^2 - E^2 \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{(p_0 - k_0)^2 - E^2} \mp i\pi \delta((p_0 - k_0)^2 - E^2), \quad (28.71)$$

за допомогою якого отримуємо:

$$2k^2 \text{Im } w(k^2) = (2\pi i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_0^{\infty} dp_0 \delta(E^2 - p_0^2) \delta((p_0 - k_0)^2 - E^2) \varphi(p) = \\ = /E^2 = m^2 + \vec{p}^2 / = (2\pi i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{p} \int_0^{\infty} dp_0 \delta(p^2 - m^2) \delta((p - k)^2 - m^2) \varphi(p), \quad (28.72)$$

де останній вираз записаний у Лоренц-інваріантній формі.

Як бачимо, вираз для уявної частини функції  $w$  отримується шляхом заміни

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2), \\ \frac{1}{(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((p - k)^2 - m^2).$$

Саме в цьому і полягає *правило Каткоського*.

Звертаємо також увагу, що інтегрування в (28.72) відбувається по області, що являє собою перетин двох гіперповерхонь, кожна з яких обмежує область можливих 4-імпульсів віртуальних частинок до такої, що задовольняє реальним частинкам. Очевидно, що правило Каткоського можна застосовувати і до знаходження уявної частини більш складних діаграм – вимагається лише, щоб два довільних блоки діаграми були зв'язані двома лініями (ферміонними або фотонними). Той

факт, що у правилі Каткоського знаходиться уявна частина певної діаграми через вирази, де віртуальні частинки замінюються на реальні, вказує на зв'язок зазначених правил з умовою унітарності, див. розд. 12.

Знайдемо тепер уявну частину  $w$  за допомогою (28.72). Для цього знову перейдемо у систему відліку, де  $k = (k_0, 0)$  та врахуємо, що  $|\vec{p}| d|\vec{p}| = E dE$ , згідно з (12.100):

$$\delta(p_0^2 - E^2) = \frac{\delta(p_0 - E)}{2E}, \quad \delta((p_0 - k_0)^2 - E^2) = \delta(-2k_0E + k_0^2) = \frac{\delta(E - k_0/2)}{2k_0}.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} 2k^2 \text{Im } w(k^2) &= (2\pi i)^2 \int_0^\infty |\vec{p}| E dE \int_0^\infty dp_0 \int d\Omega \frac{\delta(p_0 - E)}{2E} \frac{\delta(E - k_0/2)}{2k_0} \varphi(p) = \\ &= -\pi^2 \int d\Omega \frac{|\vec{p}|}{k_0} \varphi(E, \vec{p}). \end{aligned} \quad (28.73)$$

У системі відліку, де  $k = (k_0, 0)$ , матимемо  $p = (E, \vec{p}) = (k_0/2, \vec{p})$ ,  $k - p = (k_0/2, -\vec{p})$ , відповідно:

$$\varphi(E, \vec{p}) = /(\text{28.62})/ = -\frac{e^2}{6\pi^4} (2m^2 + p(k-p)) = -\frac{e^2}{6\pi^4} (2m^2 + k_0^2/4 + \vec{p}^2), \quad (28.74)$$

що дозволяє провести інтегрування за  $d\Omega$ :

$$k^2 \text{Im } w(k^2) = \frac{e^2}{3\pi} \frac{|\vec{p}|}{k_0} (2m^2 + k_0^2/4 + \vec{p}^2). \quad (28.75)$$

Щоб перейти до довільної системи відліку зазначимо, що в системі відліку  $k = (k_0, 0)$  можна записати  $k_0^2 = k^2$ ,  $E = k_0/2 = \sqrt{k^2}/2$ ,  $\vec{p}^2 = k_0^2 - m^2 = k^2/4 - m^2$ . З урахуванням наведеного можна легко відновити вираз (28.57) в області  $k^2 > 4m^2$ :

$$\text{Im } w(k^2) = \frac{\alpha}{3} \sqrt{\frac{k^2 - 4m^2}{k^2}} \cdot \frac{2m^2 + k^2}{k^2}. \quad (28.76)$$

Таким чином, ми знайшли уявну частину функції  $w$  поляризаційного оператора без виконання громіздкого інтегрування згідно з (27.11), (28.60).



**Завдання**

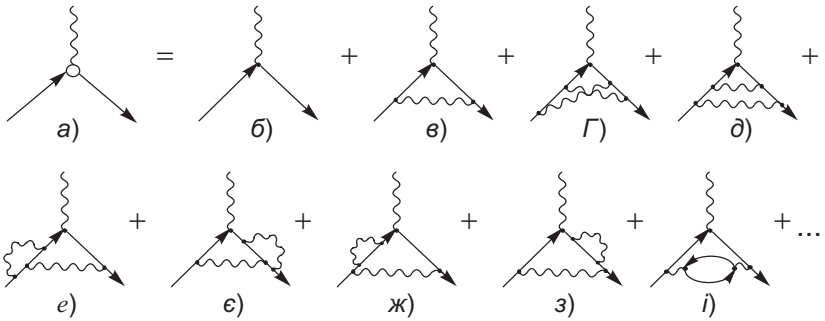
1. Напишіть графічний вираз для власно-енергетичної функції фотона за аналогією з виразом (27.8).
2. Доведіть справедливість співвідношення (28.2).
3. Покажіть, що вираз (28.10) добре визначений при  $x = x'$ .
4. Чому відповідатиме вираз  $F(z) = \frac{z^2}{\pi} \int_0^{\infty} dz' \frac{\text{Im} F(z'+i\epsilon)}{z'^2(z'-z-i\epsilon)}$  з позиції перенормування.

## РОЗДІЛ 29

### Вершинна функція

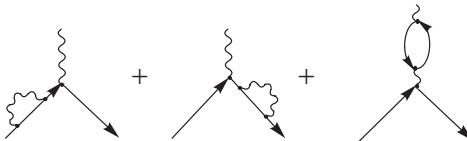
При спробі описати процеси електрон-фотонного розсіяння (розд. 26) та електрон-електронного розсіяння (розд. 27) з урахуванням всіх порядків теорії збурень ми зіткнулися з необхідністю ввести поняття точного електронного та точного фотонного пропагаторів, які були нами розраховані у першому неznикаючому наближенні. Однак при аналізі всіх можливих поправок при описі даних процесів було зазначено необхідність враховувати також поправки і до вершин діаграм.

Позначимо колом вершину, у якій враховані всі поправки вищих порядків та запишемо їх до п'ятого порядку теорії збурень включно.



**Рис. 29.1.** Запис повної вершинної функції через складові діаграми до п'ятого порядку теорії збурень включно.

Таку вершину називатимемо *повною вершинною функцією*. Звичайно, ми не враховуємо до повної вершинної функції діаграми типу



оскільки ці діаграми містять лише поправки до електронної та фотонної ліній.

Без поправок у вищих порядках теорії збурень, згідно з діагiamoною технікою Фейнмана, вершині відповідає величина  $-ie\gamma^\mu$ . Відповідно, вершині з урахуванням всіх поправок будемо зіставляти  $-ie\Gamma^\mu$ , де  $\Gamma^\mu$  – повна вершинна функція. Очевидно, що її можна представити як

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu, \quad (29.1)$$

де  $\Lambda^\mu$  – матриця  $4 \times 4$ , елементи якої будуть залежати від імпульсів ферміонних та фотонних ліній, з якими вершина поєднана. Домовимося першим аргументом вершинної функції ставити 4-імпульс ферміонної лінії, що входить у вершину, другим аргументом – 4-імпульс ферміонної лінії, що виходить з вершини. Третій аргумент – 4-імпульс фотонної лінії, як правило не вказують, оскільки при заданому напрямку фотонної лінії, відповідний імпульс визначається з закону збереження 4-імпульсу у вершині.



The diagram shows a central vertex labeled with the Greek letter mu (μ). A wavy line representing a photon enters from the top, labeled with momentum q = p' - p. Two straight lines representing fermions enter from the bottom-left and bottom-right, labeled with momenta p and p' respectively. To the right of the diagram is the equation: = -ieΓ^μ(p', p, q) (28.2)

Звертаємо увагу, що всі три лінії, з якими поєднана вершина, не можуть відповідати реальним частинкам. Це суперечить закону збереження енергії-імпульсу, див. завдання 6.1.

Як бачимо з рис. 29.1 у записі повної вершинної функції ми не можемо розділити діаграми на компактні та некомпактні, як ми це робили у випадку визначення повних пропагаторів електронного та фотонного полів. У нашому випадку діаграми слід розділити на *звідні* та *незвідні*. Звідні діаграми – це діаграми, що містять поправки до електронної чи фотонної ліній, а також до вершини. Незвідні діаграми – це діаграми в яких не можна виділити зазначених поправок. Зокрема у наведеному розкладі повної вершинної функції незвідними діаграмами є лише діаграми (б, в, г), діаграма (д) містить поправку до верхньої вершини, діаграми (е, є) – до бічних вершин, діаграми (ж, з) – до внутрішніх електронних ліній, діаграма (і) – до внутрішньої фотонної лінії.

Можна побачити, що замінивши у незвідних діаграмах внутрішні лінії на повні електронні та фотонні функції, а вершини – на повну вершинну функцію (побудовані таким чином діаграми називають

скелетними) ми отримуємо сукупність усіх вершинних діаграм, див. рис. 29.2.

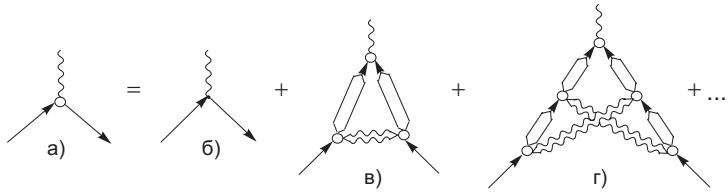


Рис. 29.2. Запис повної вершинної функції через звідні діаграми.

Як видно з рис. 29.2, ми не можемо виписати простих "замкнених" рівнянь на повну вершинну функцію на зразок рівнянь Дайсона (26.6), (27.4), оскільки повна вершинна функція у правій стороні такого рівняння буде входити нескінченне число разів.

Знайдемо перше незникаюче наближення до повної вершинної функції, а саме розрахуємо діаграму (в) на рис. 29.1, що являє собою діаграму у третьому порядку за теорією збурень. Для запису відповідного виразу використаємо наступні діаграми (без зовнішніх ліній) та їх математичні записи:



$$\begin{aligned}
 (-ie)(2\pi)^4 \Gamma^\mu &= (-ie)(2\pi)^4 (\gamma^\mu + \Lambda^\mu) = (-ie)(2\pi)^4 \gamma^\mu + \\
 &+ (-ie)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \gamma^\chi (-i)G(p' - k) \gamma^\mu (-i)G(p - k) \gamma^\sigma iD_{\sigma\chi}^0(k), \quad (29.3)
 \end{aligned}$$

з яких випливає (див. (29.1)), що

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \gamma^\chi G(p' - k) \gamma^\mu G(p - k) \gamma^\sigma D_{\sigma\chi}^0(k). \quad (29.4)$$

Множник  $(2\pi)^4$  поблизу  $\Gamma^\mu$  у (29.3) був введений як множник, що відповідає діаграмі з однією вершиною та без внутрішніх ліній для того,

щоб  $\gamma$ -матрицю у вершині діаграми можна було замінити на повну вершинну функцію  $\Gamma$  без змін правил діаграмної техніки Фейнмана. Звертаємо увагу, що отриманий вираз узгоджується з раніше отриманим загальним виразом (25.16).

Для подальшого розрахунку вважатимемо фотон масивним та використаємо запис фотонного пропагатора у формі (Д4.5.14)

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \left[ \frac{\gamma^\sigma(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\sigma}{(m^2 - (p' - k)^2)(m^2 - (p - k)^2)(m_A^2 - k^2)} + (1 - \xi) \frac{\not{k}(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\not{k}}{(m^2 - (p' - k)^2)(m^2 - (p - k)^2)(m_A^2 - k^2)(\xi m_A^2 - k^2)} \right]. \quad (29.5)$$

Розглянемо найпростіший випадок калібрування Фейнмана  $\xi = 1$

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{\gamma^\sigma(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\sigma}{(m^2 - (p' - k)^2)(m^2 - (p - k)^2)(m_A^2 - k^2)} \quad (29.6)$$

та будемо вважати, що у (29.2) ферміонні лінії відповідають реальним частинкам, тобто

$$p^2 = p'^2 = m^2, \quad q^2 = (p' - p)^2 = 2(m^2 - pp') \leq 0, \quad (29.7)$$

де остання нерівність впливає з розгляду добутку  $pp'$  в довільній системі відліку, наприклад, коли один з ферміонів покоїться.

Для розрахунку виразу у чисельнику (29.6)

$$A^\mu = \gamma^\sigma(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\sigma = \gamma^\sigma(\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\sigma - \{\gamma^\sigma\not{k}\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\sigma + \gamma^\sigma(\not{p}' + m)\gamma^\mu\not{k}\gamma_\sigma\} + \gamma^\sigma\not{k}\gamma^\mu\not{k}\gamma_\sigma. \quad (29.8)$$

використаємо, що у виразі для амплітуди певного процесу повна вершинна функція (29.2) буде входити в комбінації  $\bar{v}(p')\Gamma^\mu v(p)$ . Враховуючи, що одночастинкова ферміонна функція  $\Psi(x) = v(p)e^{-ipx}$ , з рівняння Дірака для вільної частинки (Д5.1), (Д5.10) отримаємо:

$$(\not{p} - m)v(p) = 0, \quad \bar{v}(p')(\not{p}' - m) = 0. \quad (29.9)$$

Отже, у виразі (29.8) необхідно величини  $\not{p}'$  та  $\not{p}$  перемістити у ліву та праві частини відповідно та використати (29.9). Наприклад,

$$\begin{aligned}
A_1^\mu &= \gamma^\sigma (\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma_\sigma = [\gamma^\sigma \gamma^\alpha p'_\alpha + \gamma^\sigma m] \gamma^\mu [\gamma_\beta \gamma_\sigma p^\beta + \gamma_\sigma m] = \\
&= [2g^{\sigma\alpha} p'_\alpha - \gamma^\alpha \gamma^\sigma p'_\alpha + \gamma^\sigma m] \gamma^\mu [2g_{\sigma\beta} p^\beta - \gamma_\sigma \gamma_\beta p^\beta + \gamma_\sigma m] = \\
&= [2p'^\sigma - (\not{p}' - m) \gamma^\sigma] \gamma^\mu [2p_\sigma - \gamma_\sigma (\not{p} - m)] = /(\text{29.9})/ = 4\gamma^\mu (\not{p}' p). \quad (29.10)
\end{aligned}$$

Наведемо відповідь для інших складових виразу (29.8)

$$\begin{aligned}
& - \{ \gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma_\sigma + \gamma^\sigma (\not{p}' + m) \gamma^\mu \not{k} \gamma_\sigma \} = \\
& \quad = -4mk^\mu + 4(p + p')^\mu \not{k} - 4(p'k) \gamma^\mu - 4(pk) \gamma^\mu, \quad (29.11)
\end{aligned}$$

$$\gamma^\sigma \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma_\sigma = /(\text{14.8})/ = -4k^\mu \not{k} + 2\gamma^\mu k^2 \quad (29.12)$$

та остаточний вираз

$$A^\mu = 4 \left[ \gamma^\mu \left\{ (p' - k)(p - k) - \frac{k^2}{2} \right\} + (p + p' - k)^\mu \not{k} - mk^\mu \right]. \quad (29.13)$$

Підставимо отриманий вираз для  $A^\mu$  у (29.6) та використаємо техніку обрахунку інтегралів за допомогою  $\alpha$ -представлення, а саме:

$$\frac{1}{m^2 - (p' - k)^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha_1 e^{i\alpha_1((p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{m^2 - (p - k)^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha_2 e^{i\alpha_2((p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{m_A^2 - k^2 - i\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha_3 e^{i\alpha_3(k^2 - m_A^2 + i\varepsilon)}.$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu(p', p) &= \frac{\alpha}{\pi^3} \int_{-\infty}^\infty d^4k \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty d\alpha_3 e^{i(Ak^2 + 2Bk - M^2)} \times \\
& \quad \times \left[ \gamma^\mu P + P_\nu k^\nu + \bar{P}_\nu k^\mu k^\nu + \frac{\gamma^\mu}{2} k^2 \right], \quad (29.14)
\end{aligned}$$

де

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad B = -\alpha_1 p' - \alpha_2 p, \quad M^2 = \alpha_3 m_A^2, \quad (29.15)$$

$$P = (pp'), \quad \bar{P}_\nu = -\gamma_\nu, \quad (29.16)$$

$$P^\nu = (p + p')^\mu \gamma^\nu - (p + p')^\nu \gamma^\mu - mg^{\nu\mu}. \quad (29.17)$$

Проінтегруємо вираз (29.14) за 4-імпульсом  $k$  згідно з (22.4) – (22.7) та отримуємо

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{A^2} e^{-iA^{-1}[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 m^2 - \alpha_1 \alpha_2 q^2 + \alpha_3 A m_A^2]} \times$$

$$\left[ \gamma^\mu \left( (pp') - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2A} (p + p')^2 + \frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - q^2 \alpha_1 \alpha_2}{2A^2} + \frac{i}{2A} \right) + \right.$$

$$\left. + m \left( \frac{\alpha_2 p'^\mu + \alpha_1 p^\mu}{A} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\alpha_1 p'^\mu + \alpha_2 p^\mu}{A^2} \right) \right], \quad (29.18)$$

де для запису показника експоненти ми використали  $(pp') = /(\text{29.7})/ = m^2 - q^2/2$ .

Враховуючи, що вираз у показнику експоненти є інваріантним відносно заміни змінних інтегрування  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ , ми можемо суттєво спростити підінтегральний вираз у дужках поблизу масового множника роблячи в окремих доданках заміну  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ :

$$\frac{\alpha_2 p'^\mu + \alpha_1 p^\mu}{A} - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\alpha_1 p'^\mu + \alpha_2 p^\mu}{A^2} = (p + p')^\mu \alpha_1 \left[ \frac{1}{A} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{A^2} \right]. \quad (29.19)$$

Можна розрахувати інтеграл від отриманого виразу з загальним множителем  $\alpha_1$ , а можна зробити заміну  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ . Значення інтегралу не зміниться. Нам зручно знайти півсуму інтегралів з зовнішніми множниками  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$ . Тоді (29.19) зведеться до вигляду

$$(p + p')^\mu \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2A^2} [A - (\alpha_1 + \alpha_2)] = (p + p')^\mu \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3}{2A^2}. \quad (29.20)$$

В результаті вираз (29.18) зведеться до

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{A^2} e^{-iA^{-1}[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 m^2 - \alpha_1 \alpha_2 q^2 + \alpha_3 A m_A^2]} \times$$

$$\left[ \gamma^\mu \left( (pp') - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2A} (p + p')^2 + \frac{m^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - q^2\alpha_1\alpha_2}{2A^2} + \frac{i}{2A} \right) + m(p + p')^\mu \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3}{2A^2} \right]. \quad (29.21)$$

Використавши заміну  $\alpha_1 = xR$ ,  $\alpha_2 = yR$ ,  $\alpha_3 = zR$  згідно з (22.9), отримуємо:

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i\alpha}{\pi} \int_0^\infty dR \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) \times \\ \left[ \gamma^\mu \left( (pp') - \frac{x + y}{2} (p + p')^2 + \frac{m^2(x + y)^2 - q^2xy}{2} + \frac{i}{2R} \right) + m(p + p')^\mu \frac{(x + y)z}{2} \right] e^{-iR[(x + y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2]}. \quad (29.22)$$

Наступний крок – інтегрування за змінною  $R$  згідно з (22.17). Звертаємо увагу, що величина  $D = (x + y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2$  в показнику експоненти більше нуля, оскільки  $q^2 \leq 0$  згідно з (29.7). Однак, наявність у підінтегральному виразі доданку  $i/(2R)$  дає логарифмічну розбіжність на нижній границі інтегрування, що виділяє нескінченний доданок у (29.22) виду  $\sim \ln \left[ \frac{\Lambda^2}{m^2} \right]$ , де  $\Lambda^2 \gg m^2$ . Це означає, що необхідно виконати процедуру перенормування.

### Завдання

1. Наведіть зразки діаграм, що слід додати до діаграм представлених на рис. 29.2 для більш точного запису повної вершинної функції.
2. Переконайтесь у справедливості виразу (29.13).
3. Переконайтесь у справедливості виразу (29.18).



## РОЗДІЛ 30

### Рівняння Дайсона.

### Тотожності Уорда та Уорда-Такахаші. Радіаційні поправки до ліній реальних частинок. Визначення фізичного заряду

#### Рівняння Дайсона

Розглянуті у попередніх розділах поняття точних пропагаторів електронного та фотонного полів, повної вершинної функції не є величинами незалежними одна від одної. Щоб переконатися в цьому явно, застосуємо для розгляду точних пропагаторів поділ діаграм на звідні та незвідні.

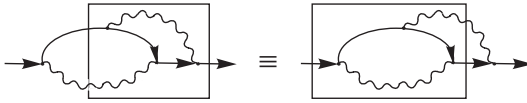
Для початку розглянемо точний пропагатор електронного поля. При його розрахунку є ключовим поняття масового оператора, що являє собою суму усіх компактних діаграм, див. (26.18). Легко побачити, що кожна з наведених компактних діаграм насправді містить поправки до внутрішньої електронної, фотонної лінії або вершини діаграми



Відповідно, масовий оператор з урахуванням всіх порядків теорії збурень можна представити за допомогою скелетної діаграми

$$-i\Sigma = \text{Diagram} \quad (28.1)$$

Той факт, що повна вершинна функція відповідає лише одній з двох вершин, а інша вершина є звичайною (без урахування поправок) пояснюється тим, що поправку до однієї з вершин завжди можна розуміти як поправку до іншої вершини. Таким чином, слід просто визначитися до якої вершини (лівої чи правої) потрібно радіаційні поправки. Див. рис., де на одній і тій самій діаграмі можна виділити квадратним блоком поправки як до лівої, так і до правої вершини:

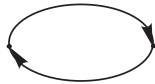


Отже запис скелетної діаграми з двома повними вершинними функціями просто означав би врахування двічі одних і тих самих діаграм. Яку з двох вершин обирати як повну вершинну функцію не має значення.

Враховуючи (26.7) та правила діаграмної техніки для (30.1) (узагальнення (26.20)) матимемо рівняння Дайсона у формі

$$\Sigma(p) = \mathcal{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \Gamma^\nu(p, p-k, k) \mathcal{G}(p-k) \gamma^\mu \mathfrak{D}_{\nu\mu}^0(k). \quad (30.2)$$

Аналогічне співвідношення можна отримати і для поляризаційного оператора, що являє собою суму усіх компактних діаграм, див. (27.8). Легко побачити, що кожна з наведених компактних діаграм насправді містить поправки до внутрішніх електронних ліній або вершини діаграми



Відповідно, поляризаційний оператор з урахуванням всіх порядків теорії збурень можна представити за допомогою скелетної діаграми

$$i\mathcal{P}_{\sigma\delta} = \sigma \left( \text{diagram} \right) \delta \quad (28.3)$$

The diagram in the equation shows a fermion loop with two external lines labeled  $\sigma$  and  $\delta$ . The loop has two internal lines: the top one is labeled  $p-k$  and the bottom one is labeled  $p$ .

Наявність у наведеній діаграмі лише однієї повної вершинної функції пояснюється як і у попередньому випадку. Враховуючи (27.6) та правила діаграмної техніки для (30.3) (узагальнення (27.9)) матимемо рівняння Дайсона у формі

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\sigma\delta}(k) &= [(\mathfrak{D}^0)^{-1}(k) - (D^0)^{-1}(k)]^{\sigma\delta} = \\ &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4p \operatorname{Tr} [\Gamma^\delta(p, p-k, k) \mathcal{G}(p-k) \gamma^\sigma \mathcal{G}(p)]. \end{aligned} \quad (30.4)$$

Нагадаємо, що діючи за наведеною схемою, згідно з рис. 29.2, ми не можемо виписати простих "замкнених" рівнянь на повну вершинну функцію, оскільки повна вершинна функція у правій стороні такого рівняння буде входити нескінченне число разів. Тому у підході, що базується на знаходженні точних пропагаторів електронного та фотонного полів шляхом безпосереднього розв'язку системи інтегральних рівнянь (30.2), (30.4), у якості повної вершинної функції береться її певне наближене значення шляхом врахування лише певної обмеженої кількості фейнманівських діаграм, що її визначають.

### Тотожності Уорда

Окрім розглянутих рівнянь Дайсона, що впливають з розгляду діаграм Фейнмана, можна отримати прості співвідношення між повним вершинним пропагатором та вершинною функцією, якщо використати властивість локальної калібрувальної інваріантності лагранжіану КЕД (1.45), а саме його інваріантності відносно перетворень  $\Psi \rightarrow \Psi' = e^{ie\alpha(x)}\Psi$ ,  $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\Psi}$ ,  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$ . (30.5)

Звичайно, дане співвідношення не має жодного відношення до вторинноквантованих операторних функцій електрон-позитронного та електромагнітного полів в представленні взаємодії через які визначаються пропагатори відповідних полів<sup>1</sup>. Однак повні пропагатори електрон-позитронного та електромагнітного полів визначаються через вторинноквантовані функції у представленні Гайзенберга:

$$\mathfrak{D}_{\mu\nu}^0(x-x') = -i\langle 0 | \hat{T} \hat{A}_\mu^H(x) \hat{A}_\nu^H(x') | 0 \rangle, \quad (30.6)$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x') = +i\langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_\alpha^H(x) \hat{\Psi}_\beta^H(x') | 0 \rangle, \quad (30.7)$$

тобто через вторинноквантовані функції взаємодіючих полів.

<sup>1</sup>В представленні взаємодії вторинноквантоване електрон-позитронне поле відповідає вільним частинкам, див. (1.50). Відповідно, зміна електромагнітного поля жодним чином не впливає на електрон-позитронне поле.

Застосуємо до вторинноквантованих функцій у представленні Гайзенберга калібрувальні перетворення (30.5), але вважатимемо функцію  $\alpha(x)$  скалярною функцією неоператорної природи, тоді:

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu - \partial_\mu \alpha. \quad (30.8)$$

Порівнюючи вираз для  $\hat{A}'_\mu$  з виразом (10.3) приходимо до висновку, що зміну електромагнітного поля при даних калібрувальних перетвореннях можна трактувати як включення зовнішнього класного поля  $A_\mu^{ext} = -\partial_\mu \alpha$ .

При перетвореннях (30.5) повний електронний пропагатор набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x') &\rightarrow \mathcal{G}'_{\alpha\beta}(x-x') = i\langle 0 | \hat{T} e^{ie\alpha(x)} \hat{\Psi}_\alpha^H(x) \hat{\Psi}_\beta^H(x') e^{-ie\alpha(x')} | 0 \rangle = \\ &= \mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x') e^{ie(\alpha(x) - \alpha(x'))}. \end{aligned} \quad (30.9)$$

Розглянемо випадок, коли  $\alpha \rightarrow 0$ , тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_{\alpha\beta}(x-x') &= \mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x') + \delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, x'), \\ \delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, x') &= ie\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x')[\alpha(x) - \alpha(x')], \\ \delta A^\mu(x) &= A_\mu^{ext}(x) = -\partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (30.10)$$

Як бачимо, зміна повного електронного пропагатора  $\delta\mathcal{G}$  вже не є функцією від різниці координат, а отже у імпульсному просторі з'явиться залежність від двох 4-імпульсів:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(p_2, p_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x, x') e^{ip_2x} e^{-ip_1x'} = /(\text{4.13}), (\text{0.5})/ = \\ &= \frac{ie}{(2\pi)^8} \int d^4x \int d^4x' \int d^4k \int d^4p \mathcal{G}(k) e^{-ik(x-x')} \times \\ &\quad \times [\alpha(p) e^{-ipx} - \alpha(p) e^{-ipx'}] e^{ip_2x - ip_1x'}. \end{aligned} \quad (30.11)$$

Зробимо заміну змінних  $y = x - x'$ ,  $z = (x + x')/2$  (тобто  $x = z + y/2$ ,  $x' = z - y/2$ , якобіан переходу  $I = 1$ ):

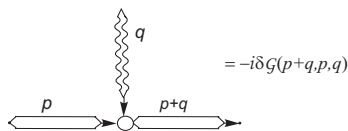
$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}(p_2, p_1) &= \frac{ie}{(2\pi)^8} \int d^4z \int d^4y \int d^4k \int d^4p \times \\
&\quad \times \left[ \mathcal{G}(k)\alpha(p)e^{-i(p-p_2+p_1)z-i(2k+p-p_2-p_1)y/2} - \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{G}(k)\alpha(p)e^{-i(p-p_2+p_1)z-i(2k-p-p_2-p_1)y/2} \right] = \left/ \int d^4z \right/ = \\
&= \frac{ie}{(2\pi)^4} \int d^4y \int d^4k \int d^4p \delta(p+p_1-p_2) \times \\
&\quad \times \left[ \mathcal{G}(k)\alpha(p)e^{-i(2k+p-p_2-p_1)y/2} - \mathcal{G}(k)\alpha(p)e^{-i(2k-p-p_2-p_1)y/2} \right] = \\
&= \left/ \int d^4p \right/ = \frac{ie}{(2\pi)^4} \int d^4y \int d^4k \left[ \mathcal{G}(k)\alpha(p_2-p_1)e^{-i(k-p_1)y} - \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{G}(k)\alpha(p_2-p_1)e^{-i(k-p_2)y} \right] = \left/ \int d^4y \right/ = \\
&= ie \int d^4k \left[ \mathcal{G}(k)\alpha(p_2-p_1)\delta(k-p_1) - \mathcal{G}(k)\alpha(p_2-p_1)\delta(k-p_2) \right] = \\
&= ie \alpha(p_2-p_1) [\mathcal{G}(p_1) - \mathcal{G}(p_2)]. \quad (30.12)
\end{aligned}$$

Зробивши перепозначення  $p_2 - p_1 = q$ ,  $p_1 = p$ , отримаємо

$$\delta\mathcal{G}(p+q, p) = ie \alpha(q) [\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p+q)]. \quad (30.13)$$

Пропагатор електронного поля є функцією від 4-імпульса віртуальної частинки, що проходить між двома точками  $x$  та  $x'$  діаграми Фейнмана. Покращений електронний пропагатор є узагальненням звичайного пропагатора з урахуванням вищих поправок теорії збурень. Той факт, що зміна повного електронного пропагатора є функцією від двох імпульсів замість одного слід розуміти наступним чином: віртуальна частинка вийшла з однієї точки ( $x$ ) з 4-імпульсом  $p$ , а увійшла в кінцеву точку ( $x'$ ) з 4-імпульсом  $p+q$ , що може бути фізично реалізовано якщо десь посередині 4-імпульс віртуальної частинки змінюється за рахунок зовнішнього впливу.

У нашому випадку зміна покращеного електронного пропагатора обумовлена калібрувальною зміною електромагнітного поля, тобто завдяки появі в системі зовнішнього класичного поля  $A_\mu^{ext} = -\partial_\mu\alpha$ . Відповідно, зміні покращеного електронного пропагатора можна зіставити таку діаграму



з якої випливає, що

$$-i\delta\mathcal{G}(p+q, p) = -ie(-i)\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q, p, q)\mathbb{A}_\mu^{ext}(q)(-i)\mathcal{G}(p). \quad (30.15)$$

Враховуючи, що зовнішнє поле (30.24) в імпульсному просторі (10.8) має вигляд  $\mathbb{A}_\mu^{ext}(q) = iq_\mu\alpha(q)$ , згідно з (30.38) отримаємо

$$\mathbb{A}_\mu^{ext}(k) = iq_\mu\alpha(q) - iq_\nu\alpha(q)\mathcal{P}^{\nu\xi}(k)\mathfrak{D}_{\xi\mu}^0(k) = /(\text{27.13})/ = iq_\mu\alpha(q). \quad (30.16)$$

Тобто радіаційні поправки не впливають на зовнішнє поле, що має вигляд калібрувального доданку. Підставивши цей результат у (30.15) та порівнявши отриманий вираз з (30.13), отримуємо:

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(p+q)q_\mu\Gamma^\mu(p+q, p, q)\mathcal{G}(p). \quad (30.17)$$

Даний вираз можна записати у більш зручному вигляді, якщо з лівого боку його помножити на  $\mathcal{G}^{-1}(p+q)$ , а з правого боку на  $\mathcal{G}^{-1}(p)$ :

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = -q_\mu\Gamma^\mu(p+q, p, q). \quad (30.18)$$

Даний вираз отримав назву *тотожності Уорда-Такахаши*.

У випадку, коли 4-імпульс  $q \rightarrow 0$ , матимемо  $\mathcal{G}^{-1}(p+q) = \mathcal{G}^{-1}(p) + \partial_{p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p)q_\mu$ , а отже вираз (30.18) зведеться до вигляду

$$\partial_{p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p) = -\Gamma^\mu(p, p, 0), \quad (30.19)$$

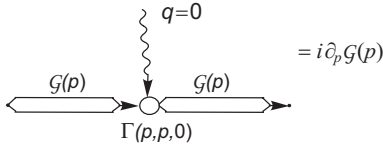
що отримав назву *тотожності Уорда*. Як бачимо, похідна за імпульсом від оберненого повного електронного пропатора є вершинною функцією (зі знаком мінус) при нульовому переданому імпульсі. Очевидно, що дане співвідношення працює і у випадку, коли не враховуються радіаційні поправки, справді:

$$G^{-1}(p) = m - \gamma^\mu p_\mu, \quad \Rightarrow \quad \partial_{p_\mu}G^{-1}(p) = -\gamma^\mu. \quad (30.20)$$

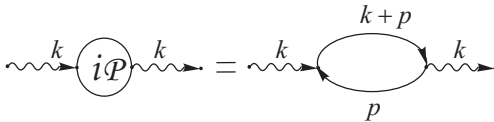
З виразу (30.19) легко отримати співвідношення на похідну від повного електронного оператора<sup>1</sup>:

$$i\partial_{p_\mu} G(p) = (-i)G(p)(-i)\Gamma^\mu(p, p, 0)(-i)G(p), \quad (30.21)$$

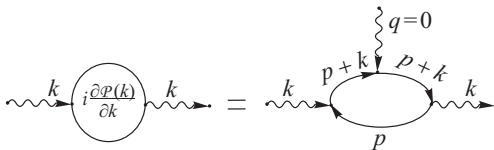
яке дає формальну діаграмну інтерпретацію операції взяття похідних шляхом вставки лінії зовнішнього поля з нульовим 4-імпульсом<sup>2</sup>:



Такий підхід може бути використаний і для взяття похідних від більш складних виразів, напр., похідну від поляризаційного оператора у першому незникаючому наближенні



можна графічно зобразити у такому вигляді



Очевидно, що при диференціюванні діаграми за імпульсом  $k$  похідну слід брати від усіх ліній діаграми, що містять імпульс  $k$  з використанням стандартного правила взяття похідних від добутку функцій:  $(UV)' = U'V + UV'$ . При цьому, очевидно, будуть діаграми, у яких імпульс  $k$  буде міститися не лише у електронних, а й у фотонних внутрішніх лініях, див. одну з діаграм поляризаційного оператора з поправкою до вершини:

<sup>1</sup>Очевидно, що даний вираз справедливий і по відношенню до величин без урахування радіаційних поправок:  $i\partial_{p_\mu} G(p) = (-i)G(p)(-i)\gamma^\mu(-i)G(p)$ .

<sup>2</sup>Під словом "формально" мається на увазі, що незважаючи на наявність на діаграмі лінії зовнішнього поля, вираз для неї не записується, а для вершини (куди входить зовнішнє поле) не враховується множник заряду.





або на матричному рівні у імпульсному просторі

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= v - G \Sigma v + G \Sigma G \Sigma v - G \Sigma G \Sigma G \Sigma v + \dots = \\ &= v - (G - G \Sigma G + G \Sigma G \Sigma G + \dots) \Sigma v, \end{aligned} \quad (30.26)$$

тобто

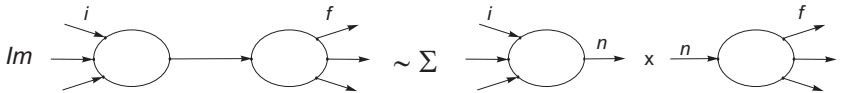
$$\mathcal{U}(p) = v(p) - \mathcal{G} \Sigma v = (1 - \mathcal{G} \Sigma) v = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{-1} - \Sigma) v = \mathcal{G}(m - \not{p}) v. \quad (30.27)$$

У першому підході з урахуванням контрчленів (перенормування на ходу) маса в останньому виразі є фізичною масою електрона. Отже  $(m_e - \not{p})v = 0$ , згідно з рівнянням Дірака, і радіаційні поправки до зовнішніх ферміонних ліній відсутні:  $\mathcal{U}(p) = v(p)$ .

У другому підході до перенормування ситуація є складнішою. Коректним є підхід з використанням співвідношення унітарності. Розглянемо амплітуду деякого процесу  $i \rightarrow f$ . Проведемо усереднення за спіральними станами початкового та кінцевого стану системи<sup>1</sup> і використаємо співвідношення (12.103), що пов'язує амплітуду реакції  $M_{fi}$  з проміжним одночастинковим електронним станом з амплітудами реакції, що містять даний проміжний стан як кінцевий та початковий стани реальної частинки:

$$Im[M_{fi}] = \pi \delta^4(p_n^2 - m^2) \sum_{\lambda} M_{fn} M_{in}^*, \quad (30.28)$$

де підсумовування за  $\lambda$  відповідає підсумовуванню за спіральністю проміжного електронного стану.



**Рис. 30.1.** Схематичне зображення амплітуди реакції  $i \rightarrow f$  з одночастинковим проміжним станом.

Амплітуда  $M_{fn}$  має вигляд  $M'_{fn} \mathcal{U} = Z' M'_{fn} v$ , де  $M'_{fn}$  амплітуда без зовнішньої електронної лінії стану  $n$ . Оскільки стан  $n$  відповідає

<sup>1</sup>При цьому  $M_{fi} = M_{if}$  згідно з  $P, T$  інваріантністю КЕД.

реальному електрону, то його польову функцію з урахуванням радіаційних поправок ми записали як  $\mathcal{U} = Z'v$ , де  $Z'$  поки невідома стала. Аналогічним чином можна записати  $M_{in}^* = \bar{\mathcal{U}}M'_{in} = Z'\bar{v}M'_{in}$ . Отже

$$Im[M_{fi}] = \pi\delta^4(p_n^2 - m^2) \sum_{\lambda} Z'^2 M'_{fn} v \bar{v} M'_{in}^*. \quad (30.29)$$

З урахуванням (4.9), ми можемо легко провести підсумування за спіральними станами  $\sum_{\lambda} v \bar{v} = m + \not{p}_n$ , отже

$$Im[M_{fi}] = \pi\delta^4(p_n^2 - m^2) Z'^2 M'_{fn}(m + \not{p}_n) M'_{in}^*. \quad (30.30)$$

По явній частині амплітуди реакції, враховуючи (12.106), можемо відновити повний вигляд амплітуди процесу

$$M_{fi} = -\frac{Z'^2 M'_{fn}(m + \not{p}_n) M'_{in}^*}{p_n^2 - m_e^2 + i\varepsilon}. \quad (30.31)$$

Однак, згідно рис. 30.1 амплітуду цього процесу можна записати як

$$iM_{fi} = iM'_{fn} \cdot (-i)\mathcal{G} \cdot iM'_{in}^*. \quad (30.32)$$

Тоді при значенні 4-імпульса проміжного стану  $\not{p} \rightarrow m_e$ , враховуючи (26.52), отримуємо  $Z_2 = Z'^2$ . Отже лінії електрона з урахуванням радіаційних поправок відповідає

$$\mathcal{U} = \sqrt{Z_2} v. \quad (30.33)$$

Аналогічним чином як ми отримали вираз (27.4) можна отримати вираз і для оператора зовнішньої фотонної лінії, що входить у певну вершину діаграми, з урахуванням радіаційних поправок:

$$\hat{\mathbb{A}}_{\mu}(k) = \hat{A}_{\mu}(k) - \hat{A}_{\nu}(k) \mathcal{P}^{\nu\xi}(k) \mathfrak{D}_{\xi\mu}^0(k), \quad (30.34)$$

де  $\hat{A}_{\mu}$  – оператор електромагнітного поля,  $\hat{\mathbb{A}}_{\mu}$  – оператор електромагнітного поля з урахуванням радіаційних поправок. Враховуючи явний вигляд поляризаційного оператора (27.15) та повного фотонного пропагатора (27.29), (27.35), отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{A}}_{\mu}(k) &= \hat{A}_{\mu}(k) + \hat{A}_{\nu}(k) \frac{w(k^2)}{1 + w(k^2)} \left[ \frac{k^{\nu} k_{\mu}}{k^2} - g_{\mu}^{\nu} \right] = \\ &= /(\text{Д4.3.8}), k^{\eta} \hat{A}_{\eta} = 0/ = \hat{A}_{\mu}(k) \left( 1 - \frac{w(k^2)}{1 + w(k^2)} \right). \end{aligned} \quad (30.35)$$

В першому підході до перенормування, з урахуванням контрчленів, отримуємо

$$\hat{\mathbb{A}}_\mu(k) = \hat{A}_\mu(k) \left( 1 - \frac{w^{ren}(k^2)}{1 + w^{ren}(k^2)} \right). \quad (30.36)$$

Врахувавши означення (27.44), тобто  $w^{ren}(k^2) \sim k^2$  при  $k^2 \rightarrow 0$  та те, що для лінії реального фотона  $k^2 = 0$ , отримуємо, що радіаційні поправки до зовнішньої фотонної лінії відсутні:  $\hat{\mathbb{A}}_\mu(k) = \hat{A}_\mu(k)$ .

У другому підході до перенормування коректно також використувати співвідношення унітарності. Провівши аналогічні розрахунки, отримуємо

$$\hat{\mathbb{A}}_\mu(k) = \sqrt{Z_3} \hat{A}_\mu(k). \quad (30.37)$$

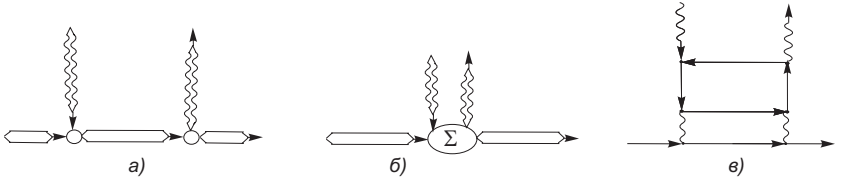
В розд. 31, після розгляду радіаційних поправок до вершин, буде показано, що, у другому підході до перенормування, константи  $Z_2, Z_3$  можна буде прибрати поклавши їх одиниці. Це означатиме, що як у першому, так і у другому підході до перенормування радіаційні поправки не даватимуть внесків до зовнішніх ліній діаграм, яким відповідають реальні частинки (фотони чи ферміони).

Однак, якщо зовнішній фотонній лінії зіставляється лінія зовнішнього класичного поля  $A_\mu^{ext}(k)$  для якого умова  $k^2 = 0$  може не виконуватися, то вираз для зовнішньої фотонної лінії з урахуванням радіаційних поправок  $\mathbb{A}_\mu^{ext}(k)$  буде змінюватися:

$$\mathbb{A}_\mu^{ext}(k) = A_\mu^{ext}(k) - A_\nu^{ext}(k) \mathcal{P}^{\nu\xi}(k) \mathcal{D}_{\xi\mu}^0(k). \quad (30.38)$$

**Визначення фізичного заряду. Доведення співвідношення  $e = \sqrt{Z_3} e_0$**

При розгляді повного фотонного пропагатора у розд. 27 було зазначено, що фізичне значення заряду електрона можна визначити з розсіяння електромагнітної хвилі (фотонів) малої частоти ( $k \rightarrow 0$ ) на електроні, що покоїться, див. (27.54). Покажемо, що всі діаграми Фейнмана, які описують даний процес, міститимуть заряд електрона саме у комбінації  $\sqrt{Z_3} e_0$ , див. [1]. Для цього виділимо три класи діаграм, що описують даний процес: *а*) скелетні діаграми електрон-фотонного розсіяння, *б*) діаграми, у яких зовнішні фотонні лінії виходять з внутрішніх ліній в радіаційних поправках до лінії розповсюдження електрона, *в*) діаграми, у яких зовнішні фотонні лінії виходять з замкнених електронних петель.



Діаграмам типу *a*) відповідає амплітуда

$$iM_a = Z_2 Z_3 (-ie)^2 \bar{v}_2 (\Gamma^\mu (-i) \mathcal{G} \Gamma^\nu + \Gamma^\nu (-i) \mathcal{G} \Gamma^\mu) v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*}. \quad (30.39)$$

Враховуючи, що розглядається процес розсіяння фотонів малої частоти, можна використати тотожності Уорда (30.21) та записати амплітуду діаграми типу *б*) у вигляді:

$$iM_b = Z_2 Z_3 e^2 \bar{v}_2 \frac{\partial^2 (-i) \Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu} v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*}. \quad (30.40)$$

Зрозуміло, що у наведених виразах  $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p, p, 0)$ ,  $p^2 \rightarrow m^2$  та для запису функцій реальних частинок ми використали (30.33), (30.37).

Вклад діаграм типу *в*) дорівнює нулю. Справді, у випадку коли ферміонна петля містить непарну кількість внутрішніх ліній, її внесок дорівнює нулю згідно з теоремою Фаррі. У випадку коли ферміонна петля містить парну кількість внутрішніх ліній, її внесок при малих імпульсах зовнішніх фотонів пов'язаний з внеском від петлі з непарною кількістю внутрішніх ліній тотожністю Уорда (30.21) і також дорівнює нулю.

Для подальшого нам знадобиться друга похідна від повного електронного пропагатора. Перша похідна для нього задана за допомогою (30.21):

$$\frac{\partial \mathcal{G}(p)}{\partial p_\mu} = \mathcal{G}(p) \Gamma^\mu(p, p, 0) \mathcal{G}(p), \quad (30.41)$$

відповідно, друга похідна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} &= \frac{\partial \mathcal{G}(p)}{\partial p_\nu} \Gamma^\mu(p, p, 0) \mathcal{G}(p) + \mathcal{G}(p) \Gamma^\mu(p, p, 0) \frac{\partial \mathcal{G}(p)}{\partial p_\nu} + \\ &+ \mathcal{G}(p) \frac{\partial \Gamma^\mu(p, p, 0)}{\partial p_\nu} \mathcal{G}(p) = / (30.19), (30.21) / = \\ &= \mathcal{G} \Gamma^\nu \mathcal{G} \Gamma^\mu \mathcal{G} + \mathcal{G} \Gamma^\mu \mathcal{G} \Gamma^\nu \mathcal{G} - \mathcal{G} \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \mathcal{G}. \quad (30.42) \end{aligned}$$

Домножимо цей вираз з лівої та правої сторони на  $\mathcal{G}^{-1}$  та отримаємо

$$\mathcal{G}^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \mathcal{G}^{-1} = \Gamma^\nu \mathcal{G} \Gamma^\mu + \Gamma^\mu \mathcal{G} \Gamma^\nu - \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu}. \quad (30.43)$$

Тепер ми можемо знайти суму двох амплітуд

$$\begin{aligned} M_a + M_b &= Z_2 Z_3 e^2 \bar{v}_2 \left( \Gamma^\mu \mathcal{G} \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \mathcal{G} \Gamma^\mu - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right) v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*} = / (26.45) / \\ &= Z_2 Z_3 e^2 \bar{v}_2 \left( \Gamma^\mu \mathcal{G} \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \mathcal{G} \Gamma^\mu - \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{-1}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \right) v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*} = / (30.43) / = \\ &= Z_2 Z_3 e^2 \bar{v}_2 \mathcal{G}^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial p_\mu \partial p_\nu} \mathcal{G}^{-1} v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*}. \quad (30.44) \end{aligned}$$

Врахувавши поведінку повного електронного пропагатора при  $p^2 \rightarrow m^2$  (26.51), отримаємо

$$M_a + M_b = Z_3 e^2 \bar{v}_2 G^{-1} \frac{\partial^2 G}{\partial p_\mu \partial p_\nu} G^{-1} v_1 \epsilon_\mu^1 \epsilon_\nu^{2*}. \quad (30.45)$$

Таким чином ми довели, що в усіх порядках теорії збурень амплітуда розсіяння електрона на низькочастотному фотоні містить електричний заряд саме у комбінації  $e = \sqrt{Z_3} e_0$  і саме тому, таку комбінацію можна вважати фізичним значенням заряду.

### Завдання

1. Отримайте співвідношення (30.21).
2. Отримайте вираз для функції реального електрона з урахуванням радіаційних поправок у другому підході до перенормування напруму з виразу (30.27). Поясніть отриману відповідь.

## РОЗДІЛ 31

### Перенормування вершинної функції. Аномальний магнітний момент електрона

Для правильного розуміння процедури перенормування вершинного оператора нам знадобляться отримані в попередньому розділі співвідношення Уорда (30.19). Запишемо їх, використавши (29.1) та (26.29), (26.45) для неперенормованих величин:

$$\partial_{p_\mu} [m + \Sigma(p) - \gamma^\nu p_\nu] = -\gamma^\mu - \Lambda^\mu(p, p), \quad (31.1)$$

тобто

$$\Lambda^\mu(p, p) = -\partial_{p_\mu} \Sigma(p), \quad (31.2)$$

де  $\Sigma(p)$  – неперенормований масовий оператор.

**Розглянемо перший підхід** до перенормування вважаючи, що маси та заряди частинок у початковому лагранжіані мають фізичні значення. Використавши вираз для масового оператора (26.41), отримаємо

$$\Lambda^\mu(p, p) = -\gamma^\mu \Sigma'(m_e) - \partial_{p_\mu} \Sigma_R(p). \quad (31.3)$$

Корисно записати цей вираз у випадку, коли  $p = p'$  та  $p^2 = p'^2 = m_e^2$ :

$$\Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2} = -\gamma^\mu \Sigma'(m_e). \quad (31.4)$$

З останніх двох виразів отримаємо

$$\Lambda^\mu(p, p) + \partial_{p_\mu} \Sigma_R(p) = \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.5)$$

Використавши (31.3), можна записати

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p', p) &= \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p', p) = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(p, p) + \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p) = \\ &= \gamma^\mu (1 - \Sigma'(m_e)) - \partial_{p_\mu} \Sigma_R(p) + \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p) = / (31.5) / = \\ &= \gamma^\mu (1 - \Sigma'(m_e)) + \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \end{aligned} \quad (31.6)$$

Маючи явний вираз для  $\Lambda^\mu(p', p)$  (29.22), ми знаємо, що він містить логарифмічно розбіжний доданок. Очевидно, що різниця виразів  $\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}$  розбіжності не містить. Отже причиною нескінченного значення неперенормованої вершинної функції є

лише множник поблизу гамма-матриці  $(1 - \Sigma'(m_e))$ . Щоб позбутися його, необхідно до лагранжіану (27.36) додати контрчлен у вигляді  $-ed\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ . В результаті отримуємо

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi(1+a) - m_e(1+b)\bar{\psi}\psi - \frac{1+c}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e(1+d)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (31.7)$$

Це призведе до появи у виразі для вершинної функції (31.6) доданку поблизу вільного члену

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu(1 - \Sigma'(m_e) + d) + \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.8)$$

Оскільки в КЕД електромагнітне поле взаємодіє зі струмом ферміонного поля  $\mathcal{L}_{int} = -ej^\mu A_\mu$ ,  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , то струм є величиною, що експериментально спостерігається. З експериментів відомо, що для реальних частинок, при нульовому переданому імпульсі, струм має вигляд

$$\bar{\psi}\Gamma^\mu(p = p')|_{p^2=m_e^2}\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (31.9)$$

звідки впливає умова на перенормовану величину  $\Lambda_{ren}^\mu$

$$\Lambda_{ren}^\mu(p = p')|_{p^2=m_e^2} = 0. \quad (31.10)$$

Отже, у (31.8) нам слід покласти  $d = \Sigma'(m_e)$  і ми отримуємо перенормовану вершинну функцію:

$$\Gamma^\mu(p', p)_{ren} = \gamma^\mu + \Lambda_{ren}^\mu(p', p); \quad \Lambda_{ren}^\mu(p', p) = \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.11)$$

Звертаємо увагу, що у модифікованому лагранжіані (31.7) параметри  $d = a = \Sigma'(m_e)$ , див. (26.39).

**Розглянемо другий підхід** до перенормування. В цьому випадку у співвідношенні (31.2) слід використати вираз для масового оператора у формі (26.53). В результаті отримуємо

$$\Lambda^\mu(p, p) = -\gamma^\mu\Sigma'(m_e) - Z_2^{-1}\partial_{p_\mu}\Sigma_R(p) \quad (31.12)$$

та

$$\Lambda^\mu(p, p) + Z_2^{-1}\partial_{p_\mu}\Sigma_R(p) = \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.13)$$

Врахувавши співвідношення (26.51) та зробивши перетворення аналогічні до (31.6), отримуємо

$$\Gamma^\mu(p', p) = Z_2^{-1}\gamma^\mu + \Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.14)$$

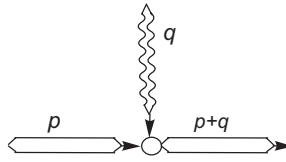
Так само як і при розгляді покращеного електронного та фотонного пропагаторів, визначимо перенормовану вершинну функцію шляхом виділення загального множника, що забере на себе всі нескінченні складові:

$$\Gamma^\mu(p', p) = Z_1^{-1} \Gamma_{ren}^\mu(p', p) = Z_1^{-1} [\gamma^\mu + \Lambda_{ren}^\mu(p', p)]. \quad (31.15)$$

з умовою  $\Lambda_{ren}^\mu(p = p')|_{p^2=m_e^2} = 0$ . Прирівнявши (31.14) до (31.15) при  $p = p'$ ,  $p^2 = m_e^2$  отримаємо

$$Z_1 = Z_2 = [1 - \Sigma'(m_e)]^{-1}, \quad \Lambda_{ren}^\mu(p', p) = Z_1 [\Lambda^\mu(p', p) - \Lambda^\mu(p, p)]|_{p^2=m_e^2}. \quad (31.16)$$

Щоб зрозуміти на якісному рівні, що константи  $Z_1, Z_2, Z_3$  не дають вкладу у розрахунки фізичних процесів, розглянемо процес розсіяння електрона у зовнішньому полі з малим 4-імпульсом  $k \rightarrow 0$  (відповідно і  $k^2 \rightarrow 0$ ). З урахуванням радіаційних поправок отримаємо для скелетної діаграми



амплітуду процесу

$$M_{fi} = -e_0 \bar{U} \Gamma^\mu U \mathbb{A}_\mu^{ext}(k) \quad (31.17)$$

З урахуванням (30.33), (30.37), (31.15) матимемо:

$$M_{fi} = -e_0 \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu^{ext} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu^{ext}, \quad (31.18)$$

де константи  $Z_2$  та  $Z_1$  скоротилися згідно з (31.16), а величина  $Z_3$  змінила електричний заряд  $e_0$  до його фізичного значення  $e$  (27.53). Так і повинно бути, оскільки такий процес не повинен відчувати внеску радіаційних поправок і описується в рамках класичної електродинаміки.

### Явний вигляд перенормованої вершинної функції

Розрахуємо перенормовану величину  $\Lambda_{ren}^\mu$  згідно з визначенням (31.11) шляхом віднімання тієї самої величини, але при  $p = p'$ ,  $q = 0$ ,  $p^2 = m^2$ . Для цього використаємо отриманий раніше вираз (29.22).



Проінтегруємо за змінною  $R$ . По-перше, позбавимося від розбіжного доданку

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dR}{2R} \left[ e^{-iR[(x+y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2]} - e^{-iR[(x+y)^2 m^2 + zm_A^2]} \right] = / (23.18) / \\ & = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln[(x+y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2] - \ln[(x+y)^2 m^2 + zm_A^2] \right]. \quad (31.19) \end{aligned}$$

Інтеграл за змінною  $R$  від інших доданків легко виконати використавши (22.17). Остаточо отримаємо

$$\begin{aligned} \Lambda_{ren}^{\mu}(p', p) &= \Lambda^{\mu}(p', p) - \Lambda^{\mu}(p, p)|_{p^2=m^2, q^2=0} = \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \left[ \frac{1}{(x+y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2} \times \right. \\ & \quad \times \left\{ \gamma^{\mu} \left( pp' - \frac{x+y}{2} (p+p')^2 + \frac{m^2(x+y)^2 - q^2 xy}{2} \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + m(p+p')^{\mu} \frac{(x+y)z}{2} \right\} + \frac{\gamma^{\mu}}{2} \ln[(x+y)^2 m^2 - xyq^2 + zm_A^2] \right] - \\ & \quad - (p=p', q=0, p^2=m^2), \quad (31.20) \end{aligned}$$

де останній запис означає, що від отриманого виразу слід відняти такий самий, але при  $p=p', q=0, p^2=m^2$ . Якщо згадати, що  $pp' = m^2 - q^2/2$ ,  $(p+p')^2 = 4m^2 - q^2$ , то отриманий вираз можна представити у вигляді

$$\Lambda_{ren}^{\mu}(p', p) = \gamma^{\mu}(E_1(q^2) - 1) + (p+p')^{\mu} E_2(q^2), \quad (31.21)$$

де величини  $E_1, E_2$  отримали назву *електромагнітних формфакторів електрона*. Згадавши співвідношення Гордона

$$\bar{v}(p') \gamma^{\mu} v(p) = \frac{1}{2m} \bar{v}(p') [(p+p')^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_{\nu}] v(p), \quad (31.22)$$

де матрицю  $\sigma^{\mu\nu}$  було визначено у (0.30) та врахувавши, що у нашому випадку зовнішніми лініями вершинного оператора є реальні електрони, можна записати

$$(p+p')^{\mu} = 2m\gamma^{\mu} - i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_{\nu} = 2m\gamma^{\mu} - i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu} \quad (31.23)$$

та, відповідно,

$$\Lambda_{ren}^\mu(p', p) = \gamma^\mu [E_1(q^2) + 2mE_2(q^2) - 1] + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu [-2mE_2(q^2)] = \\ = \gamma^\mu [F_1(q^2) - 1] + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_2(q^2), \quad (31.24)$$

де  $F_1(q^2)$  та  $F_2(q^2)$  також називають електромагнітними формфакторами електрона, *діраковським* та *паулієвським* відповідно. Вони мають наступний вигляд:

$$F_1(q^2) - 1 = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \times \\ \times \left[ \frac{pp' - \frac{x+y}{2}(p+p')^2 + \frac{m^2(x+y)^2 - q^2xy}{2} + m^2(x+y)z}{(x+y)^2m^2 - xyq^2 + zm_A^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln[(x+y)^2m^2 - xyq^2 + zm_A^2] \right] - (p=p', q=0, p^2=m^2), \quad (31.25)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(x+y+z-1) m^2(x+y)z}{(x+y)^2m^2 - xyq^2 + zm_A^2}. \quad (31.26)$$

В останньому виразі ми не робили віднімання функції при  $p=p'$ ,  $q=0$ ,  $p^2=m^2$  оскільки у вираз для  $\Lambda_{ren}^\mu$  він входить у комбінації  $q_\nu F_2(q^2) - (q=0) = q_\nu F_2(q^2)$ .

Для майбутнього використання корисно навести і зворотні перетворення, а саме:

$$E_1(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2), \quad E_2(q^2) = -F_2(q^2)/(2m). \quad (31.27)$$

Для початку розрахуємо більш прості інтеграли у виразі для  $F_2(q^2)$ . Можна помітити, що інтеграл не містить проблем при  $m_A = 0$  тому занулимо з самого початку масу фотона. Наступним кроком зробимо заміну змінних

$$pp' = m^2 \operatorname{ch} \vartheta, \quad q^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2(\vartheta/2) = -2m^2(\operatorname{ch} \vartheta - 1), \quad (31.28)$$

яка автоматично забезпечує виконання необхідного співвідношення  $pp' = m^2 - q^2/2$  (29.7) та дозволяє перетворити функцію від змінних  $p$ ,  $p'$  та  $q^2$  на функцію від одного параметра  $\vartheta > 0$ . Тоді інтеграл зведеться до інтегралу від дробу, що містить поліном у чисельнику та знаменнику. Після достатньо громіздких розрахунків отримаємо

$$\begin{aligned}
 F_2(q^2) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(x+y+z-1)(x+y)z}{x^2+y^2+2xy \operatorname{ch} \vartheta} = /(\text{26.71})/ = \\
 &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)(1-x-y)}{x^2+y^2+2xy \operatorname{ch} \vartheta} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta}. \quad (31.29)
 \end{aligned}$$

З явного виразу (31.28) випливає, що границя  $q^2 \rightarrow 0$  є еквівалентною границі  $\vartheta \rightarrow 0$ , тобто

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (31.30)$$

Розрахуємо величину  $F_1(q^2)$  (31.25). Зробимо заміну (31.28) та проінтегруємо за параметром  $z$ . Отримаємо

$$\begin{aligned}
 F_1(q^2) - 1 &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[ (x+y)^2 + 4xy \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{m_A^2}{m^2} (1-x-y) \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{\operatorname{ch} \vartheta - (x+y)(\operatorname{ch} \vartheta + 1) + \frac{1}{2} \left[ (x+y)^2 + 4xy \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2} \right] + (x+y)(1-x-y)}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta + \frac{m_A^2}{m^2} (1-x-y)} \right\} - \\
 &- (q=0), \quad (31.31)
 \end{aligned}$$

де ми використали співвідношення  $(p+p')^2/(2m^2) = 1 + \operatorname{ch} \vartheta$  та прибрали множник  $m^2$  в логарифмічному виразі, бо в кінцевий вираз буде входити різниця логарифмів (наявний та логарифм з  $q^2 = \vartheta = 0$ ).

Виділимо тепер у виразі для  $F_1(q^2)$  окремі складові:

$$\begin{aligned}
 F_1(q^2) - 1 &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{\operatorname{ch} \vartheta}{A} - (x+y) \frac{\operatorname{ch} \vartheta + 1}{B} + \frac{1}{2} \frac{(x+y)^2}{B} + \right. \\
 &+ 2xy \frac{\operatorname{sh}^2(\vartheta/2)}{B} + \frac{(1-x-y)(x+y)}{B} + \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \ln \left[ (x+y)^2 + 4xy \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \right\} - (q=0) = \\
 &= -\frac{\alpha}{\pi} [I_1 - I_2 + I_3/2 + I_4 + I_5 + I_6/2], \quad (31.32)
 \end{aligned}$$

де  $A = x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta + \frac{m_A^2}{m^2} (1-x-y)$ ,  $B = x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta$ . Кінцеве значення маси фотона слід враховувати лише при обчисленні

$I_1$  (інакше в точці  $x = y = 0$  матимемо сталу у чисельнику та нуль у знаменнику), в інших інтегралах масу фотона ми поклали рівною нулю.

Вкажемо тепер, чому дорівнюють величини<sup>1</sup>  $I_i$ :

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\operatorname{ch} \vartheta}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta + \frac{m_A^2}{m^2}(1-x-y)} = /m_A \rightarrow 0/ = \\ = \vartheta \operatorname{cth} \vartheta \ln \frac{m}{m_A} + 2 \operatorname{cth} \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \operatorname{th} \varphi d\varphi, \quad (31.33)$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)(\operatorname{ch} \vartheta + 1)}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta} = \vartheta \operatorname{cth}(\vartheta/2), \quad (31.34)$$

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta} = \frac{\vartheta}{2 \operatorname{sh} \vartheta}, \quad (31.35)$$

$$I_4 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2xy \operatorname{sh}^2(\vartheta/2)}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\vartheta}{\operatorname{sh} \vartheta} \right), \quad (31.36)$$

$$I_5 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)(1-x-y)}{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \vartheta} = /(\mathbf{31.29})/ = \frac{\vartheta}{2 \operatorname{sh} \vartheta}, \quad (31.37)$$

$$I_6 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left[ (x+y)^2 + 4xy \operatorname{sh}^2 \frac{\vartheta}{2} \right] = \frac{\vartheta \operatorname{cth}(\vartheta/2) - 3}{2}. \quad (31.38)$$

Зібравши доданки до купи отримаємо

$$F_1(q^2) - 1 = \frac{\alpha}{\pi} \left[ -\vartheta \operatorname{cth} \vartheta \ln \frac{m}{m_A} - \frac{\vartheta}{2 \operatorname{sh} \vartheta} + \frac{3}{4} \vartheta \operatorname{cth}(\vartheta/2) + \frac{1}{2} - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{cth} \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \operatorname{th} \varphi d\varphi \right] - (q = 0). \quad (31.39)$$

<sup>1</sup>Для перевірки автор радить використовувати пакети математичних програм, наприклад, *Wolfram Mathematica* або *MatLab*.

Вираз при  $q = 0$  легко отримати

$$(q = 0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{3}{2} - \ln \frac{m}{m_A} \right]. \quad (31.40)$$

Остаточно для  $F_1(q^2)$  матимемо

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ -(\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1) \ln \frac{m}{m_A} - \frac{\vartheta}{2 \operatorname{sh} \vartheta} + \frac{3}{4} \vartheta \operatorname{cth}(\vartheta/2) - 1 - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{cth} \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \operatorname{th} \varphi d\varphi \right], \quad (31.41)$$

або, у більш привабливому вигляді,

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ (\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1) \left( 1 - \ln \frac{m}{m_A} \right) - 2 \operatorname{cth} \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \operatorname{th} \varphi d\varphi - \frac{\vartheta \operatorname{th}(\vartheta/2)}{4} \right]. \quad (31.42)$$

Корисно відмітити, що  $F_1(q^2 = 0) = 0$ , а з урахуванням поправки до нього при  $q^2 \rightarrow 0$  отримуве вигляд:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} F_1(q^2) = 1 - \frac{\alpha \vartheta^2}{3\pi} \left[ \ln \frac{m}{m_A} - \frac{3}{8} \right] = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left[ \ln \frac{m}{m_A} - \frac{3}{8} \right]. \quad (31.43)$$

Таким чином ми отримали явний вираз для вершинної функції (для якої зовнішні електронні лінії є лініями реальних частинок) як функції 4-вектора  $p' - p = q$ ,  $q^2 < 0$  (29.7):

$$\Gamma^\mu(q) = \gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_2(q^2), \quad (31.44)$$

де величини  $F_1(q^2)$ ,  $F_2(q^2)$  задані виразами (31.29) та (31.42).

В граничному випадку матимемо достатньо простий вираз

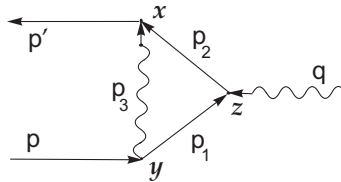
$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \Gamma^\mu(q^2) = \gamma^\mu \left[ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left( \ln \frac{m}{m_A} - \frac{3}{8} \right) \right] + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (31.45)$$

Слід відзначити, що вираз (31.44) може бути аналітично продовжений в область додатних значень  $q^2$  (реакції типу анігіляції).

У випадку, коли вершинна функція побудована для двох зовнішніх реальних електронних ліній, можна розглядати задачу взаємодії (розсіяння) у зовнішньому електромагнітному полі, див. далі детальніше. Зараз слід звернути увагу на те, що підстановка вершинної функції (31.44) у відповідний доданок  $S$ -матриці для опису розсіяння електрона у зовнішньому полі дає<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= -ie \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle f | \hat{\psi}(x) \Gamma^{\mu}(x, y, z) \hat{\psi}(y) (\hat{A}_{\mu}(z) + A_{\mu}^{ext}(z)) | i \rangle = \\
 &= \frac{-ie}{2V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \bar{v}_p e^{ip'x} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \times \\
 &\times \frac{\Gamma^{\mu}(p_1, p_2, p_3)}{(2\pi)^{4 \cdot 3}} e^{-ix(p_2+p_3)+iy(p_1+p_3)-iz(p_1-p_2)} v_p e^{-ipy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{\mu}^{ext}(q)}{(2\pi)^4} e^{-iqz} = \\
 &= \frac{-ie}{2V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (2\pi)^4} \bar{v}_{p'} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^{\mu}(p-p_3, p'-p_3, p_3) dp_3 v_p A_{\mu}^{ext}(p'-p) = \\
 &= / (25.16), q = p' - p / = \frac{-ie}{2V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (2\pi)^4} \bar{v}_{p'} \Gamma^{\mu}(q) v_p A_{\mu}^{ext}(q) = \\
 &= \frac{-ie}{2V \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (2\pi)^4} \bar{v}_{p'} \left[ \gamma^{\mu} F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_{\nu} F_2(q^2) \right] v_p A_{\mu}^{ext}(q), \quad (31.46)
 \end{aligned}$$

де при простановці 4-імпульсів була використана діаграма



<sup>1</sup>Це лише один з доданків, який для нас зараз представляє інтерес. Повний розгляд задачі розсіяння у зовнішньому полі з урахуванням радіаційних поправок буде дано пізніше.

З останнього виразу випливає, що струм  $j^\mu = \bar{v}_p \gamma^\mu v_p$  зазнає модифікації і отримує вигляд

$$j^\mu \rightarrow I^\mu = \bar{v}_p \Gamma^\mu v_p = \bar{v}_p \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_2(q^2) \right] v_p. \quad (31.47)$$

Приведемо отриманий вираз до стандартного вигляду для струму (що містить лише  $\gamma^\mu$ ). Для цього повернемося до його вигляду у формі (31.21), використавши (31.27):

$$I^\mu = \bar{v}_p \left[ \gamma^\mu [F_1(q^2) + F_2(q^2)] - \frac{(p+p')^\mu}{2m} F_2(q^2) \right] v_p. \quad (31.48)$$

Для визначення фізичного змісту формфакторів розглянемо взаємодію електрона з зовнішнім полем у системі відліку (її називають *системою Брейта*), у якій  $\vec{p} + \vec{p}' = 0$ , тоді

$$I^i = \bar{v}_p \gamma^i [F_1(q^2) + F_2(q^2)] v_p, \quad i = 1, 2, 3 \quad (31.49)$$

$$I^0 = \bar{v}_p \left[ \gamma^0 [F_1(q^2) + F_2(q^2)] - \frac{E}{m} F_2(q^2) \right] v_p, \quad (31.50)$$

де  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  – енергія частинки.

З рівнянь (29.9) легко отримати співвідношення

$$\bar{v}_p [\not{p} + \not{p}'] v_p = 2m \bar{v}_p v_p, \quad (31.51)$$

яке в системі  $\vec{p} + \vec{p}' = 0$  перетворюється до вигляду

$$E \bar{v}_p \gamma^0 v_p = m \bar{v}_p v_p, \quad (31.52)$$

з якого отримуємо  $\bar{v}_p v_p = (E/m) \bar{v}_p \gamma^0 v_p$ , за допомогою якого можна записати вираз (31.50) у вигляді

$$I^0 = \bar{v}_p \gamma^0 \left[ F_1(q^2) - \frac{E^2 - m^2}{m^2} F_2(q^2) \right] v_p. \quad (31.53)$$

З іншого боку, в даній системі відліку можна записати  $q^2 = (p' - p)^2 = -4\vec{p}^2 = -4(E^2 - m^2)$ , що дозволяє узагальнити наведений вираз до вигляду

$$I^0 = \left[ F_1(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} F_2(q^2) \right] \bar{v}_p \gamma^0 v_p. \quad (31.54)$$

Ввівши позначення

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4m^2} F_2(q^2), \quad G_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2), \quad (31.55)$$

отримаємо

$$\bar{v}_p \Gamma^\mu v_p A_\mu^{ext} = \bar{v}_p \left[ G_E(q^2) \gamma^0 A_0^{ext}(q) + G_M(q^2) \gamma^i A_i^{ext}(q) \right] v_p. \quad (31.56)$$

З явного виразу для нульової компоненти струму (31.54), (31.56) видно, що множник  $G_E(q^2)$  є тим множником, що модифікує вершину взаємодії ферміонного струму з нульовою компонентою електромагнітного поля (наприклад, створюється важким нерухомим зарядом). Тому величину  $G_E(q^2)$  називають *електричним формфактором*.

Для знаходження змісту величини  $G_M(q^2)$  розглянемо вираз (31.46) у нерелятивістському випадку, коли елементи 4-імпульсу  $q$  є малими (відповідає полю, що повільно змінюється в часі та просторі), відповідно і  $q^2 \rightarrow 0$ . В цьому випадку, враховуючи, що в першому порядку теорії збурень  $S_{fi} = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}_{int}(x)$ , ми можемо модифікувати лагранжіан КЕД і отримати модифіковане рівняння Паулі (Д5.15):

$$i\partial_t \varphi(x) = \left[ \frac{\left( \hat{k} - eG_M(0)\vec{A} \right)^2}{2m} + eG_E(0)A_0 - \mu_B G_M(0)\vec{\sigma} \cdot \vec{H} \right] \varphi(x), \quad (31.57)$$

де

$$G_E(0) = 1, \quad G_M(0) = 1 + \alpha/(2\pi). \quad (31.58)$$

Як бачимо, взаємодія з нульовою компонентою поля не змінилася,  $G_E(0) = 1$  згідно з (31.30), (31.43) та (31.55), але змінилася спін-магнітна взаємодія,  $G_M(0) \neq 1$ . Справді, множник  $\mu_B = e/(2m_e)$  являє собою елементарний магнітний момент (магнітон Бора) (Д5.16), що визначає спін-магнітну взаємодію, а множник  $G_M(0)$  уточнює значення магнітного моменту електрона з урахування радіаційних поправок. Тому величину  $G_M(q^2)$  називають *магнітним формфактором*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>При розгляді процесів взаємодії з адронами в лагранжіан взаємодії входить узагальнений струм адронів у тій самій формі, що й у виразі (31.56). Однак явний вигляд величин  $G_E(q^2)$  та  $G_M(q^2)$  визначається розподілом зарядів у адронах.



електрона. Додавка до звичайного магнітного моменту електрона отримала назву *аномального магнітного моменту* електрона.

Корисно навести результат найбільш точного на даний час теоретичного розрахунку значення магнітного моменту електрона<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \mu_{theor} = \mu_B \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0.32847844400270004 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \right. \\ \left. + 1.1812340168266109 \frac{\alpha^3}{\pi^3} - 1.9144 \frac{\alpha^4}{\pi^4} \right) = 1.001159652179101 \mu_B. \end{aligned} \quad (31.59)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку принципово важливим є точне значення сталої тонкої структури, яке станом на 2014 рік (центральне значення) є [23]:

$$1/\alpha = 137.035999074 \quad (31.60)$$

Експериментальне (центральне) значення магнітного моменту електрона [23] станом на 2014 рік:

$$\mu_{exp} = 1,00115965218076 \mu_B. \quad (31.61)$$

Тобто

$$\frac{\mu_{exp} - \mu_{theor}}{\mu_B} = 1.6 \cdot 10^{-12}. \quad (31.62)$$

Таким чином теоретичний розрахунок магнітного моменту електрона найбільш точно відповідає його експериментальному значенню і є справжнім успіхом КЕД. Для повної картини слід зазначити, що при розрахунках коефіцієнтів поблизу  $\alpha^2$  слід враховувати діаграми, у яких в петлях присутні  $\mu$ - та  $\tau$ -лептони. У ще вищих порядках точності слід враховувати внески  $W$ ,  $Z$  бозонів (розрахунки можна провести аналітично) та адронів.

Для мюона теоретичний розрахунок магнітного моменту дає результат [23]:

$$\mu_{\mu,theor} = 1.00116591803 \mu_{\mu,B}, \quad (31.63)$$

---

<sup>1</sup>В розрахунках окремих авторів дані можуть дещо відрізнятися. Ми використовуємо роботу *Aoyama, T.; Hayakawa, M.; Kinoshita, T.; Nio, M. "Revised value of the eighth-order QED contribution to the anomalous magnetic moment of the electron". Physical Review D 77, 053012 (2008). arXiv:0712.2607* В даній роботі коефіцієнт поблизу останнього доданку розраховувався чисельними методами з урахуванням 891 діаграми.

де у визначення відповідного магнітона Бору ( $\mu_{\mu,B}$ ) входить маса мюона. Експериментальне значення магнітного моменту становить [23]:

$$\mu_{\mu,exp} = 1.00116592089\mu_{\mu,B}. \quad (31.64)$$

Тобто результати відрізняються на величину

$$\frac{\mu_{\mu,exp} - \mu_{\mu,theor}}{\mu_{\mu,B}} = 2.9 \cdot 10^{-9}. \quad (31.65)$$

Відзначимо, що вираз (31.44) був отриманий у припущенні, що зовнішнім ферміонним лініям відповідають реальні частинки. Без доведення наведемо кінцевий вираз для вершинної функції у випадку, коли реальним частинкам відповідає одна ферміонна (з 4-імпульсом  $p$ ) та одна фотонна лінія (з 4-імпульсом  $q$ ) [1]:

$$\Lambda^\mu(p+q, p) = \frac{\alpha}{2\pi} \left( \left[ A + B \frac{\not{q}}{m} \right] \gamma^\mu - \left[ C + D \frac{\not{q}}{m} \right] \frac{p^\mu}{m} \right), \quad (31.66)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \ln \frac{m^2}{m_A^2} - 2 + \frac{\chi + 2}{2(\chi + 1)} \ln |\chi| - \frac{1}{\chi} [F(-\chi - 1) - F(-1)], \\ B &= \frac{\ln |\chi|}{\chi + 1}, \quad C = \frac{1}{\chi + 1} - \frac{3\chi + 2}{(\chi + 1)^2} \ln |\chi|, \\ D &= \frac{1}{\chi + 1} - \frac{2}{\chi} + \frac{(\chi + 2)(2\chi + 1)}{\chi(\chi + 1)^2} \ln |\chi| - \frac{2}{\chi^2} [F(-\chi - 1) - F(-1)], \\ \chi &= \frac{2pq}{m^2}, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

### Завдання

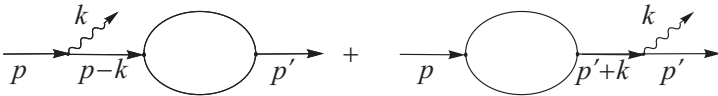
1. Отримайте вираз (31.14) у другому підході до перенормування.
2. Доведіть справедливність співвідношення (31.22).
3. Отримайте вираз (31.43).
4. Дайте якісне пояснення суттєво гіршому узгодженню з експериментальними даними теоретичного розрахунку магнітного моменту мюона в порівнянні з магнітним моментом електрона.

## РОЗДІЛ 32

### Випромінення м'яких фотонів. Позбавлення маси фотона у кінцевих виразах

До цього часу ми розглядали радіаційні поправки до окремих складових частин діаграм Фейнмана (фотонний та електронні пропагатори, вершинна функція). Однак отримані покращені вирази для зазначених величин виявилися такими, які не можна безпосередньо застосовувати: вирази для вершинної функції (31.42) та електронного пропагатора (26.84) містять нескінченні доданки типу  $\ln \frac{m_A^2}{m^2}$ , де  $m_A$  фіктивна маса фотона, яку слід спрямовувати до нуля. Фізичне пояснення такої ситуації полягає у тому, що для коректного розрахунку фізичних процесів з урахуванням вищих порядків теорії збурень слід брати до уваги не лише внесок петльових поправок, але й внесок від випромінення (гальмівного) низькоенергетичних (*м'яких*) фотонів зовнішніми ферміонними лініями відповідних діаграм<sup>1</sup>.

Покажемо, що розгляд задачі випромінення м'яких фотонів справді приводить до появи розбіжних величин. Розглянемо найпростіший випадок випромінення одного низькоенергетичного фотона з зовнішньої електронної лінії довільної діаграми, що містить одну вхідну та одну вихідну електронні лінії. Даний процес описуватиметься наступними двома діаграмами:



У порівнянні з випадком без випромінення м'яких фотонів вхідну електронну лінію на першій діаграмі слід замінити на

---

<sup>1</sup>Звичайно з зовнішніх електронних ліній довільної діаграми можуть (і будуть) випромінюватися фотони різних енергій. Ймовірність таких процесів розраховується стандартним чином. Цікавим для нас процесом буде випромінення саме м'яких фотонів.

$$v \rightarrow -i \frac{m + (\not{p} - \not{k})}{m^2 - (p - k)^2} (-ie) \gamma^\mu \frac{\epsilon_\mu^{*\lambda}}{\sqrt{2Vw}} v(p) = /p^2 = m^2, k^2 = 0, k \rightarrow 0 / = -e \frac{m + \not{p}}{2pk} \frac{\not{\epsilon}^{*\lambda}}{\sqrt{2Vw}} v(p), \quad (32.1)$$

де  $w$  – енергія м'якого фотона.

Врахувавши, що  $\not{p} \not{\epsilon}^{*\lambda} = 2(p\epsilon^{*\lambda}) - \not{\epsilon}^{*\lambda} \not{p}$  та (29.9), отримаємо

$$v \rightarrow -\frac{e}{\sqrt{2Vw}} \frac{(p\epsilon^{*\lambda})}{(pk)} v(p). \quad (32.2)$$

Повністю аналогічно, зовнішню лінію на другій діаграмі слід замінити на

$$\bar{v}(p') \rightarrow \bar{v}(p') \frac{e}{\sqrt{2Vw}} \frac{(p'\epsilon^{*\lambda})}{(p'k)}. \quad (32.3)$$

Звертаємо увагу, що в знаменниках останніх двох виразів містяться малі величини, що робить значним внесок від випромінювання м'яких фотонів саме з зовнішніх ферміонних ліній довільної діаграми. Звичайно, м'які фотони будуть випромінюватися і з внутрішніх ферміонних ліній діаграми, але внеском від таких процесів можна знехтувати. Справа у тому, що знаменник відповідного пропагатора матиме вигляд  $m^2 - (p - k)^2 = m^2 - p^2 + 2pk$ , однак для імпульсу  $p$  внутрішньої лінії не виконуватиметься умова  $p^2 = m^2$  і внеском доданку  $2pk$  можна знехтувати. З іншого боку амплітуда зазначеного процесу матиме додатковий малий множник заряду електрона, що відповідатиме новій вершині.

Якщо амплітуда процесу без випромінювання м'яких фотонів була  $M_{fi}$ , то вона зміниться на  $\frac{-e}{\sqrt{2Vw}} \frac{(p\epsilon^{*\lambda})}{(pk)} M_{fi}$  та на  $\frac{e}{\sqrt{2Vw}} \frac{(p'\epsilon^{*\lambda})}{(p'k)} M_{fi}$  для першої та другої діаграми відповідно. Врахувавши внесок обох діаграм, отримаємо

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} \frac{e}{\sqrt{2Vw}} \left( \frac{(p'\epsilon^{*\lambda})}{(p'k)} - \frac{(p\epsilon^{*\lambda})}{(pk)} \right). \quad (32.4)$$

Перед тим, як рухатися далі, звертаємо увагу на те, що отриманий вираз, внаслідок калібрувальної інваріантності  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ , є інваріантним відносно заміни  $\epsilon \rightarrow \epsilon + Ak$ , де  $A$  стала. Тому для випадку, коли випромінюється два м'яких фотони, вираз (32.4) узагальнюється до факторизованого вигляду

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} \frac{e}{\sqrt{2Vw_1}} \left( \frac{(p' \epsilon_1^{*\lambda})}{(p' k_1)} - \frac{(p \epsilon_1^{*\lambda})}{(p k_1)} \right) \frac{e}{\sqrt{2Vw_2}} \left( \frac{(p' \epsilon_2^{*\lambda})}{(p' k_2)} - \frac{(p \epsilon_2^{*\lambda})}{(p k_2)} \right). \quad (32.5)$$

Отже, узагальнення на випадок випромінення  $n$  м'яких фотонів стає очевидним.

Повернемося до задачі випромінення одного м'якого фотона. На підставі виразу (32.4) будемо диференційний переріз реакції

$$\begin{aligned} d\sigma_\gamma &= \frac{e^2}{2Vw} \left| \frac{(p' \epsilon^{*\lambda})}{(p' k)} - \frac{(p \epsilon^{*\lambda})}{(p k)} \right|^2 d\sigma_0 = \\ &= \frac{e^2}{2Vw} \left( \frac{p'^\mu p'^\nu \epsilon_\mu^{*\lambda} \epsilon_\nu^\lambda}{(p' k)^2} + \frac{p^\mu p^\nu \epsilon_\mu^{*\lambda} \epsilon_\nu^\lambda}{(p k)^2} - \frac{(p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu) \epsilon_\mu^{*\lambda} \epsilon_\nu^\lambda}{(p k)(p' k)} \right) d\sigma_0, \end{aligned} \quad (32.6)$$

де  $d\sigma_0$  – диференційний переріз реакції без врахування радіаційних поправок та випромінення м'яких фотонів,  $d\sigma_\gamma$  – переріз реакції, у якій випромінюються м'які фотони. Нехай нас не буде цікавити поляризація м'яких фотонів. Підсумуємо за поляризаційними станами  $\lambda$  використавши співвідношення (Д4.3.19) та отримаємо:

$$d\sigma_\gamma = \frac{e^2}{2Vw} \left( -\frac{m^2}{(p' k)^2} - \frac{m^2}{(p k)^2} + 2 \frac{(p' p)}{(p k)(p' k)} \right) d\sigma_0. \quad (32.7)$$

Знайдемо тепер ймовірність реакції з випроміненням одного м'якого фотона з імпульсом, модуль якого знаходиться в інтервалі від нуля до значення  $w_{max}$ , при якому наближення низькоенергетичних фотонів не може бути застосованим:

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_0 \int \frac{V d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{2Vw} \left( \frac{2(p' p)}{(p k)(p' k)} - \frac{m^2}{(p' k)^2} - \frac{m^2}{(p k)^2} \right). \quad (32.8)$$

Врахувавши, що для фотона  $|\vec{k}| = k_0 = w$ ,  $d\vec{k} = w^2 dw d\Omega$  та  $k = w(1, \vec{n}_\gamma)$ , в сферичній системі координат інтеграли за кутовою частиною можуть бути легко обраховані:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{m^2}{(p k)^2} = \int_0^\pi d\theta \frac{2\pi \sin \theta m^2}{w^2(p_0 - |\vec{p}'| \cos \theta)^2} = \frac{4\pi m^2}{w^2 p^2} = \frac{4\pi}{w^2},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' \frac{(p' p)}{(p k)(p' k)} &= /(\mathbf{22.19})/ = \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^1 dx \frac{2\pi \sin \theta' (p' p)}{[x(pk) + (1-x)(p' k)]^2} \\ &= \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^1 dx \frac{2\pi \sin \theta' (p' p)}{[k(xp + (1-x)p')]^2} = \frac{4\pi}{w^2} \int_0^1 dx \frac{(p' p)}{(xp + (1-x)p')^2}, \end{aligned} \quad (32.9)$$

де у першому інтегралі кут  $\theta$  це кут між векторами  $\vec{k}$  та  $\vec{p}$ , а у другому інтегралі кут  $\theta'$  – між векторами  $\vec{k}$  та  $x\vec{p} + (1-x)\vec{p}'$ . Враховуючи, що 4-імпульси  $p, p'$  належать реальним електронам, тобто  $p^2 = p'^2 = m^2$ ,  $pp' > 0$  можемо розрахувати останній інтеграл за змінною  $x$ . Зручно позначити  $p' - p = q$ , тоді справедливі співвідношення (29.7) та можна використати параметризацію за допомогою кута  $\vartheta$  (31.28):

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{(p' p)}{(xp + (1-x)p')^2} &= \int_0^1 dx \frac{m^2 - q^2/2}{m^2 - q^2 x(1-x)} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{\operatorname{ch} \vartheta}{1 + 2(\operatorname{ch} \vartheta - 1)x(1-x)} = \vartheta \operatorname{coth} \vartheta. \end{aligned} \quad (32.10)$$

Підставивши розраховані вирази у (32.8), отримаємо:

$$d\sigma_{\gamma} = d\sigma_0 \times \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{w_{max}} dw \frac{\mathcal{I}(p, p')}{w}, \quad (32.11)$$

де  $\alpha$  – стала тонкої структури та

$$\mathcal{I}(p, p') = 2(\vartheta \operatorname{coth} \vartheta - 1). \quad (32.12)$$

Звертаємо увагу, що величина  $(\vartheta \operatorname{coth} \vartheta - 1)$  є нічим іншим як коефіцієнтом при  $\ln(m/m_A)$  у перенормованому виразі для формфактора  $F_1$  вершинної функції (31.42).

Величина  $\mathcal{I}(p, p')$  збігається з класичною інтенсивністю низькочастотної частини гальмівного випромінювання зарядженої частинки<sup>1</sup> при

<sup>1</sup>Цей факт вказує на те, що випромінювання м'яких фотонів є квазікласичним процесом.

зміні 4-імпульсу від  $p$  до  $p'$  і отримала назву диференціальної інтенсивності енергії випромінення ( $E = e^2/(2\pi)^2 \int dw \mathcal{I}$ ) [12, 16]. Оскільки в низькочастотній границі величина  $\mathcal{I}$  не залежить від енергії фотона<sup>1</sup>, ми отримуємо логарифмічну розбіжність перерізу реакції за енергією м'якого фотона. Отже ймовірність випромінення одного м'якого фотона є нескінченною — дана ситуація отримала назву *інфрачервоної катастрофи*.

З фізичної точки зору отриманий результат слід розуміти наступним чином: закони збереження не забороняють випромінення безмасових фотонів з як завгодно малою енергією. При цьому чим меншою є енергія фотона, тим з більшою ймовірністю він буде народжений. Очевидним формально-математичним шляхом вирішення проблеми з нескінченністю є введення фіктивної маси фотона  $m_A$ . Поставивши її в нижній межі інтегрування у (32.11) отримаємо вираз

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_0 \times \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right] \mathcal{I}(p, p') = d\sigma_0 \times \frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right], \quad (32.13)$$

що містить розбіжність такого ж типу, яку ми спостерігали у вершинній функції та електронному пропагаторі.

Розглянемо тепер, що таке м'які фотони та параметр  $w_{max}$  з фізичної точки зору. Якщо ми маємо певну реакцію (напр. електрон-електронне розсіяння) і за допомогою відповідних детекторів фіксуємо народження додаткового низькоенергетичного фотона (фотонів) **з певними характеристиками** — це не є випромінення м'яких фотонів, оскільки в наведеному випадку ймовірність такого процесу просто рахується згідно з правил діаграмної техніки Фейнмана. М'які фотони — це фотони, енергія яких суттєво менша за енергії інших частинок (в тому числі фотонів), що беруть участь у реакції. Вони не фіксуються детектором і їх енергія має значення менші за його межу чутливості. Для врахування внеску м'яких фотонів ми вимушені інтегрувати за інтервалом їх енергій від нуля до певного порогового значення. Відповідно параметр  $w_{max}$  і є тією пороговою енергією фотона, нижче за яку він не сприймається детектором.

Оскільки процес випромінення м'яких фотонів є квазікласичним,

<sup>1</sup>Вираз (32.12) залежить лише від  $\vartheta$ , що визначається різницею початкових та кінцевих 4-імпульсів реакції  $p - p' = q$ , котра не залежить від врахування випромінення м'яких фотонів.

множник  $\mathcal{J}/w$  у (32.11) можна розуміти як відношення енергії випромінювання на енергію одного фотона, тобто як кількість м'яких фотонів з енергією  $w$ . Це означає важливість врахування багатифотонних процесів, тобто розгляду задачі у вищих порядках теорії збурень. Така задача була розв'язана в загальному випадку (з урахуванням довільної кількості утворених м'яких фотонів). Головним результатом є те, що інфрачервоні розбіжності скорочуються у довільному випадку теорії збурень<sup>1</sup>.

У спрощеному вигляді покажемо як враховується внесок багатьох м'яких фотонів для випадку наявності у діаграмі процесу лише одного початкового електрона та одного кінцевого електрона.

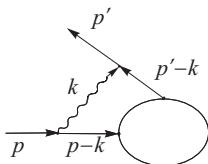
По-перше, випромінювання багатьох м'яких реальних фотонів відбувається незалежним чином, тому амплітуди реакцій перемножуються, див. (32.5). Окремий внесок кожного з фотонів задається виразом (32.13). Сумарний ефект враховує випромінювання усіх можливих кількостей фотонів та має вигляд

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_0 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right] \mathcal{J}(p, p') \right]^n, \quad (32.14)$$

де множник  $1/n!$  має симетричну природу і пов'язаний з тим, що у кінцевому стані маємо  $n$  ідентичних бозонів. Отриманий ряд є розкладом у ряд Тейлора експоненти, тобто

$$d\sigma_\gamma = d\sigma_0 \times e^{\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right] \mathcal{J}(p, p')}. \quad (32.15)$$

По-друге, окрім розгляду випромінювання реальних фотонів слід врахувати внесок віртуальних м'яких фотонів, що з'єднують лінії реальних електронів<sup>2</sup>. В першому неznикаючому наближенні він буде задаватися діаграмою



<sup>1</sup>D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, *Ann. Phys.* **13**, 379, (1961); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **140**, B516 (1965).

<sup>2</sup>Звичайно віртуальні фотони можуть мати будь-які значення квадрату 4-імпульса, але потрібний нам внесок даватимуть лише м'які віртуальні фотони.



якій відповідатиме вираз, подібний за структурою до виразу, що описує випромінення двох м'яких фотонів (32.5), у якому лінії вільних фотонів слід об'єднати для утворення фотонного пропатора. При цьому, як випливає з діаграми, 4-імпульс другого фотона у (32.5) дорівнює 4-імпульсу першого фотона зі знаком  $(-)$ , а множники вільних фотонів  $(\epsilon_i/\sqrt{2Vw_i})$  слід замінити на множник фотонного пропатора та проінтегрувати за 4-імпульсом віртуального фотона:

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} X, \\ X = \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( \frac{p'}{(p' k)} - \frac{p}{(p k)} \right) \left( \frac{p'}{-(p' k)} - \frac{p}{-(p k)} \right). \quad (32.16)$$

Додатковий множник  $1/2$  виникає внаслідок симетрії процесу до заміни місцями першого та другого м'якого фотона, що були об'єднані у пропатор. Розрахунок величини  $X$  дає наступну відповідь<sup>1</sup>:

$$X = -\frac{\alpha}{4\pi} \ln \left[ \frac{-q^2}{m_A^2} \right] \mathfrak{J}(p, p'), \quad (32.17)$$

де ми знов позначили  $q = p' - p$ . Врахування усіх можливих обмінів віртуальними м'якими фотонами призводить до

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} = M_{fi} e^X, \quad (32.18)$$

що модифікує переріз реакції наступним чином:

$$d\sigma_{rad,\gamma} = d\sigma_0 \times e^{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{-q^2}{m_A^2} \right] \mathfrak{J}(p, p')}. \quad (32.19)$$

Переріз реакції з випроміненням м'яких фотонів з урахуванням радіаційних поправок (віртуальних м'яких фотонів) до діаграм з випроміненням м'яких фотонів матиме вигляд:

$$d\sigma = d\sigma_0 \times e^{\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right] \mathfrak{J}(p, p')} e^{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{-q^2}{m_A^2} \right] \mathfrak{J}(p, p')} = \\ = d\sigma_0 \times e^{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{-q^2}{w_{max}^2} \right] \mathfrak{J}(p, p')} = d\sigma_0 \times e^{-\frac{\alpha}{\pi} \ln \left[ \frac{-q^2}{w_{max}^2} \right] (\vartheta \coth \vartheta - 1)}. \quad (32.20)$$

Тобто врахування м'яких фотонів приводить до появи у перерізі реакції певного множника, що обмежений значенням від 0 до 1.

<sup>1</sup>Деталі в роботі S. Weinberg, Phys. Rev. **140**, B516 (1965).

Повернемося тепер до задачі випромінення одного м'якого фотона. Повний переріз реакції, очевидно, буде сумою перерізів реакцій<sup>1</sup> з м'якими фотонами та з урахуванням радіаційних поправок ( $d\sigma_{rad}$ ). На грубом рівні (детальніше див. у наступному розд.) цікаві для нас радіаційні поправки даватимуть внесок (32.15), (32.19), тоді

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_{rad,\gamma} + d\sigma_{\gamma} = \\ &= d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{-q^2}{m_A^2} \right] + \frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{w_{max}^2}{m_A^2} \right] + \dots \right) = \\ &= d\sigma_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{-q^2}{w_{max}^2} \right] + \dots \right). \end{aligned} \quad (32.21)$$

Як бачимо маса фотона зникає з кінцевих виразів. Умова застосування наближення випромінення одного м'якого фотона є очевидною:

$$\frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{-q^2}{w_{max}^2} \right] \ll 1, \quad (32.22)$$

в іншому випадку поправка буде давати більший внесок ніж основний доданок і слід враховувати процеси з випроміненням багатьох м'яких фотонів.

Відповідно, при розгляді певного фізичного процесу слід враховувати випромінення м'яких фотонів у відповідному порядку теорії збурень (випромінення одного, двох м'яких фотонів тощо), що й повинно призвести до позбавлення від маси фотона у кінцевому результаті. При цьому у кінцеву відповідь увійде параметр  $w_{max}$ .

### Завдання

1. Отримайте вираз (32.5) шляхом безпосереднього розрахунку.
2. Отримайте вираз (32.17).

---

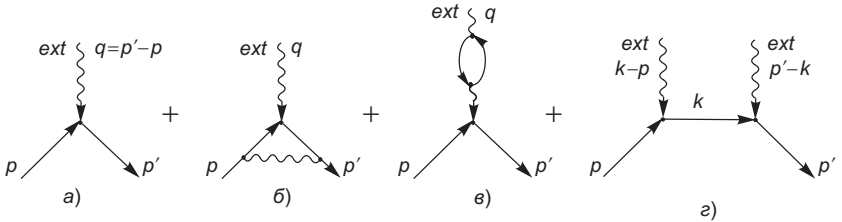
<sup>1</sup>Ми не враховуємо радіаційні поправки до діаграм з випроміненням м'якого фотона, оскільки вони даватимуть поправку  $\sim \alpha^2$ , що не може враховуватися в нашому наближенні.

## РОЗДІЛ 33

### Кулонівське розсіяння з урахуванням радіаційних поправок

Розглянемо процес розсіяння електрона у зовнішньому полі важкого ядра з урахуванням радіаційних поправок та випромінювання м'яких фотонів.

Радіаційні поправки до даного процесу, з точністю<sup>1</sup> до  $e^4$ , матимуть вигляд:



Внесок діаграм  $a, b, c$  модифікує  $S$ -матриці до вигляду

$$S_{fi}^{(1) a, b, c} = -ie \frac{\bar{v}(p')}{\sqrt{2Vp'_0}} [\gamma^\mu + \Lambda^\mu + i\mathcal{P}^{\mu\nu} iD_{\nu\chi} \gamma^\chi] A_\mu^{ext}(q) \frac{v(p)}{\sqrt{2Vp_0}}. \quad (33.1)$$

Запишемо останній доданок врахувавши (27.15), (Д4.5.15):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu\nu} D_{\nu\chi} \gamma^\chi &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) w(q^2) \frac{-1}{q^2} \left( g_{\nu\chi} - (1 - \xi) \frac{q_\nu q_\chi}{q^2} \right) \gamma^\chi = \\ &= (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) w(q^2) \frac{-1}{q^2} g_{\nu\chi} \gamma^\chi = w(q^2) \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (33.2)$$

де ми врахували наявність множників  $\bar{v}$ ,  $v$  у (33.1) та закон збереження електричного заряду  $\partial^\mu j_\mu = 0 \rightarrow q^\mu j_\mu = 0$ . Врахувавши явний

---

<sup>1</sup>Зовнішнє поле  $A_\mu \sim e$  (10.10).

вигляд вершинної функції (31.44), отримаємо

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1) a, b, \varepsilon} &= -ie \frac{\bar{v}(p')}{\sqrt{2V}p_0} \left[ \gamma^\mu + F_1(q^2)\gamma^\mu + i \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_2(q^2) - \right. \\
 &\quad \left. -w(q^2)\gamma^\mu \right] A_\mu^{ext}(q) \frac{v(p)}{\sqrt{2V}p_0} = \left/ A_\mu^{ext}(q) = 2\pi\delta(q_0) \frac{Ze}{q^2 + \sigma^2} \delta_{\mu 0} \right/ = \\
 &= -2\pi i \frac{Ze^2\delta(q_0)}{q^2 + \sigma^2} \frac{\bar{v}(p')}{\sqrt{2V}p_0} \gamma^0 \left[ 1 + F_1(q^2) - \frac{q}{2m} F_2(q^2) - w(q^2) \right] \frac{v(p)}{\sqrt{2V}p_0},
 \end{aligned} \tag{33.3}$$

де  $\sigma$  – формальний параметр розмірності маси, який необхідно використовувати для коректного отримання фур'є-образу кулонівського потенціалу. Після проведення розрахунків параметр  $\sigma$  слід спрямувати до нуля.

Оскільки формфактори  $F_1(q^2)$  (31.42) та  $F_2(q^2)$  (31.29) були нами явно отримані в представленні (31.28), корисно навести вираз для складової поляризаційного оператора  $w$  (27.44) у тому ж представленні:

$$w = -\frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{9} + \left( 1 - \frac{\coth^2(\vartheta/2)}{3} \right) \left( \frac{\vartheta}{2} \coth(\vartheta/2) - 1 \right) \right]. \tag{33.4}$$

Знайдемо тепер внесок діаграми  $z$ :

$$S_{fi}^{(1) z} = \frac{(-ie)^2(2\pi)^2(Ze)^2}{2V\sqrt{p_0'}p_0} \times \tag{33.5}$$

$$\bar{v}(p') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p_0' - k_0)}{(p' - k)^2 - \sigma^2} \gamma^0 (-i) \frac{m + \not{k}}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \gamma^0 \frac{\delta(p_0 - k_0)}{(k - p)^2 - \sigma^2} \right] v(p).$$

Наявні дельта-функції накладають такі обмеження  $k_0 = p_0 = p_0' = E$ ,  $\vec{p}^2 = \vec{p}'^2$ . Вираз у чисельнику (33.5) можна записати як  $\gamma^0(m + \not{k})\gamma^0 = m + \gamma^0 E - \vec{\gamma} \vec{k}$ , де  $\vec{\gamma} \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \gamma^i A_i$ . Отримаємо

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1) z} &= \frac{i(e)^2(2\pi)^2(Ze)^2\delta(p_0' - p_0)}{2Vp_0} \times \tag{33.6} \\
 &\times \bar{v}(p') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2} \frac{m + \gamma^0 E - \vec{\gamma} \vec{k}}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2} \right] v(p),
 \end{aligned}$$

де ми зберігаємо нескінченно малий доданок  $i\varepsilon$  у електронному пропагаторі, бо інакше матимемо розбіжність при  $\vec{k}^2 = \vec{p}^2$ .

Зручно виділити окремі складові для подальшого розрахунку

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{[(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2](\vec{p}^2 - \vec{k}^2)[(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2]}, \quad (33.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{[(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2](\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)[(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{k}}{(\vec{p}^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{p}'\vec{k} + \sigma^2)(\vec{p}^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{p}\vec{k} + \sigma^2)(\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (33.8)$$

Зробивши у виразі для  $\vec{J}$  заміну  $k_i = x_i(p_i + p'_i)/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , отримаємо

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{p_i + p'_i}{2} \left( \frac{p_1 + p'_1}{2} \frac{p_2 + p'_2}{2} \frac{p_3 + p'_3}{2} \right) \times \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{x} \frac{x_i}{\left( \vec{p}^2 + \sum_j \left( \frac{p_j + p'_j}{2} \right)^2 x_j^2 - \sum_j (p_j p'_j + p_j^2) x_j + \sigma^2 \right)^2} \times \\ &= \frac{1}{\left( \vec{p}^2 - \sum_j \left( \frac{p_j + p'_j}{2} \right)^2 x_j^2 + i\varepsilon \right)}. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Як легко побачити, значення інтегралу в нових змінних є однаковим для всіх значень  $i = 1, 2, 3$ . З цього випливає, що векторну функцію  $\vec{J}$  можна представити у вигляді

$$\vec{J} = \frac{\vec{p} + \vec{p}'}{2} I_2. \quad (33.10)$$

Знайдемо тепер  $\vec{J}\vec{\gamma}$  врахувавши, що з (29.9) випливає співвідношення  $(\vec{\gamma}\vec{p} + \vec{\gamma}\vec{p}') = 2(m - \gamma^0 E)$ . Отримаємо

$$\vec{J}\vec{\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \frac{\vec{\gamma}\vec{k}}{[(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2](\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)[(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2]} = (\gamma^0 E - m)I_2. \quad (33.11)$$

Враховуючи наведені вирази, можемо записати внесок до  $S$ -матриці від діаграми  $z$  у вигляді:

$$S_{fi}^{(1)z} = -2\pi i \frac{Ze^2 \delta(p_0' - p_0)}{2V p_0 \vec{q}^2} \bar{v}(p') \frac{\vec{q}^2 Z \alpha}{2\pi^2} [-\gamma^0 E(I_1 + I_2) - m(I_1 - I_2)] v(p), \quad (33.12)$$

де ми виділили загальний множник як і у (33.3).

Для розрахунку інтегралів  $I_1$ ,  $I_2$  зазначимо, що за допомогою представлення Фейнмана (22.19) їх складовий множник можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{[(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2][(\vec{k} - \vec{p})^2 + \sigma^2]} &= \int_0^1 \frac{d\beta}{[\beta(\vec{p} - \vec{k})^2 + (1-\beta)(\vec{p}' - \vec{k})^2 + \sigma^2]^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\beta}{[\vec{p}^2 + \vec{k}^2 - 2\vec{k}(\beta\vec{p} + (1-\beta)\vec{p}') + \sigma^2]^2} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\beta}{[(\vec{k} - \vec{P})^2 + M^2]^2} = -\frac{\partial}{2M\partial M} \int_0^1 \frac{d\beta}{(\vec{k} - \vec{P})^2 + M^2}, \end{aligned} \quad (33.13)$$

де  $\vec{P} = \beta\vec{p} + (1-\beta)\vec{p}'$ ,  $M^2 = \sigma^2 + 4\beta(1-\beta)\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$ ,  $\theta$  – кут між векторами  $\vec{p}$  та  $\vec{p}'$ . Тоді

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^1 d\beta \frac{\partial}{2M\partial M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)((\vec{k} - \vec{P})^2 + M^2)}; \quad (33.14) \\ \frac{(p+p')_\alpha}{2} I_2 &= \int_0^1 d\beta \left( \frac{\partial}{2\partial P_\alpha} - \frac{P_\alpha}{2M} \frac{\partial}{\partial M} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)((\vec{k} - \vec{P})^2 + M^2)}. \end{aligned}$$

Проміжний інтеграл можна розрахувати аналітично. Додавка  $i\varepsilon$  у знаменнику дозволяє забути про полюс в точці  $\vec{k}^2 = \vec{p}^2$ . У кінцевій

відповіді слід покласти  $\varepsilon$  до нуля. Отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(\vec{p}^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon)((\vec{k} - \vec{P})^2 + M^2)} = \frac{i\pi^2}{|\vec{P}|} \ln \frac{|\vec{p}| - |\vec{P}| + iM}{|\vec{p}| + |\vec{P}| + iM}. \quad (33.15)$$

Підставивши (33.15) у (33.14), отримаємо

$$I_1 = -\pi^2 \int_0^1 \frac{d\beta}{M((M - i|\vec{p}|)^2 + |\vec{P}|^2)}, \quad (33.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{(p+p')_\alpha}{2} I_2 = & -\frac{\pi^2}{2} \int_0^1 d\beta P_\alpha \times \\ & \times \left( \frac{2}{M|\vec{P}|^2} \frac{M^2 - iM|\vec{p}| + |\vec{P}|^2}{(M - i|\vec{p}|)^2 + |\vec{P}|^2} + \frac{i}{|\vec{P}|^3} \ln \frac{|\vec{p}| - |\vec{P}| + iM}{|\vec{p}| + |\vec{P}| + iM} \right). \end{aligned} \quad (33.17)$$

Інтегрування за параметром  $\beta$  можна провести аналітично. В кінцевому виразі слід спрямувати  $\sigma$  до нуля. Отримаємо

$$I_1 = \frac{-i\pi^2}{2|\vec{p}|^3 \sin^2(\theta/2)} \ln \frac{2|\vec{p}| \sin(\theta/2)}{\sigma}, \quad (33.18)$$

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2|\vec{p}|^3 \cos^2(\theta/2)} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right] - i \left[ \frac{\ln \frac{2|\vec{p}| \sin(\theta/2)}{\sigma}}{\sin^2(\theta/2)} + \ln \frac{\sigma}{2|\vec{p}|} \right] \right\}. \quad (33.19)$$

Зазначимо, що при розрахунку інтеграла в (33.17) в його правій частині автоматично виділяється множник  $(p+p')_\alpha/2$ , який можна скоротити. Від параметра  $\sigma$  позбавитися не вдається.

Остаточно, амплітуда процесу з урахуванням діаграм *a*, *b*, *v*, *z* має вигляд (порівняйте з (15.1)):

$$M_{fi} = -Ze^2 \frac{\bar{v}(p') T v(p)}{\vec{q}^2}, \quad (33.20)$$

де матриця  $T$  задається виразом

$$T = \gamma^0(1 + A) - \gamma^0 \frac{\not{q}}{2m} F_2(q^2) + B, \quad (33.21)$$

$$A = F_1(q^2) - w(q^2) - \frac{Z\alpha}{2\pi^2} \vec{q}^2 E(I_1 + I_2), \quad (33.22)$$

$$B = -\frac{Z\alpha}{2\pi^2} \vec{q}^2 m (I_1 - I_2). \quad (33.23)$$

Звертаємо увагу на те, що величини  $A$ ,  $B$ ,  $F_2 \sim \alpha$ .

Наступним кроком нам потрібно знайти квадрат модуля амплітуди, що усереднений за поляризаціями електронів. За аналогією з діями у розд. 14 отримаємо:

$$\frac{\vec{q}^4}{Z^2 e^4} |\overline{M_{fi}}|^2 = \frac{1}{2} Tr[T(m + \not{p}) \bar{T}(m + \not{p}')], \quad \text{де} \quad (33.24)$$

$$\bar{T} = /(\text{14.4})/ = \gamma^0(1 + A^*) + \gamma^0 \frac{\not{q}}{2m} F_2(q^2) + B^*. \quad (33.25)$$

При розрахунку згортки  $Tr[T(m + \not{p}) \bar{T}(m + \not{p}')]$  нам слід зберігати лише доданки  $\sim \alpha^0$  та  $\sim \alpha^1$  (інакше, окрім діаграм  $a - z$ , слід враховувати також діаграми з амплітудою  $\sim \alpha^3$ ). Підставивши означення матриць  $T$  та  $\bar{T}$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} Tr[T(m + \not{p}) \bar{T}(m + \not{p}')] &= Tr[m^2(1 + 2\text{Re}A)\gamma^0\gamma^0 + \gamma^0 \not{p} \gamma^0 \not{p}'(1 + 2\text{Re}A) - \\ &\quad - [(\gamma^0\gamma^0 \not{q} \not{p}' - \gamma^0 \not{q} \gamma^0 \not{p}') - (\gamma^0\gamma^0 \not{q} \not{p} - \gamma^0 \not{q} \gamma^0 \not{p}')] F_2/2 + \\ &\quad + m\gamma^0 \not{p}'(B + B^*) + m(\gamma^0 \not{p} B^* + \not{p} \gamma^0 B)] = \\ &= 4\{(1 + 2\text{Re}A)2E^2(1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)) - 4E^2\beta^2 \sin^2(\theta/2)F_2 + 4mE \text{Re}B\}, \end{aligned} \quad (33.26)$$

у якому величини  $\text{Re}A$  та  $\text{Re}B$  вже не містять проблемного параметра  $\sigma$ , було використано позначення  $\beta^2 = \vec{p}^2/E^2$  для квадрата швидкості електрона ( $0 \leq \beta < 1$ ) та враховано, що  $q^2 = -4\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$ .

Запишемо тепер диференційний переріз розсіяння (12.71):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{рад}}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_{\text{Мотт}}}{d\Omega} \left\{ 1 + 2\text{Re}A - \frac{2\beta^2 \sin^2(\theta/2)F_2}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} + \frac{m}{E} \cdot \frac{2 \text{Re}B}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \right\} \\ &= \frac{d\sigma_{\text{Мотт}}}{d\Omega} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[ (\vartheta \text{cth } \vartheta - 1) \left( 1 - \ln \frac{m}{m_A} \right) - 2 \text{cth } \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \text{th } \varphi d\varphi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\vartheta \text{th}(\vartheta/2)}{4} + \frac{1}{9} + \left( 1 - \frac{\text{coth}^2(\vartheta/2)}{3} \right) \left( \frac{\vartheta}{2} \text{coth}(\vartheta/2) - 1 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\vartheta}{2 \text{sh } \vartheta} \cdot \frac{\beta^2 \sin^2(\theta/2)}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \right] + Z\alpha\beta\pi \frac{\sin(\theta/2)(1 - \sin(\theta/2))}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \right\}, \end{aligned} \quad (33.27)$$



де  $d\sigma_{\text{рад}}$  – переріз реакції кулонівського розсіяння з урахуванням радіаційних поправок,  $d\sigma_{\text{Мотт}}$  – переріз реакції кулонівського розсіяння у першому незнижючому наближенні (15.6). Нажаль, даний вираз не може бути практично використаний, оскільки містить доданок  $\sim \ln(m/m_A)$ . Щоб позбавитися його слід врахувати випромінювання м'яких фотонів згідно з (32.13):

$$\frac{d\sigma_{\gamma}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{Мотт}}}{d\Omega} \frac{\alpha}{\pi} (\vartheta \coth \vartheta - 1) \ln \left[ \frac{w_{\text{max}}^2}{m_A^2} \right]. \quad (33.28)$$

Повний переріз реакції, як і очікувалося, не міститиме маси фотона

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_{\gamma}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\text{рад}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{Мотт}}}{d\Omega} (1 + \Delta) = \\ &= \frac{d\sigma_{\text{Мотт}}}{d\Omega} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[ (\vartheta \operatorname{cth} \vartheta - 1) \left( 1 - \ln \frac{m}{w_{\text{max}}} \right) - 2 \operatorname{cth} \vartheta \int_0^{\vartheta/2} \varphi \operatorname{th} \varphi d\varphi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\vartheta \operatorname{th}(\vartheta/2)}{4} + \frac{1}{9} + \left( 1 - \frac{\operatorname{coth}^2(\vartheta/2)}{3} \right) \left( \frac{\vartheta}{2} \operatorname{coth}(\vartheta/2) - 1 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\vartheta}{2 \operatorname{sh} \vartheta} \cdot \frac{\beta^2 \sin^2(\theta/2)}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \right] + Z\alpha\beta\pi \frac{\sin(\theta/2)(1 - \sin(\theta/2))}{1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)} \right\}. \quad (33.29) \end{aligned}$$

Слід відзначити, що параметри  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$  не є незалежними. Справді

$$\beta^2 = \frac{\vec{p}^2}{E^2} = \frac{\vec{p}^2}{\vec{p}^2 + m^2} = \frac{\vec{p}^2/m^2}{1 + \vec{p}^2/m^2} \Rightarrow \frac{\vec{p}^2}{m^2} = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (33.30)$$

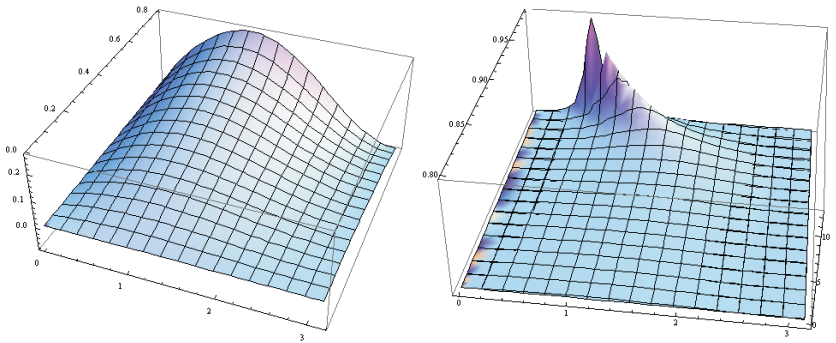
тобто для  $-q^2 = 4\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$  матимемо

$$\vartheta = /(\text{31.28})/ = 2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{-q^2}{4m^2}} = 2 \operatorname{arcsinh} \left[ \frac{\beta \sin(\theta/2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \quad (33.31)$$

Звертаємо увагу, що радіаційні поправки в даному процесі обов'язково слід враховувати, оскільки їх внесок зростає при збільшенні енергії електрона, що розсіюється (при збільшенні параметра  $\beta$ ). Нажаль, розраховані нами поправки до формули Мотта втрачають сенс при відносно невеликих значеннях  $\beta \gtrsim 0.8$  для довільних значень кута

розсіяння<sup>1</sup>  $\theta$  (умова  $\Delta \ll 1$  перестає виконуватися) і потребують розрахунків у наступних порядках теорії збурень. Очевидно також, що вплив значення кута розсіяння  $\theta$  буде тим більшим, чим більшою є швидкість електрона (параметр  $\beta \rightarrow 1$ ) за рахунок наявності знаменника  $1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)$ .

Наведемо поведінку поправки  $\Delta$  до формули Мотта в залежності від параметрів швидкості електрона  $\beta$  та кута розсіяння  $\theta$  у випадку, коли  $w_{max}/m = 10^{-6}$  та для важкого ядра з параметром  $Z = 50$ .



### Завдання

1. Доведіть справедливість (33.4).
2. Отримайте вираз (33.15).
3. Отримайте вираз (33.26).
4. Які діаграми потрібно додатково врахувати для розрахунку згортки (33.26) з точністю до величин  $\sim \alpha^2$ ?
5. Отримайте вираз (33.27).

<sup>1</sup>При певних значеннях кута  $\theta$  параметр  $\beta$  може приймати і більші значення.

## РОЗДІЛ 36

### Кіральна аномалія

Розглянемо деяку абстрактну теорію безмасового ферміонного поля, у якій є два векторних поля  $A_\mu$  та  $B_\mu$ . Нехай поле  $A_\mu$  взаємодіє з ферміонним полем як у КЕД, а саме за допомогою векторного ферміонного струму  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ , тобто  $\mathcal{L}_{int,A} = -ej_\mu A^\mu$ . Нехай поле  $B_\mu$  взаємодіє з псевдовекторним (аксіальним) струмом  $j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$ , тобто  $\mathcal{L}_{int,B} = -gj_\mu^5 B^\mu$ . Лагранжіан такої теорії запишемо у вигляді

$$\mathcal{L}_{AB} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - g\gamma_\mu\gamma^5 B^\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) \quad (36.1)$$

та відзначимо, що подібну структуру має і лагранжіан СМ.

Лагранжіан (36.1) має симетрію відносно двох типів локальних калібрувальних перетворень:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\Omega(x)}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\Omega(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial_\mu\Omega}{e}, \quad (36.2)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\Omega_5(x)\gamma^5}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\Omega_5(x)\gamma^5}, \quad B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{\partial_\mu\Omega_5}{g}. \quad (36.3)$$

Другий тип калібрувальних перетворень називають кіральними<sup>1</sup>. Інваріантність відносно кіральних перетворень може бути лише для безмасових теорій. Справді, масовий доданок лагранжіану

$$m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}e^{2i\Omega_5\gamma^5}\psi \neq m\bar{\psi}\psi.$$

Згідно з теоремою Ньотер, наявній інваріантності безмасового лагранжіана відносно кіральних калібрувальних перетворень повинна відповідати певна величина, що зберігається у часі. Це буде аксіальний струм.

Нагадаємо, що векторний струм вільних ферміонів  $j_\mu$  зберігається, тобто  $\partial^\mu j_\mu = 0$ , як наслідок наявності у лагранжіана калібрувальної

---

<sup>1</sup>Наявність матриці  $\gamma^5$  в показнику експоненти не повинна бентежити читача. Таку експоненту слід представити у вигляді її розкладу у ряд Тейлора. Доданки розкладу будуть матрицями.

інваріантності відносно перетворень (36.2). Дане твердження легко доводиться за допомогою польових рівнянь (Д5.1) та (Д5.10):

$$\partial^\mu j_\mu = (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi = im \bar{\psi} \psi - im \bar{\psi} \psi = 0. \quad (36.4)$$

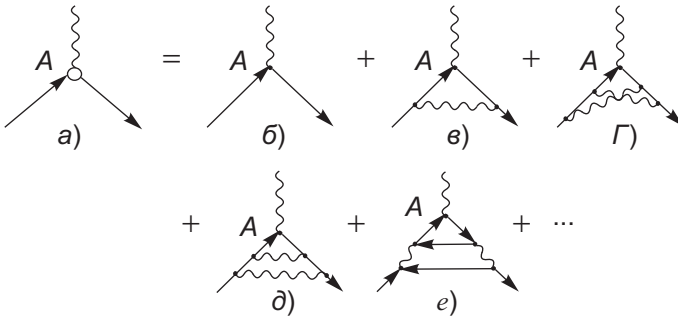
Аналогічним чином отримуємо для струму  $j_\mu^5$

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (36.5)$$

Тобто аксіальний струм справді буде зберігатися лише для безмасових ферміонів, що й потрібно було довести.

Суть проблеми, яка розглядатиметься у даному розд. полягає в тому, що при розгляді певного процесу в рамках вторинноквантованої теорії поля у вищих порядках теорії збурень виявиться, що аксіальний струм перестає зберігатися для безмасових ферміонів. Дана проблема отримала назву *кіральної аномалії*.

Розглянемо це детальніше. Без урахування радіаційних поправок лагранжіану взаємодії  $\mathcal{L}_{int,B} = -g \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi B^\mu$  відповідає діаграма Фейнмана в першому порядку теорії збурень. Радіаційні поправки до неї будуть модифікувати вирази для ферміонних та векторної ліній та вираз для вершинної функції. Поправки до ферміонних та векторної ліній будуть змінювати значення заряду та маси частинок в даній теорії і не мають жодного відношення до проблеми кіральної аномалії. Тому будемо розглядати поправки до вершинної функції, які задаються наступними діаграмами



де літера  $A$  позначає аксіальну вершину (містить матрицю  $\gamma^5$ ). В інших вершинах діаграм не проставлені літери, бо точкам можуть відповідати як аксіальні ( $A$ ), так і векторні ( $V$ ) вершини. Перебір усіх

варіантів був би громіздким. Звертаємо увагу, що остання діаграма ( $e$ ) відсутня у складі поправок до вершинної функції КЕД (див. розд. 29), оскільки містить петлю з трьома ферміонними лініями та дає нульовий внесок згідно з теоремою Фаррі. В нашому випадку така діаграма дає ненульовий внесок і містить певну особливість, котра приводить до появи киральної аномалії. Щоб побачити це розглянемо внутрішні складові діаграми  $e$

(36.6)

Нам достатньо буде розглянути лише діаграму  $AVV$ . Ми виділимо проблему та покажемо шлях її розв'язання. Після цього проблема в діаграмі  $AAA$  буде вирішена автоматично, так само як і проблеми у більш високих порядках теорії збурень [18].

Для початку зазначимо, що в теорії з лагранжіаном (36.1) матриця розсіяння (1.55) матиме вигляд

$$\hat{S} = \hat{T} e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \left[ e\hat{N}(\hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi})\hat{A}_\mu + g\hat{N}(\hat{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\hat{\Psi})\hat{B}_\mu \right]}. \quad (36.7)$$

Нас цікавитиме величина  $\hat{S}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(3)} = & \frac{(-i)^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x d^4x' d^4x'' \times \\ & \times \hat{T} \left[ \left( e\hat{N}(\hat{\Psi}\gamma^\mu\hat{\Psi})\hat{A}_\mu + g\hat{N}(\hat{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\hat{\Psi})\hat{B}_\nu \right) (x \rightarrow x')(x \rightarrow x'') \right], \end{aligned} \quad (36.8)$$

де множники в дужках відрізняються від першого множника відповідною заміною координат. Діаграма  $AVV$  буде описуватися наступним доданком з  $\hat{S}^{(3)}$ , який ми усереднили по початковому стану кванта поля  $B$  (входить у діаграму) та кінцевому стану двох квантів поля  $A$  (виходять з діаграми):

$$S_{fi}^{(3)} = (-i)^3 e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x d^4 x' d^4 x'' \langle 0 | c_1^+ c_2^+ \hat{A}_\mu \hat{A}_\nu' \hat{B}_\sigma'' b^+ | 0 \rangle \times \\ \times (-1) Tr [\gamma^\mu (-i) G(x - x') \gamma^\nu (-i) G(x' - x'') \gamma^\sigma \gamma^5 (-i) G(x'' - x)] \quad (36.9)$$

Вакуумне середнє від операторів векторних полів дає

$$\langle 0 | c_1^+ c_2^+ \hat{A}_\mu \hat{A}_\nu' \hat{B}_\sigma'' b^+ | 0 \rangle = \\ = \left( \frac{\epsilon_\mu^{*1}(\vec{p}) e^{-ipx}}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \frac{\epsilon_\nu^{*2}(\vec{q}) e^{-iqx'}}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} + \frac{\epsilon_\mu^{*2}(\vec{q}) e^{-iqx}}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} \frac{\epsilon_\nu^{*1}(\vec{p}) e^{-ipx'}}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \right) \frac{\varrho_\sigma(\vec{f}) e^{ifx''}}{\sqrt{2V w_{\vec{f}}}}, \quad (36.10)$$

де  $\epsilon$ ,  $\varrho$  – вектора поляризації полів  $A$  та  $B$  відповідно, частинка поля  $A$  з індексом 1 має 4-імпульс  $p$ , з індексом 2 – 4-імпульс  $q$ , частинка поля  $B$  має 4-імпульс  $f = p + q$ . Підставивши цей результат у (36.9), отримаємо

$$S_{fi}^{(3)} = e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x d^4 x' d^4 x'' \times \\ \times Tr [\gamma^\mu G(x - x') \gamma^\nu G(x' - x'') \gamma^\sigma \gamma^5 G(x'' - x)] \times \\ \times \left( \frac{\epsilon_\mu^{*1}(\vec{p}) e^{-ipx}}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \frac{\epsilon_\nu^{*2}(\vec{q}) e^{-iqx'}}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} + \frac{\epsilon_\mu^{*2}(\vec{q}) e^{-iqx}}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} \frac{\epsilon_\nu^{*1}(\vec{p}) e^{-ipx'}}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \right) \frac{\varrho_\sigma(\vec{f}) e^{ifx''}}{\sqrt{2V w_{\vec{f}}}}. \quad (36.11)$$

Щоб винести за дужки частину, що відповідає векторним полям, у другому доданку замінимо місцями індекси  $\mu \leftrightarrow \nu$  та отримаємо у імпульсному просторі:

$$S_{fi}^{(3)} = \nabla^{\sigma\nu\mu} \frac{\epsilon_\mu^{*1}(\vec{p}) \epsilon_\nu^{*2}(\vec{q}) \varrho_\sigma(\vec{p} + \vec{q})}{(2V)^{3/2} \sqrt{w_{\vec{p}} w_{\vec{q}} w_{\vec{p} + \vec{q}}}}, \quad (36.12)$$

де множники, що відповідають квантам реальних векторних полів можуть бути замінені на множники, що відповідають зовнішнім полям або відповідним пропагаторам векторних полів (внесок внутрішніх ліній), а тензор  $\nabla^{\sigma\nu\mu}$  відповідає внеску ферміонних петель  $AVV$ :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\sigma\nu\mu} &= e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu G(k) \gamma^\nu G(k+q) \gamma^\sigma \gamma^5 G(k-p) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\nu G(k) \gamma^\mu G(k+p) \gamma^\sigma \gamma^5 G(k-q) \right] = \\
&= -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}} \not{q} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{\not{k}-\not{p}} + \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}+\not{p}} \not{p} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{\not{k}-\not{q}} \right], \quad (36.13)
\end{aligned}$$

де другий доданок у згортці відрізняється від першого заміною  $p \rightarrow q$ ,  $\mu \rightarrow \nu$ . Корисно навести діаграми, що відповідають виразу (36.12)

$$\quad (36.14)$$

Подивимося тепер чи зберігається струм в кожній з вершин трикутної діаграми  $AVV$ . Враховуючи, що для ферміонного поля  $\bar{\psi} \sim e^{+ipx}$ ,  $\psi \sim e^{-ipx}$  величина одночастинкового струму<sup>1</sup>  $J^\mu = \bar{\psi} O^\mu \psi$  буде  $J^\mu(x) = J^\mu(p', p) e^{-i(p-p')x} = J^\mu(p', p) e^{-iqx}$ , де  $q$  4-імпульс векторного поля з яким відбувається взаємодія струму  $\hat{\mathcal{L}}_{int} \sim J^\mu A_\mu$ . Отже закон збереження одночастинкового струму можна записати як  $\partial^\mu J_\mu \sim q^\mu J_\mu(p, p') = 0$ . Відповідно для трикутної діаграми  $AVV$  закон збереження струму в аксіальній вершині буде визначати величина  $(p+q)_\sigma \nabla^{\sigma\nu\mu}$ , а у векторних вершинах – величини  $q_\nu \nabla^{\sigma\nu\mu}$  та  $p_\mu \nabla^{\sigma\nu\mu}$ .

Розглянемо питання збереження струму в аксіальній вершині:

$$\begin{aligned}
(p+q)_\sigma \nabla^{\sigma\nu\mu} &= -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}+\not{q}} (\not{p} + \not{q}) \gamma^5 \frac{1}{\not{k}-\not{p}} + \right. \\
&\quad \left. + \gamma^\nu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k}+\not{p}} (\not{p} + \not{q}) \gamma^5 \frac{1}{\not{k}-\not{q}} \right]. \quad (36.15)
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> $O^\mu = \gamma^\mu$  для векторного струму та  $O^\mu = \gamma^\mu \gamma^5$  для аксіального струму.

Запишемо окремі складові цього виразу

$$\frac{1}{k_+ \not{q}} (\not{q} + k_- - k_+ \not{p}) \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{p}} = \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{p}} + \frac{1}{k_+ \not{q}} \gamma^5, \quad (36.16)$$

$$\frac{1}{k_+ \not{p}} (\not{p} + k_- - k_+ \not{q}) \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{q}} = \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{q}} + \frac{1}{k_+ \not{p}} \gamma^5, \quad (36.17)$$

де ми врахували, що  $\not{q} \gamma^5 = -\gamma^5 \not{q}$ . Відповідно

$$(p+q)_\sigma \nabla^{\sigma\nu\mu} = -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \gamma^\mu \frac{1}{k} \gamma^\nu \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{p}} + \right. \\ \left. + \gamma^\mu \frac{1}{k} \gamma^\nu \frac{1}{k_+ \not{q}} \gamma^5 + \gamma^\nu \frac{1}{k} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{q}} + \gamma^\nu \frac{1}{k} \gamma^\mu \frac{1}{k_+ \not{p}} \gamma^5 \right] = 0. \quad (36.18)$$

Результат інтегрування є очевидним і прямі розрахунки проводити не є обов'язковим. Справді, кожен з підінтегральних доданків, після проведення інтегрування за 4-імпульсом  $k$ , залежить лише від одного зовнішнього 4-імпульса (позначимо його як  $p$ ), а згортка від добутку  $\gamma$ -матриць у чисельнику виразу є пропорційною повністю антисиметричному 4-тензору четвертого рангу  $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu}$ , див. (14.30). З лівої сторони виразу (36.18) ми маємо псевдотензор 2-го рангу, відповідно з правої сторони псевдотензор 2-го рангу можна було б побудувати у вигляді  $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} p_\alpha p_\beta$ , однак така згортка тотожно дорівнює нулеві:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} p_\alpha p_\beta + \varepsilon^{\beta\alpha\nu\mu} p_\beta p_\alpha) = \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta (\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} + \varepsilon^{\beta\alpha\nu\mu}) = 0,$$

внаслідок антисиметричності тензора  $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu}$ . Потрібно вказати, що за наявності у підінтегральному виразі двох зовнішніх 4-імпульсів, інтеграл буде пропорційним  $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} p_\alpha q_\beta$ , що не дорівнює нулю.

Здавалося б, розгляд задачі завершено і кіральна аномалія відсутня – аксіальний струм у безмасовому випадку зберігається. Але давайте розглянемо тепер питання збереження струму в одній із векторних вершин, наприклад, з 4-імпульсом  $p$ :

$$p_\mu \nabla^{\sigma\nu\mu} = -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \frac{1}{k_- \not{p}} \not{p} \frac{1}{k} \gamma^\nu \frac{1}{k_+ \not{q}} \gamma^\sigma \gamma^5 + \right. \\ \left. + \gamma^\nu \frac{1}{k} \not{p} \frac{1}{k_+ \not{p}} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{k_- \not{q}} \right]. \quad (36.19)$$



Записавши окремі складові даного виразу

$$\frac{1}{k-p} (p-k+k) \frac{1}{k} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-p}, \quad (36.20)$$

$$\frac{1}{k} (-k+k+p) \frac{1}{k+p} = -\frac{1}{k+p} + \frac{1}{k}, \quad (36.21)$$

отримаємо

$$p_\mu \nabla^{\sigma\nu\mu} = -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[ \left( -\frac{1}{k} \gamma^\nu \frac{1}{k+p} \gamma^\sigma \gamma^5 + \frac{1}{k-p} \gamma^\nu \frac{1}{k+p} \gamma^\sigma \gamma^5 \right) + \left( -\gamma^\nu \frac{1}{k+p} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{k-p} + \gamma^\nu \frac{1}{k} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{k-p} \right) \right]. \quad (36.22)$$

У даному інтегралі перший та останній доданок дають нульовий внесок згідно з вище наведеними міркуваннями. Перше, що спадає на думку, це зробити заміну змінних для виразів у перших круглих дужках  $k \rightarrow k - q$ , а у других дужках  $k \rightarrow k + q$ . Враховуючи, що межі інтегрування знаходяться у проміжку від  $-\infty$  до  $+\infty$ , здавалося б, ми повинні отримати

$$p_\mu \nabla^{\sigma\nu\mu} = -e^2 g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \quad (36.23)$$

$$Tr \left[ \left( -\frac{1}{k-q} \gamma^\nu \frac{1}{k} \gamma^\sigma \gamma^5 + \frac{1}{k-p-q} \gamma^\nu \frac{1}{k} \gamma^\sigma \gamma^5 \right) + \left( -\gamma^\nu \frac{1}{k+p+q} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{k} + \gamma^\nu \frac{1}{k+q} \gamma^\sigma \gamma^5 \frac{1}{k} \right) \right] = 0.$$

але це не вірно, бо ми зробили заміну змінних у **розбіжному інтегралі** з межами інтегрування від  $-\infty$  до  $+\infty$  з підінтегральною функцією, що дорівнює ненульовій сталій на нескінченності, див. (36.19). В даному випадку заміна змінних призводить до зсуву значення інтеграла на деяку сталу! Проілюструємо сказане на простому прикладі знаходження різниці значень таких інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \arctan(x+a) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \arctan(x) + \frac{d \arctan(x)}{dx} a + \dots \right] dx - \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \arctan(x)}{dx} a dx = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} a = \pi a, \quad (36.24)
\end{aligned}$$

де ми використали  $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ , а також те, що інші доданки розкладу у ряд Тейлора на нескінченності прямують до нуля і не дають внеску у кінцеву відповідь.

Відповідно, ми повинні знайти зміну значення інтегралів типу (36.19) при різних замінах змінних інтегрування у першому та другому доданках. Визначимо лінійно розбіжний інтеграл як

$$I(a_1, a_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k [A(k + a_1) + B(k + a_2)], \quad (36.25)$$

де  $a_1, a_2$  – сталі 4-вектори. Знайдемо різницю інтегралів  $\Delta I = I(a_1, a_2) - I(0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\Delta I &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ A(k) + \frac{\partial A}{\partial k^\lambda} a_1^\lambda + B(k) + \frac{\partial B}{\partial k^\lambda} a_2^\lambda - A(k) - B(k) \right] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ \frac{\partial A}{\partial k^\lambda} a_1^\lambda + \frac{\partial B}{\partial k^\lambda} a_2^\lambda \right] = \oint d\sigma_\lambda [A(k) a_1^\lambda + B(k) a_2^\lambda]. \quad (36.26)
\end{aligned}$$

Зробимо поворот Віка  $k^0 \rightarrow ik^4$ ,  $k^2 \rightarrow -k_E^2 = -\sum_{i=1}^4 (k^i)^2$  перейдемо до евклідового простору та врахуємо, що  $d\sigma_\lambda = d\sigma k_\lambda/k_E$ ,  $d\sigma = k_E^3 d\Omega_4$ , а  $d\Omega_4$  визначено у (22.30). В результаті отримаємо

$$\Delta I = ik_E^2 \int d\Omega_4 [A(k)(a_1 k) + B(k)(a_2 k)]|_{k_E \rightarrow \infty}, \quad (36.27)$$

де у виразі у квадратних дужках ми залишили попередні позначення для 4-векторів (у просторі Мінковського). При потребі, перейти до евклідового простору не становить проблеми.

Проведемо тепер коректно заміну змінних у виразі для  $\nabla_{\sigma\nu\mu}$  (36.13). В цьому випадку виразам для функцій  $A$  та  $B$  при  $k \rightarrow \infty$  слід зіставити наступні величини

$$A \rightarrow -\frac{e^2 g}{(2\pi)^4 (k^2)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}], \quad (36.28)$$

$$B \rightarrow -\frac{e^2 g}{(2\pi)^4 (k^2)^3} \text{Tr} [\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}]. \quad (36.29)$$

З урахуванням того, що

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}] = /(\mathbf{14.31})/ = 4i\varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} k^2 k^\omega, \quad (36.30)$$

тобто  $\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}] = -\text{Tr} [\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}]$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma\nu\mu}(a_1, a_2) - \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) &= \frac{4e^2 g}{(2\pi)^4} k_E^2 \int \frac{d\Omega_4}{(k^2)^3} \times \\ &\times [\text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}] (a_1 k) + \text{Tr} [\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}] (a_2 k)] = \\ &= \frac{4e^2 g}{(2\pi)^4} k_E^2 \int \frac{d\Omega_4}{(k^2)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\sigma \gamma^5 \not{k}] [(a_1 k) - (a_2 k)] = \\ &= \frac{4e^2 g}{(2\pi)^4} k_E^2 \int d\Omega_4 \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} \frac{k^\omega k^\lambda}{(k^2)^2} [a_{1\lambda} - a_{2\lambda}], \quad (36.31) \end{aligned}$$

де вираз під інтегралом записаний у просторі Мінковського. Зрозуміло, що інтеграл за кутовою частиною дорівнює нулеві<sup>1</sup> при  $\omega \neq \lambda$ , а згідно з (22.26) матимемо  $k^\omega k^\lambda \rightarrow g^{\omega\lambda} k^2 / 4$ . Зазначивши це, перейдемо у підінтегральному виразі до евклідового простору  $k^2 \rightarrow -k_E^2$  та проінтегруємо за  $d\Omega_4$  (22.31), отримаємо:

$$\nabla_{\sigma\nu\mu}(a_1, a_2) - \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = -\frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [a_1^\omega - a_2^\omega]. \quad (36.32)$$

Розглянемо тепер коректно питання збереження векторних струмів:

$$p^\mu \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = p^\mu \left( \nabla_{\sigma\nu\mu}(a_1, a_2) + \frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [a_1^\omega - a_2^\omega] \right) \quad (36.33)$$

$$q^\nu \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = q^\nu \left( \nabla_{\sigma\nu\mu}(b_1, b_2) + \frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [b_1^\omega - b_2^\omega] \right). \quad (36.34)$$

<sup>1</sup>Твердження, очевидно, не змінюється, якщо  $k^0 \rightarrow ik^4$ .

Враховуючи

$$p^\mu \nabla_{\sigma\nu\mu}(-q, +q) = 0, \quad q^\nu \nabla_{\sigma\nu\mu}(+p, -p) = 0, \quad (36.35)$$

та співвідношення (36.18), отримаємо

$$p^\mu \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = -\frac{e^2 g}{4\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} q^\omega p^\mu \quad (36.36)$$

$$q^\nu \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = \frac{e^2 g}{4\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\omega q^\nu, \quad (36.37)$$

$$(p + q)^\sigma \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = 0. \quad (36.38)$$

Ми прийшли до парадоксального висновку, що векторні струми не зберігаються, але зберігається аксіальний струм. Однак багаточисленні експерименти у КЕД однозначно вказують на збереження векторного струму!

Щоб вирішити цю проблему, слід визнати, що зсув меж інтегрування на певну сталу у випадку, коли інтегрування проводиться в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$  є дещо штучною процедурою. Спробуємо зсунути межі інтегрування у кожному з виразів (36.36)–(36.38) на певні однакові 4-вектори з розмірністю імпульса (тобто використовувати в якості базової величину  $\nabla_{\sigma\nu\mu}(A, B)$ ) так, щоб забезпечити збереження векторного струму і подивимося, чи буде зберігатися аксіальний струм у цьому випадку.

Оскільки у вираз (36.32) входить різниця  $A - B$ , будемо шукати скалярні коефіцієнти  $a$  та  $b$  у записі  $A - B = ap + bq$ :

$$\begin{aligned} p^\mu \nabla_{\sigma\nu\mu}(A, B) &= -\frac{e^2 g}{4\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} q^\omega p^\mu - \frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [ap^\omega + bq^\omega] p^\mu = \\ &= -\frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} q^\omega p^\mu (2 + b) = 0, \end{aligned} \quad (36.39)$$

$$\begin{aligned} q^\nu \nabla_{\sigma\nu\mu}(A, B) &= \frac{e^2 g}{4\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\omega q^\nu - \frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [ap^\omega + bq^\omega] q^\nu = \\ &= \frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\omega q^\nu (2 - a) = 0. \end{aligned} \quad (36.40)$$

Отже, закон збереження векторного струму буде реалізовуватися за умови  $A - B = 2(p - q)$ , тоді аксіальний струм не буде зберігатися

навіть у випадку безмасових ферміонів

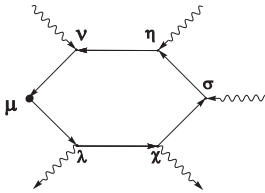
$$(p+q)^\sigma \nabla_{\sigma\nu\mu}(A, B) = -\frac{e^2 g}{8\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [2p^\omega - 2q^\omega] (p+q)^\sigma = \frac{e^2 g}{2\pi^2} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\sigma q^\omega, \quad (36.41)$$

що і являє собою киральну аномалію! Як бачимо незбереження аксіального струму є ціною за забезпечення виконання умови збереження векторного струму!

Звертаємо увагу на те, що поки ми просто явно показали факт незбереження аксіального струму. Знайдемо тепер безпосередній вираз для  $\partial^\mu j_\mu^5$  у безмасовому випадку. Щоб зробити це нагадаємо, що вакуумне середнє від векторного чи аксіального струму тотожно дорівнює нулю внаслідок використання процедури нормального впорядкування операторів:

$$\langle 0 | \hat{\psi} \gamma_\mu \hat{\psi} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \hat{\psi} | 0 \rangle = 0. \quad (36.42)$$

Однак вакуумний струм можна визначити і іншим чином, а саме в окремих точках довільних діаграм Фейнмана з яких виходять фотонні лінії (неважливо реальних чи віртуальних фотонів) та ферміонні лінії, що утворюють ферміонну петлю. При цьому петля з однієї ферміонної лінії, очевидно, призводить до нульового значення вакуумного струму, див. (36.42), а петля, що містить більше ніж дві ферміонні лінії, може давати ненульові вакуумні середні струму<sup>1</sup>. З фізичної точки зору даний факт слід розуміти як появу ненульового вакуумного струму за рахунок впливу зовнішнього поля. Тобто струму у певній точці діаграми  $\mu$  можна формально зіставити діаграми типу

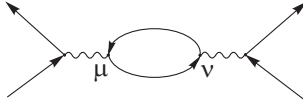


При цьому, оскільки у визначенні струму повинен залишитися один вільний індекс, то у інших вершинах петлі повинні бути вставлені

<sup>1</sup> Для петель, що містять лише векторні струми працює теорема Фаррі, згідно якої внесок від петель з непарною кількістю ферміонних ліній дорівнює нулю, див. розділ 8.

функції векторних полів (реальних, або віртуальних) та проведено підсумовування за відповідними індексами вершин.

Наприклад, вакуумний струм можна визначити в точках  $\mu$  та  $\nu$  діаграми, що дає внесок при розрахунку точного фотонного пропагатора



У наведеній діаграмі внутрішню петлю можна розуміти як ферміонний струм у вакуумі, який у точці  $\mu$  можна визначити як

$$\langle 0|j^\mu|0\rangle = \mu \text{---} \text{---} \text{---} \nu \text{---} A_\nu^{ext} \quad (36.43)$$

де замість фотонного пропагатора у правій частині виразу ми поставили зовнішнє фотонне поле<sup>1</sup>. Вважаючи, наведену діаграму частиною діаграми більш високого порядку, їй можна зіставити вираз, див. (27.15),

$$(-ie)\langle 0|j^\mu(k)|0\rangle = i(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k^2)w_{ren}(k^2) \frac{A_\nu^{ext}(k)}{(2\pi)^4}. \quad (36.44)$$

Зрозуміло, що при такому визначенні вакуумного струму до нього будуть давати внески радіаційні поправки від вищих порядків теорії збурень (наприклад, при врахуванні обмінів віртуальними фотонами між ферміонними лініями). Звертаємо увагу, що визначений вакуумний векторний струм (36.44) зберігається автоматично:  $k_\mu \langle 0|j^\mu|0\rangle = 0$ .

Аналогічним чином можна визначити вакуумне середнє аксіального струму, але з можливих діаграм, які його будуть описувати, ми вже знаємо діаграми, що даватимуть аксіальний струм, що не зберігається. Це діаграми з двома зовнішніми лініями векторного поля (народжуються кванти векторного поля), а саме

<sup>1</sup>Ми справді можемо так робити, оскільки такого типу діаграми (з вакуумним струмом) виникають і при розгляді радіаційних поправок до лінії зовнішнього поля, див. розділ 31.

$$\langle p, q | j_\mu^5 | 0 \rangle = \mu \left( \begin{array}{c} \alpha \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mu \quad \beta \\ \downarrow \\ A_\alpha(p) \quad A_\beta(q) \end{array} + \begin{array}{c} \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mu \quad \alpha \\ \downarrow \\ A_\beta(q) \quad A_\alpha(p) \end{array} \right) \quad (36.45)$$

Відповідно, вакуумний струм в аксіальній вершині можна визначити виходячи з виразу (36.12)

$$S_{fi}^{(3)} = \nabla^{\sigma\nu\mu} \frac{\epsilon_\mu^{*1}(\vec{p}) \epsilon_\nu^{*2}(\vec{q}) \varrho_\sigma(\vec{p} + \vec{q})}{(2V)^{3/2} \sqrt{w_{\vec{p}} w_{\vec{q}} w_{\vec{p}+\vec{q}}}} = (-ig) \frac{\varrho_\sigma(\vec{p} + \vec{q})}{\sqrt{2V w_{\vec{p}+\vec{q}}}} \langle p, q | j_\mu^5 | 0 \rangle, \quad (36.46)$$

звідки випливає

$$(-ig)(p+q)_\sigma \langle p, q | j^{5,\sigma} | 0 \rangle = \frac{e^2 g}{2\pi^2} \frac{\epsilon_\mu^{*1}(\vec{p}) \epsilon_\nu^{*2}(\vec{q})}{2V \sqrt{w_{\vec{p}} w_{\vec{q}}}} \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\sigma q^\omega. \quad (36.47)$$

Покажемо, що вираз (36.47) відповідає наступному співвідношенню в координатному просторі

$$\langle p, q | \partial^\mu j_\mu^5(x) | 0 \rangle = -\frac{e^2}{8\pi^2} \langle p, q | F^{\alpha\beta}(x) \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) | 0 \rangle, \quad (36.48)$$

де  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\rho\tau} F^{\rho\tau}$  – тензор, дуальний до тензора  $F_{\alpha\beta}$ . Справді

$$F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\rho\tau} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\partial^\rho A^\tau - \partial^\tau A^\rho) = 2\epsilon_{\alpha\beta\rho\tau} \partial^\alpha A^\beta \partial^\rho A^\tau. \quad (36.49)$$

Відповідно

$$\begin{aligned} \langle p, q | F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} | 0 \rangle &= 2\epsilon_{\alpha\beta\rho\tau} \left[ (-ip^\alpha) \frac{\epsilon^{*,\beta}(\vec{p})}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} (-iq^\rho) \frac{\epsilon^{*,\tau}(\vec{q})}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} + \right. \\ &\quad \left. + (-iq^\alpha) \frac{\epsilon^{*,\beta}(\vec{q})}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} (-ip^\rho) \frac{\epsilon^{*,\tau}(\vec{p})}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \right] e^{-iqx - ipx} = \\ &= -4\epsilon_{\alpha\beta\rho\tau} p^\alpha q^\rho \frac{\epsilon^{*,\beta}(\vec{p})}{\sqrt{2V w_{\vec{p}}}} \frac{\epsilon^{*,\tau}(\vec{q})}{\sqrt{2V w_{\vec{q}}}} e^{-iqx - ipx}. \end{aligned} \quad (36.50)$$

З іншого боку,

$$\langle p, q | \partial^\mu j_\mu^5(x) | 0 \rangle = -i(p+q)_\sigma \langle p, q | j^{5,\sigma} | 0 \rangle. \quad (36.51)$$

Порівнявши (36.50) та (36.51), переконуємося у справедливості (36.48).

Співвідношення (36.48) отримало назву *аномалії Адлера-Белла-Джесківа*. Доведено (теорема Адлера-Бардіна), що співвідношення (36.48) справедливе при врахуванні всіх порядків теорії збурень – радіаційні поправки до нього дорівнюють нулю.

Згадаємо тепер, що математичною причиною незбереження аксіального струму є зміна значення амплітуди процесу при зсуві на сталі значення змінної інтегрування, див. (36.32), а числове значення зміни значення амплітуди процесу визначається поведінкою підінтегральної функції при нескінченному значенні імпульсу інтегрування. В цьому випадку у пропагаторах фізичних полів можна покласти нулю маси квантів полів. Відповідно, співвідношення (36.32) буде справедливим як для масових, так і для безмасових ферміонів. Це дозволяє модифікувати класичний закон збереження аксіального струму (36.5) до вигляду

$$\partial^\mu j_\mu^5 + \frac{e^2}{8\pi^2} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad (36.52)$$

або перевизначити визначення аксіального струму у співвідношенні (36.32)

$$\tilde{j}_\mu^5 = j_\mu^5 + \frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\nu \partial^\rho A^\sigma. \quad (36.53)$$

Звертаємо увагу, що струм  $\tilde{j}_\mu^5$  не є калібрувально інваріантним і, відповідно, не може вважатися фізичним.

З фізичної точки зору, струм  $j_\mu^5$  є різницею струму право- та лівокіральних ферміонів, див. додаток Д5.2:

$$\begin{aligned} j_\mu^5 &= \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma^5 \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi - \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \\ &= \bar{\psi} \gamma_\mu \psi_R - \bar{\psi} \gamma_\mu \psi_L = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R - \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L. \end{aligned} \quad (36.54)$$

Зазначимо, що у безмасовому випадку проінтегрувавши за нескінченно великим просторовим об'ємом та за часовою змінною в кінцевих межах співвідношення (36.52), отримаємо зміну кількості правих та лівих частинок з часом:

$$\int d\vec{x} j_0^5(t = T) - \int d\vec{x} j_0^5(t = 0) = \Delta N_R - \Delta N_L = -\frac{e^2}{8\pi^2} \int d^4x F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta} \quad (36.55)$$



лише за рахунок наявності кіральної аномалії та зовнішніх полів. При цьому, загальна кількість частинок  $N = N_R + N_L$  не повинна змінюватися у відповідності з законом збереження векторного струму (36.4).

Виявляється, що наявність аномального доданку у законі збереження аксіального струму впливає на перенормованість відповідної теорії поля. Відзначимо, що такого типу трикутні аномалії повинні з'являтися і у Стандартній Моделі. Однак, за рахунок того, що по трикутній петлі пробігають всі ферміони СМ, їх сумарний внесок в аномалію дає нуль, що й рятує СМ як перенормовану теорію. Покажемо це явно.

### Відсутність кіральної аномалії у СМ

Стандартна модель містить аксіальні струми, оскільки у лагранжіан взаємодії входять як ліві так і праві компоненти польових функцій, а матриця  $\gamma^5$  входить у визначення проектувальних операторів на стани з відповідною кіральністю, див. розд. Д5.2. У СМ ліві та праві ферміони взаємодіють по різному з калібрувальними полями  $W^\pm, Z$  бозонів, наприклад, з  $W^\pm$  бозонами взаємодіють лише ліві ферміони, а праві ні. Нагадаємо явний вигляд лагранжіана взаємодії масивних бозонів з ферміонами [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,weak} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_n [\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_n W_\mu^+ + \bar{e}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_n W_\mu^-] - \\ & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{m,n} [\bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn} d_n W_\mu^+ + \bar{d}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{mn}^+ u_n W_\mu^-] - \\ & -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{f}_n \gamma^\mu \left[ t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W \right] f_n Z_\mu, \quad (36.56) \end{aligned}$$

де сума за  $f$  відбувається за всіма ферміонами, що є у СМ; сума за  $m, n$  означає суму за поколіннями;  $t_3^f$  — проекція ізотопічного спіну ферміонів ( $+1/2$  для  $u_{Ln}$  кварків та нейтрино;  $-1/2$  для  $d_{Ln}$  кварків та лептонів  $e_{Ln}$ ) та  $V$  — матриця змішування Кабіббо-Кобаяши-Маскава.

Лагранжіан взаємодії можна переписати у матричному вигляді з використанням ізотопічних дублетів лівих компонент ферміонних функцій та властивостями станів з лівою та правою кіральністю:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L; & L_2 &= \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L; & L_3 &= \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L; \\
Q_1 &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L; & Q_2 &= \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L; & Q_3 &= \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L.
\end{aligned} \quad (36.57)$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,weak} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_n [\bar{L}_n \gamma^\mu T_+ L_n W_\mu^+ + \bar{L}_n \gamma^\mu T_- L_n W_\mu^-] - \\
&\quad - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{m,n} [\bar{Q}_m \gamma^\mu V_{mn} T_+ Q_n W_\mu^+ + \bar{Q}_m \gamma^\mu V_{mn}^+ T_- Q_n W_\mu^-] - \\
&\quad - \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_n [\bar{L}_n \gamma^\mu (T_3 - q_f \sin^2 \theta_W) L_n + \bar{Q}_n \gamma^\mu (T_3 - q_f \sin^2 \theta_W) Q_n] Z_\mu + \\
&\quad + \frac{g \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} \sum_f q_f (\bar{f}_n)_R \gamma^\mu (f_n)_R Z_\mu, \quad (36.58)
\end{aligned}$$

де  $T_3 = \tau_3/2$ ,  $T_\pm = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$ ,  $\tau_i$  – матриці Паулі:

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Останній вираз запишемо у спрощеному вигляді

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,weak} &= - \sum_n [\bar{L}_n \gamma^\mu M_+^L L_n W_\mu^+ + \bar{L}_n \gamma^\mu M_-^L L_n W_\mu^-] - \\
&\quad - \sum_{m,n} [\bar{Q}_m \gamma^\mu V_{mn} M_+^L Q_n W_\mu^+ + \bar{Q}_m \gamma^\mu V_{mn}^+ M_-^L Q_n W_\mu^-] - \\
&\quad - \sum_n \bar{L}_n \gamma^\mu M_Z^L L_n Z_\mu - \sum_n \bar{Q}_n \gamma^\mu M_Z^L Q_n Z_\mu + \sum_f (\bar{f}_n)_R \gamma^\mu M_Z^R (f_n)_R Z_\mu,
\end{aligned} \quad (36.59)$$

де

$$M_\pm^L = \frac{gT_\pm}{\sqrt{2}}, \quad M_Z^L = \frac{g(T_3 - \hat{q}_f \sin^2 \theta_W)}{\cos \theta_W}, \quad M_Z^R = -q_f \frac{g \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W}, \quad (36.60)$$

де  $\hat{q}_f$  – діагональна матриця зі значеннями зарядів частинок відповідного ізотопічного дублету  $\hat{q}_f = \text{diag}(q_{f1}, q_{f2})$ . Як бачимо, величини

$M^L$  є матрицями  $2 \times 2$ , оскільки ліві ферміони утворюють ізотопічні дублети групи  $SU(2)$ ; величини  $M^R$  є скалярами, оскільки праві ферміони є синглетами групи  $SU(2)$ ; сталі взаємодії правих ферміонів з  $W^\pm$ -бозонами дорівнюють нулю:  $M_\pm^R = 0$ .

З явного вигляду (36.56) випливає наявність у доданках взаємодії як векторних, так і аксіальних струмів. Очевидно, що серед діаграм, що описують взаємодію частинок в рамках СМ, будуть діаграми типу (36.6). Якщо по петлі "бігають" ферміони одного типу (див. початок розділу), то дана петля буде містити кіральну аномалію (36.48) з відповідними сталими взаємодії. Однак, в СМ по внутрішній петлі можуть "бігати" всі наявні ферміони. Більш того в межах однієї петлі різним внутрішнім лініям можуть відповідати різні частинки, див. далі. Розглянемо питання, якою буде кіральна аномалія, якщо врахувати внески від усіх можливих частинок? Зазначимо, що для знаходження величини кіральної аномалії ми можемо вважати ферміонні поля безмасовими.

Для початку зазначимо, що по ферміонній петлі будуть "бігати" лише ліві або праві ферміони, а загальний внесок від петлі дорівнюватиме сумі внесків від петель з лівими та правими частинками (випливає з (Д5.4.8)). Розглянемо тепер певну реакцію в деякій абстрактній теорії поля, діаграми якої містять петлі з трьох внутрішніх ферміонних ліній, що містить лише ліві частинки:

$$(36.61)$$

де дві діаграми виникають по тій самій причині, що й (36.14). Якщо лагранжیان взаємодії у цій теорії має вигляд

$$\mathcal{L}_{f,weak} = -\bar{f}_L \gamma^\mu M_A^L f_L A_\mu - \bar{f}_L \gamma^\mu M_B^L f_L B_\mu - \bar{f}_L \gamma^\mu M_C^L f_L C_\mu, \quad (36.62)$$

де  $f$  стовпчик, що складається з  $N$  ферміонів,  $M_i^L$  – матриці розмірності  $N \times N$ , що визначають взаємодію лівих ферміонів з  $i$ -тим калібрувальним полем,  $A, B, C$  – калібрувальні поля. Тоді внесок від діаграм (36.61) буде пропорційним виразу

$$\begin{aligned}
 S_{fi} \sim & \left( \overbrace{\bar{f}_{L,\alpha} \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L f_{L,\beta} \times \bar{f}'_{L,\lambda} \gamma^\mu M_{B,\lambda\delta}^L f'_{L,\delta} \times \bar{f}''_{L,\xi} \gamma^\nu M_{C,\xi\zeta}^L f''_{L,\zeta}} + \bar{f}_{L,\alpha} \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L f_{L,\beta} \times \bar{f}'_{L,\lambda} \gamma^\mu M_{B,\lambda\delta}^L f'_{L,\delta} \times \bar{f}''_{L,\xi} \gamma^\nu M_{C,\xi\zeta}^L f''_{L,\zeta} \right) \times A_\sigma B'_\mu C''_\nu. \quad (32.61)
 \end{aligned}$$

Очевидно, що спарювання між функціями ферміонних полів  $f_\alpha$  та  $\bar{f}_\beta$  буде  $\sim \delta_{\alpha\beta}$  (спарювання між полями, що відповідають різним частинкам дорівнює нулю, див. розділ 11). Позначимо спарювання між функціями лівих ферміонів як  $-iG_L = -i\hat{P}_- G \hat{P}_+$  згідно з (Д5.4.8). Зазначимо також, що у безмасовому наближенні, яке ми використовуємо, пропагатори всіх полів є рівними  $G(p) = -\not{p}/p^2$  (4.14). Отже

$$\begin{aligned}
 S_{fi} \sim & \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L G_{L,\beta\lambda}(k-p) \gamma^\mu M_{B,\lambda\delta}^L G_{L,\delta\xi}(k) \gamma^\nu M_{C,\xi\zeta}^L G_{L,\zeta\alpha}(q+k) + \right. \\
 & \left. + \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L G_{L,\beta\xi}(k-q) \gamma^\nu M_{C,\xi\zeta}^L G_{L,\zeta\lambda}(k) \gamma^\mu M_{B,\lambda\delta}^L G_{L,\delta\alpha}(p+k) \right] = \\
 & = /G_{L,\alpha\beta} = \hat{P}_- G \hat{P}_+ \delta_{\alpha\beta} / = \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L \hat{P}_- G(k-p) \hat{P}_+ \gamma^\mu M_{B,\beta\delta}^L \hat{P}_- G(k) \hat{P}_+ \gamma^\nu M_{C,\delta\alpha}^L \hat{P}_- G(q+k) \hat{P}_+ \right. \\
 & \left. + \gamma^\sigma M_{A,\alpha\beta}^L \hat{P}_- G(k-q) \hat{P}_+ \gamma^\nu M_{C,\beta\zeta}^L \hat{P}_- G(k) \hat{P}_+ \gamma^\mu M_{B,\zeta\alpha}^L \hat{P}_- G(p+k) \hat{P}_+ \right] = \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ Tr[\gamma^\sigma \hat{P}_- G(k-p) \hat{P}_+ \gamma^\mu \hat{P}_- G(k) \hat{P}_+ \gamma^\nu \hat{P}_- G(q+k) \hat{P}_+] Tr[M_A^L M_B^L M_C^L] \right. \\
 & \left. + Tr[\gamma^\sigma \hat{P}_- G(k-q) \hat{P}_+ \gamma^\nu \hat{P}_- G(k) \hat{P}_+ \gamma^\mu \hat{P}_- G(p+k) \hat{P}_+] Tr[M_A^L M_C^L M_B^L] \right], \quad (36.64)
 \end{aligned}$$

де ми врахували, що простір матриць  $M^L$  та простір  $\gamma$ ,  $G$  матриць є різними просторами (розмірності  $N \times N$  та  $4 \times 4$  відповідно) і зазначені матриці комутують між собою. Також було враховано, що внесок від ферміонної петлі виражається через згортку  $\gamma$  та  $G$  матриць, див. розділ 8. Врахуємо тепер, що у безмасовому випадку  $\hat{P}_\pm G = G \hat{P}_\mp$  та те, що під знаком згортки матриці можна циклічно переставляти. Отримаємо

$$S_{fi} \sim \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left[ Tr[\hat{P}_- G(k-p) \gamma^\mu G(k) \gamma^\nu G(q+k) \gamma^\sigma] Tr[M_A^L M_B^L M_C^L] + \right. \\ \left. + Tr[\hat{P}_- G(k-q) \gamma^\nu G(k) \gamma^\mu G(p+k) \gamma^\sigma] Tr[M_A^L M_C^L M_B^L] \right]. \quad (36.65)$$

Очевидно, що в проєкційному операторі  $\hat{P}_- = 1 - \gamma^5$  нас цікавити-  
ме лише другий доданок<sup>1</sup>, матриця  $\gamma^5$  (внесок від першого доданку  
відповідатиме трикутній ферміонній петлі з векторними вершинами,  
що дорівнює нулю згідно з теоремою Фаррі). Як і раніше кіральну  
аномалію визначатиме зміна значення інтеграла при зсуві змінних ін-  
тегрування, а саме вираз (36.32), що в нашому випадку модифікується  
до вигляду

$$\nabla_{\sigma\nu\mu}(a_1, a_2) - \nabla_{\sigma\nu\mu}(0, 0) = -C \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} [A_L a_1^\omega - B_L a_2^\omega], \quad (36.66)$$

де  $C$  – деяка несуттєва для подальшого стала,  $A_L = Tr[M_A^L M_B^L M_C^L]$ ,  
 $B_L = Tr[M_A^L M_C^L M_B^L]$ . Повторивши розрахунки аналогічні до (36.33) –  
(36.41), отримаємо вираз для внеску в кіральну аномалію від петель  
з лівими частинками:

$$p^\mu \nabla_{\sigma\nu\mu} = 0, \quad q^\nu \nabla_{\sigma\nu\mu} = 0, \quad (p+q)^\sigma \nabla_{\sigma\nu\mu} = 4C(A_L + B_L) \varepsilon_{\sigma\nu\mu\omega} p^\sigma q^\omega, \quad (36.67)$$

що є пропорційним величині  $A_L + B_L = Tr[M_A^L [M_B^L, M_C^L]_+]$ .

Внесок від петель, що містять лише праві частинки, буде повністю  
аналогічним виразу (36.67), але з заміною матриць  $M^L \rightarrow M^R$  та  
проєкційного оператора  $\hat{P}_- \rightarrow \hat{P}_+$  (зміниться знак поблизу  $\gamma^5$ ), що  
призведе до появи додаткового знаку мінус у виразі для аномалії.  
Відповідно, сумарний внесок в кіральну аномалію від петель з лівими  
та правими частинками буде пропорційний величині

$$K = Tr[M_A^L [M_B^L, M_C^L]_+] - Tr[M_A^R [M_B^R, M_C^R]_+]. \quad (36.68)$$

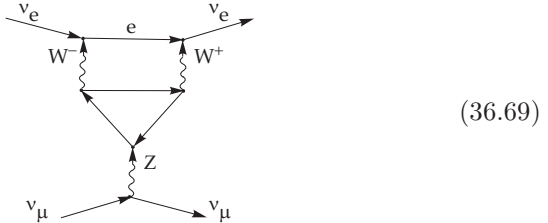
Відповідно кіральна аномалія буде відсутня (за рахунок скорочення  
внесків від петель з лівими та правими частинками) за умови  $K = 0$ .

Повернемося тепер до розгляду скорочення кіральної аномалії в  
СМ. Слід зазначити, що лінії векторних полів, що виходять з трикут-  
них діаграм можуть бути лише у комбінації  $ZZZ$ ,  $Z\gamma\gamma$ ,  $ZZ\gamma$ ,  $\gamma W^+ W^-$

<sup>1</sup> Очевидно, що залишивши оператор  $\hat{P}_-$  поблизу іншого множника у виразі  
(36.65), ми б розглядали збереження аксіального струму в іншій вершині трикутної  
діаграми.

та  $ZW^+W^-$ . Справді, трикутні ферміонні петлі з зовнішніми фотонними лініями ( $\gamma$ ) є забороненими згідно з теоремою Фаррі, а трикутні діаграми з трьома  $W$ -бозонами є забороненими з міркувань закону збереження електричного заряду<sup>1</sup>, бо заряд вхідної бозонної лінії буде відрізнятися від сумарного заряду двох вихідних бозонних ліній.

Для конкретики розглянемо певний процес, наприклад, розсіяння нейтрино на нейтрино, що містить трикутну діаграму типу  $ZW^+W^-$ :



В цьому випадку величина  $K$  для вершини, що містить  $Z$ -бозон, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned}
 K &= Tr[M_Z^L[M_+^L, M_-^L]_+] + Tr[M_Z^R[M_+^R, M_-^R]_+] = /M_{\pm}^R = 0, \quad (36.60) / = \\
 &= Tr[M_Z^L[M_+^L, M_-^L]_+] = \frac{g^3}{2 \cos \theta_W} Tr[(T_3 - \hat{q}_f \sin^2 \theta_W)[T_+, T_-]_+] = \\
 &= /[T_+, T_-]_+ = 1, \quad Tr[T_3] = 0 / = -\frac{g^3 \sin^2 \theta_W}{2 \cos \theta_W} \sum_f q_f, \quad (36.70)
 \end{aligned}$$

де підсумовування за  $f$  означає підсумовування за всіма ферміонами СМ. Розглянемо перше покоління в СМ, що включає в себе електрон та електронне нейтрино, а також по три кварки  $u$  та  $d$ , відповідно, червоного, зеленого та синього кольорів. Матимемо:

$$\sum_f q_f = q_e + q_{\nu_e} + 3(q_u + q_d) = -1 + 0 + 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (36.71)$$

Аналогічну рівність сумарного заряду маємо і для частинок другого та третього покоління СМ. Тобто вершина на діаграмі  $ZW^+W^-$  (36.69), що містить  $Z$ -бозон, не містить кіральної аномалії. Аналогічним чином можна довести, що і інші вершини на діаграмі  $ZW^+W^-$ ,

<sup>1</sup>Трикутну ферміонну діаграму з трьома зовнішніми лініями  $W$ -бозонів неможливо явно побудувати з лагранжіану СМ.

а також вершини на діаграмах  $ZZZ$ ,  $Z\gamma\gamma$ ,  $ZZ\gamma$ ,  $\gamma W^+W^-$  не містять кіральної аномалії. Отже СМ не має кіральної аномалії, наявність якої б призвела до порушення перенормованості теорії.

Зазначимо, що кірально аномалія відсутня в СМ завдяки тому, що окрім лептонів в СМ є кварки, кожен з яких має три кольори. Можна сказати, що відсутність кіральної аномалії у фізичній перенормованій теорії СМ накладає також обмеження, типу (36.71), на співвідношення між зарядами частинок. Так склалося, що в СМ такі обмеження явно виконуються в межах кожного окремого покоління частинок. При цьому умова відсутності кіральної аномалії не накладає обмежень на кількість поколінь СМ. Відповідно, якщо подальші експерименти покажуть існування додаткового лептона або кварка, це однозначно вказуватиме на необхідність існування і інших частинок нового покоління СМ.

### Завдання

1. Отримайте співвідношення (36.9). Доведіть, що коефіцієнт діаграми  $AVV$  дорівнює 1.
2. Формальним чином, вираз (36.22) можна занулити також за допомогою заміни змінних для виразів у перших круглих дужках  $k \rightarrow k + p$ , а у других дужках  $k \rightarrow k - p$ . Прокоментуйте можливість розв'язку задачі знаходження кіральної аномалії таким способом.
3. Доведіть співвідношення (36.30).
4. Доведіть друге твердження у (36.35).
5. Як зміниться співвідношення (36.48), якщо вважати лінії векторного поля зовнішнім полем?
6. Доведіть справедливість (36.53).
7. Доведіть справедливість (36.58).
8. Доведіть справедливість (36.67).
9. Доведіть відсутність кіральної аномалії у всіх вершинах діаграм  $ZZZ$ ,  $Z\gamma\gamma$ ,  $ZZ\gamma$ ,  $\gamma W^+W^-$  та  $ZW^+W^-$ .

# Додатки

## Додаток 1. Різні типи представлень у квантовій механіці

### Представлення Шредінгера

У цьому представленні оператори фізичних величин  $\hat{Q}$  не залежать від часу. Зміна стану системи з часом описується зміною хвильової функції  $\psi$ , тобто

$$\hat{Q} \neq \hat{Q}(t); \quad \psi = \psi(\vec{x}, t) = \psi_{\text{Sh}}(t). \quad (\text{Д1.1})$$

Часова залежність хвильової функції визначається рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\text{Sh}}(t)}{\partial t} = \hat{H} \psi_{\text{Sh}}(t). \quad (\text{Д1.2})$$

Часову залежність хвильової функції можна записати за допомогою оператора часового зсуву  $\hat{R}(t, t_0)$ :

$$\psi_{\text{Sh}}(t) = \hat{R}(t, t_0) \psi_{\text{Sh}}(t_0). \quad (\text{Д1.3})$$

З умови нормування

$$\begin{aligned} \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) d\vec{x} &= \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t_0) \hat{R}^+(t, t_0) \hat{R}(t, t_0) \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = \\ &= \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t_0) \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t_0) d\vec{x} = 1 \end{aligned} \quad (\text{Д1.4})$$

впливає, що  $\hat{R}(t, t_0)$  є унітарним оператором:

$$\hat{R}^+(t, t_0) \hat{R}(t, t_0) = \hat{1}, \quad (\text{Д1.5})$$

а перетворення (Д1.3) є унітарним перетворенням.

Підставимо (Д1.3) у (Д1.2) та отримаємо рівняння, що визначає  $\hat{R}(t, t_0)$  з початковою умовою  $\hat{R}(t_0, t_0) = 1$ :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{R}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H} \hat{R}(t, t_0), \quad (\text{Д1.6})$$



Методом ітерацій, вважаючи, що  $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ , можна знайти розв'язок

$$\hat{R}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}. \quad (\text{Д1.7})$$

Якщо  $\hat{H}$  залежить від часу (що ми маємо у випадку гамільтоніанів в теорії поля), розв'язок диференційного рівняння має вигляд<sup>1</sup>

$$\hat{R}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')}. \quad (\text{Д1.8})$$

Незважаючи на те, що в представленні Шредінгера оператори фізичних величин не залежать від часу, можна формально знайти похідну за часом від оператора, якщо припустити, що середнє від зміни з часом деякого оператора дорівнює зміні з часом середнього значення самого оператора, тобто

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{Q}_{\text{Sh}}} = \frac{d}{dt} \overline{\hat{Q}_{\text{Sh}}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \frac{d}{dt} \hat{Q}_{\text{Sh}} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) d\vec{x} &= \frac{d}{dt} \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \hat{Q}_{\text{Sh}} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) = \\ &= \int \left( \frac{\partial \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{Q}_{\text{Sh}} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) + \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \hat{Q}_{\text{Sh}} \frac{\partial \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \frac{\partial \hat{Q}_{\text{Sh}}}{\partial t} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) \right) d\vec{x} = \\ &= \left/ (\text{Д1.1}), \frac{\partial \hat{Q}_{\text{Sh}}}{\partial t} = 0 \right/ = \left/ (\text{Д1.2}) \text{ермітово спряжене} \right/ = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \left( \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \hat{H}^+ \hat{Q}_{\text{Sh}} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) - \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \hat{Q}_{\text{Sh}} \hat{H} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) d\vec{x} \right) = \\ &= \left/ \hat{H}^+ = \hat{H} \right/ = \frac{1}{i\hbar} \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) [\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}]_- \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (\text{Д1.9}) \end{aligned}$$

або

$$i\hbar \frac{d}{dt} \overline{\hat{Q}_{\text{Sh}}} = [\hat{Q}_{\text{Sh}}, \hat{H}]_-. \quad (\text{Д1.10})$$

---

<sup>1</sup>Розв'язок рівняння (Д1.6) збігається з наведеним детальним розв'язком рівняння (1.9) у формі (1.19), див. розд.1.

Тобто середні значення оператора, що явно не залежить від часу та комутує з гамільтоніаном, не будуть змінюватися з часом, тобто будуть інтегралами руху.

### Представлення Гайзенберга

Спробуємо описати стан фізичної системи таким чином, щоб не хвильові функції змінювалися з часом, а оператори фізичних величин. Визначимо хвильові функції в представленні Гайзенберга так, щоб вони дорівнювали хвильовим функціям в представленні Шредінгера в певний момент часу, наприклад,  $t = t_0$ :

$$\psi_{\text{H}} = \psi_{\text{Sh}}(t_0), \quad (\text{Д1.11})$$

тоді згідно з (Д1.3) перехід від хвильової функції в представленні Шредінгера до хвильової функції в представленні Гайзенберга можна визначити унітарним перетворенням

$$\psi_{\text{H}} = \hat{R}^{-1}(t, t_0) \psi_{\text{Sh}}(t). \quad (\text{Д1.12})$$

Враховуючи, що середнє значення оператора фізичної величини не має залежати від вибору представлення

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \int \psi_{\text{Sh}}^+(\vec{x}, t) \hat{Q}_{\text{Sh}} \psi_{\text{Sh}}(\vec{x}, t) = \\ &= \int \psi_{\text{H}}^+(\vec{x}, t_0) \hat{R}(t, t_0)^+ \hat{Q}_{\text{Sh}} \hat{R}(t, t_0) \psi_{\text{H}}(\vec{x}, t_0) = \\ &= \int \psi_{\text{H}}^+(\vec{x}) \hat{R}(t, t_0)^{-1} \hat{Q}_{\text{Sh}} \hat{R}(t, t_0) \psi_{\text{H}}(\vec{x}), \quad (\text{Д1.13}) \end{aligned}$$

визначимо оператор у представленні Гайзенберга як

$$\hat{Q}_{\text{H}}(t) = \hat{R}(t, t_0)^{-1} \hat{Q}_{\text{Sh}} \hat{R}(t, t_0). \quad (\text{Д1.14})$$

Тобто, якщо оператор  $Q_{\text{Sh}}$  комутує з гамільтоніаном (значення відповідної фізичної величини є інтегралом руху), то він також буде комутувати з  $R(t, t_0)$ . У цьому випадку  $Q_{\text{Sh}} = Q_{\text{H}}$ . Зокрема, не буде змінюватися при переході від представлення Шредінгера до представлення Гайзенберга оператор гамільтоніана.

Продиференціюємо за часом (Д1.14):

$$\frac{d\hat{Q}_{\text{H}}}{dt} = \frac{\partial \hat{R}^{-1}(t, t_0)}{\partial t} Q_{\text{Sh}} \hat{R}(t, t_0) + R^{-1}(t, t_0) Q_{\text{Sh}} \frac{\partial \hat{R}(t, t_0)}{\partial t}. \quad (\text{Д1.15})$$

Значення  $\partial\hat{R}/\partial t$  отримаємо з (Д1.6);  $\partial\hat{R}^{-1}/\partial t$  можна отримати з виразу, спряженого до (Д1.6), оскільки  $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^+$ . Тоді

$$\frac{d\hat{Q}_H}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\hat{R}^{-1}(t, t_0)\hat{H}\hat{Q}_{Sh}\hat{R}(t, t_0) + \hat{R}^{-1}(t, t_0)\hat{Q}_{Sh}\frac{1}{i\hbar}\hat{H}\hat{R}(t, t_0). \quad (\text{Д1.16})$$

Використаємо умову комутації  $[\hat{H}, \hat{R}]_- = 0$ , що впливає безпосередньо з визначення оператора  $\hat{R}$ , та остаточно отримаємо рівняння, що визначає часову залежність оператора в представленні Гайзенберга:

$$i\hbar\frac{d\hat{Q}_H}{dt} = [\hat{Q}_H, \hat{H}]_-. \quad (\text{Д1.17})$$

### Представлення взаємодії

Представлення взаємодії зручно використовувати у випадку, коли фізична система складається з декількох частин, а гамільтоніан системи можна записати у вигляді двох доданків

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V, \quad (\text{Д1.18})$$

де  $\hat{H}_0$  – гамільтоніан системи без урахування взаємодії між собою окремих частин системи, а  $V$  – доданок, що описує взаємодію.

Введемо нову хвильову функцію  $\psi_I(t)$ :

$$\psi_I(t) = \hat{R}_0^{-1}(t, t_0)\psi_{Sh}(t), \quad (\text{Д1.19})$$

де оператор часового зсуву  $\hat{R}_0(t, t_0)$  збігається з оператором часового зсуву  $\hat{R}(t, t_0)$  (Д1.6) для гамільтоніана без взаємодії, тобто:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{R}_0(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}_0\hat{R}_0(t, t_0) \quad (\text{Д1.20})$$

з початковою умовою  $R_0(t_0, t_0) = 1$ .

Враховуючи, що середнє значення оператора фізичної величини не має залежати від вибору представлення, аналогічно (Д1.13) визначимо оператор в представленні взаємодії як

$$\hat{Q}_I(t) = \hat{R}_0(t, t_0)^{-1}\hat{Q}_{Sh}\hat{R}_0(t, t_0). \quad (\text{Д1.21})$$

Продиференціюємо за часом (Д1.21):

$$\frac{d\hat{Q}_I}{dt} = \frac{\partial \hat{R}_0^{-1}(t, t_0)}{\partial t} Q_{\text{Sh}} \hat{R}_0(t, t_0) + R_0^{-1}(t, t_0) Q_{\text{Sh}} \frac{\partial \hat{R}_0(t, t_0)}{\partial t}, \quad (\text{Д1.22})$$

та аналогічно (Д1.15), отримаємо

$$\frac{d\hat{Q}_I}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} \hat{R}_0^{-1}(t, t_0) \hat{H}_0 \hat{Q}_{\text{Sh}} \hat{R}_0(t, t_0) + \hat{R}_0^{-1}(t, t_0) \hat{Q}_{\text{Sh}} \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \hat{R}_0(t, t_0) \quad (\text{Д1.23})$$

та остаточно:

$$i\hbar \frac{d\hat{Q}_I}{dt} = [\hat{Q}_I, \hat{H}_0]_-. \quad (\text{Д1.24})$$

Тобто оператори в представленні взаємодії залежать від часу так само, як і гайзенберівські оператори в системі за відсутності взаємодії.

Візьмемо похідну за часом від (Д1.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_I(t)}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{R}_0^{-1}(t, t_0)}{\partial t} \psi_{\text{Sh}}(t) + R_0^{-1}(t, t_0) \frac{\partial \psi_{\text{Sh}}(t)}{\partial t} = \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \hat{R}_0^{-1}(t, t_0) \hat{H}_0 \psi_{\text{Sh}}(t) + \hat{R}_0^{-1}(t, t_0) \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \psi_{\text{Sh}}(t) = \\ &= \frac{1}{i\hbar} R_0^{-1}(t, t_0) [\hat{H} - \hat{H}_0] \psi_{\text{Sh}}(t) = \frac{1}{i\hbar} \hat{R}_0^{-1}(t, t_0) V_{\text{Sh}} \hat{R}_0(t, t_0) \psi_I(t). \end{aligned} \quad (\text{Д1.25})$$

Використавши означення оператора в представленні взаємодії (Д1.21), отримаємо

$$i\hbar \frac{\partial \psi_I(t)}{\partial t} = V_I \psi_I(t). \quad (\text{Д1.26})$$

Отже, зміна з часом хвильової функції в представленні взаємодії визначається лише взаємодією в системі.

Тобто, на відміну від представлення Шредінгера (хвильова функція залежить від часу, а оператор – ні) та Гайзенберга (оператор залежить від часу, а хвильова функція – ні), у представлення взаємодії і хвильова функція і оператор залежать від часу. У цьому розумінні представлення взаємодії є проміжним між представленнями Гайзенберга та Шредінгера.

Нагадаємо, що згідно з означеннями в початковий момент часу  $t = t_0$  оператори та хвильові функції співпадають в усіх представленнях.

## Додаток 2. Перетворення Лоренца для різних типів полів

Нагадаємо закони перетворення різних типів полів при переході від однієї системи відліку (поле  $U$  в точці  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ) в іншу (поле  $U'$  в точці  $x' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ ) завдяки поворотам у 4-вимірному просторі та трансляціям.

Скалярне поле не змінюється:

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (\text{Д2.1})$$

Векторне поле перетворюється таким чином:

$$\begin{cases} A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x), \\ A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}(x). \end{cases} \quad (\text{Д2.2})$$

Спінорне поле:

- а) при перетвореннях трансляції не змінюється:  $\Psi'(x') = \Psi(x)$ ;  
 б) при просторових поворотах у площині  $ik$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), коли повертаємо систему відліку від орта  $\vec{e}^i$  до орта  $\vec{e}^k$  на кут  $|\vec{\varphi}|$  (напрямок вектора  $\vec{\varphi}$  співпадає з напрямком вектора  $\vec{e}^i \times \vec{e}^k$ ):

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x), & \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) \\ \Lambda(\varphi) = e^{i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, & \Lambda^{-1}(\varphi) = e^{-i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{Д2.3})$$

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x) = \left[ \cos \frac{|\vec{\varphi}|}{2} + i \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) = \bar{\Psi}(x)e^{-i\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}} = \bar{\Psi}(x) \left[ \cos \frac{|\vec{\varphi}|}{2} - i \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{Д2.4})$$

- в) при поворотах у площині  $0, i$  на кут  $|\vec{\varphi}|$  (лоренцеві бусты), коли відбувається перехід у систему відліку, що рухається відносно початкової системи відліку зі швидкістю  $V = \text{th}\varphi$  уздовж осі  $i$  (напрямок  $\vec{\varphi}$  співпадає з напрямком просторового орту  $e^i$ ):

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda_0(\vec{\varphi})\Psi(x), & \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda_0^{-1}(\vec{\varphi}) \\ \Lambda_0(\varphi) = e^{-\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, & \Lambda_0^{-1}(\varphi) = e^{\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{2}}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \quad (\text{Д2.5})$$

$$\begin{cases} \Psi'(x') = \Lambda(\vec{\varphi})\Psi(x) = \left[ \cosh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} - \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right] \Psi(x) \\ \bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x)\Lambda^{-1}(\vec{\varphi}) = \bar{\Psi}(x) \left[ \cosh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} + \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right]. \end{cases} \quad (\text{Д2.6})$$

Явний вигляд матриць  $\vec{\Sigma}$  та  $\vec{\alpha}$  наведено в переліку позначень на с. 16-17. Перетворення координат  $x \rightarrow x'$  при різних перетвореннях Лоренца наведено в [10].

## Додаток 3. Скалярні поля

У цьому та наступних розділах наведено основні рівняння та вирази для класичних і вторинно квантованих полів, що розташовані в обмеженому просторі об'єму  $V$  та мають дискретний спектр<sup>1</sup>.

### ДЗ.1. Нейтральне скалярне поле

Лагранжіан класичного нейтрального скалярного поля<sup>2</sup>:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (\text{ДЗ.1.1})$$

Польове рівняння:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (\text{ДЗ.1.2})$$

Оператор вторинно квантованого поля<sup>3</sup>:

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V \varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \right), \quad \varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (\text{ДЗ.1.3})$$

де  $e^{\pm ikx}$  – функції, що відповідають одночастинковому стану з 4-імпульсом  $k$ ;  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) – оператор знищення (народження) скалярних частинок з 4-імпульсом  $k$  та з комутаційними співвідношеннями у вигляді

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_- = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_- = 0, \quad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}]_- = 0. \quad (\text{ДЗ.1.4})$$

---

<sup>1</sup> Дискретним спектром є  $\vec{k}_{\vec{n}} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$ ,  $k_{\vec{n}}^0 = \vec{k}_{\vec{n}}^2 + m^2$ , де  $n_i$  – цілі числа,  $L = V^{1/3}$ . Для випадку необмеженого простору ( $V \rightarrow \infty$ ) наведені нижче вирази залишаються в силі, якщо замінити  $\sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}$  та замінити символи Кронекера в переставних співвідношеннях на дельта-функції.

<sup>2</sup> Під лагранжіаном тут і далі розуміється просторова густина лагранжіана  $L(x^0) = \int d\vec{x} \mathcal{L}(x)$ .

<sup>3</sup> У (ДЗ.1.3) підсумовування ведеться лише за  $\vec{k}$ , оскільки вектор  $\vec{k}$  повністю визначає  $k_0$  ( $k_0 = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ).

Причинна функція Гріна нейтрального скалярного поля (0.32):

$$\begin{aligned}
 D(x-x') &= i\langle 0|\hat{T}\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')|0\rangle = \\
 &= \lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \\
 &\Rightarrow D(k) = \lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (\text{Д3.1.5})
 \end{aligned}$$

### Д3.2. Заряджене скалярне поле

Лагранжіан класичного зарядженого скалярного поля:

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*. \quad (\text{Д3.2.1})$$

Польове рівняння:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0, \quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi^*(x) = 0. \quad (\text{Д3.2.2})$$

Оператори вторинно квантованих полів:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \hat{\phi}(x) &= \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{ikx} \right) \\
 \hat{\phi}^*(x) &= \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k}} e^{-ikx} \right)
 \end{aligned} \right. , \quad \varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (\text{Д3.2.3})$$

де  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^+$ ) – оператор знищення (народження) скалярних частинок з зарядом  $q = +1$  та чотири-імпульсом  $k$ ;  $\hat{b}$  ( $\hat{b}^+$ ) – оператор знищення (народження) скалярних античастинок із зарядом  $q = -1$  та 4-імпульсом  $k$ .

Комутаційні співвідношення:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^{\dagger}]_{-} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}'}^{\dagger}]_{-} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (\text{Д3.2.4})$$

інші варіанти комутаторів двох операторів із числа  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^+$  дорівнюють нулю.



Причинна функція Гріна зарядженого скалярного поля

$$D(x - x') = i\langle 0 | \hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^*(x') | 0 \rangle \quad (\text{ДЗ.2.5})$$

дорівнює відповідній функції нейтрального скалярного поля (0.32), (ДЗ.1.5). При цьому причинна функція Гріна побудована з двох однакових полів (у сенсі спряжених або не спряжених) дорівнює нулю:

$$i\langle 0 | \hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0 \rangle = i\langle 0 | \hat{T} \hat{\phi}^*(x) \hat{\phi}^*(x') | 0 \rangle = 0. \quad (\text{ДЗ.2.6})$$

## Додаток 4. Векторні поля

### Д4.1. Нейтральне масивне векторне поле

Лагранжіан класичного нейтрального векторного поля<sup>1</sup>:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2U_\mu U^\mu, \text{ де } F_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu. \quad (\text{Д4.1.1})$$

Польове рівняння на компоненти поля має вигляд:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} + m^2U_\mu(x) = \partial_\nu \partial^\nu U_\mu(x) - \partial^\nu \partial_\mu U_\nu(x) + m^2U_\mu(x) = 0. \quad (\text{Д4.1.2})$$

Це рівняння отримало назву рівняння Прока.

Подіявши на рівняння (Д4.1.2) оператором  $\sum_\mu \partial^\mu$ , отримаємо умову  $\partial^\nu U_\nu(x) = 0$  (в імпульсному просторі  $k^\nu U_\nu(\vec{k}) = 0$ ), що автоматично фіксує калібрування векторного поля.

Враховуючи калібрування, отримаємо польове рівняння на векторне поле

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2)U_\mu(x) = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{Д4.1.3})$$

Нагадаємо основні моменти теорії векторного поля для кращого розуміння фізичного змісту, наведеного нижче виразу оператора вторинно квантованого поля. У класичній теорії в лабораторній системі відліку частотний розклад поля має вигляд

$$U_\mu(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( U_\mu(\vec{k}) e^{-i kx} + U_\mu^*(\vec{k}) e^{i kx} \right), \quad \varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (\text{Д4.1.4})$$

в якому компоненти 4-вектора  $U(\vec{k})$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} U(\vec{k}) &= \left( U_0, \vec{U} \right) = (1, \vec{0})U_0(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^1)U_1(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^2)U_2(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^3)U_3(\vec{k}) = \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \varepsilon(\mu)U_\mu(\vec{k}) = \left( U_0, \sum_{i=1}^3 \vec{\varepsilon}^i U_i(\vec{k}) \right), \quad (\text{Д4.1.5}) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>У літературі можна зустріти також  $\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial^\mu U_\nu \partial_\mu U^\nu + \frac{1}{2}m^2U_\mu U^\mu$ , що відрізняється від лагранжіана (Д4.1.1) на 4-дивергенцію від деякої функції. Тобто зазначені лагранжіани є еквівалентними. За наявності взаємодії з іншими полями використання зазначених лагранжіанів призводить до різних наслідків. Якщо векторне поле є полем в лагранжіані стандартної моделі, перевагу слід віддати означенню (Д4.1.1).

де  $\varepsilon(\mu)$  утворюють 4 напрямні вектори (орти) у лабораторній системі відліку:  $\varepsilon(0) = (1; \vec{0})$ ,  $\varepsilon(i) = (0; \vec{\varepsilon}^i)$ ,  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k = \delta^{i,k}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ), або в лоренц-інваріантному записі:  $\varepsilon(0)_\nu \varepsilon(0)^\nu = 1$ ,  $\varepsilon(i)_\nu \varepsilon(i)^\nu = -1$ , тобто в загальному вигляді  $\sum_{\nu=0}^3 \varepsilon(\mu)_\nu \varepsilon(\mu)^\nu = \delta_{\mu,0} - \delta_{\mu,i}$ , де  $\delta_{\alpha,\beta}$  – символ Кронекера.

Однак такий запис призводить до того, що вираз для густини енергії системи не є додатно визначеним (див., наприклад, [3]). Щоб позбутися цього недоліку потрібно використати додаткову умову до (Д4.1.3) і зробити перехід у локальну систему відліку, що прив'язана до вектора розповсюдження плоскої хвилі  $\vec{k}$ , а саме, щоб вісь  $z$  була напрямлена вздовж напрямку вектора  $\vec{k}$ . Зробимо це за допомогою просторового повороту<sup>1</sup> та представимо третю компоненту у вигляді  $(k_0/m) a_{3,\vec{k}}$ :

$$\begin{aligned} U'(\vec{k}) &= (1, \vec{0}) a_{0,\vec{k}} + (0, \vec{\varepsilon}^1) a_{1,\vec{k}} + (0, \vec{\varepsilon}^2) a_{2,\vec{k}} + \left( 0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{k_0}{m} \right) a_{3,\vec{k}} = \\ &= \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon(\vec{k}, \lambda) a_{\lambda,\vec{k}}, \quad (\text{Д4.1.6}) \end{aligned}$$

де  $U'(\vec{k})$  – 4-вектор  $U(\vec{k})$  у локальній системі відліку,  $a_{\mu,\vec{k}}$  – його компоненти,  $\vec{\varepsilon}^i$  – одиничні вектора перпендикулярні до вектора  $\vec{k}$ , тобто  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{k} = 0$ ,  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k = \delta^{i,k}$ , ( $i, k = 1, 2$ ).

У локальній системі відліку (Д4.1.6) додаткова умова до рівняння (Д4.1.3)  $k^\nu U_\nu(\vec{k}) = 0$  дає

$$k^\nu a_\nu(\vec{k}) = k^0 a_0 - \vec{k} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot \frac{k^0}{m} a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{|\vec{k}|}{m} a_3. \quad (\text{Д4.1.7})$$

Тоді поле  $U'(\vec{k})$  можна розкласти лише по трьох (!) 4-векторах

$$\begin{aligned} U'(\vec{k}) &= (0, \vec{\varepsilon}^1) a_{1,\vec{k}} + (0, \vec{\varepsilon}^2) a_{2,\vec{k}} + \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{k_0}{m} \right) a_{3,\vec{k}} = \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\lambda(\vec{k}) a_{\lambda,\vec{k}} = \left( \frac{|\vec{k}|}{m} a_{3,\vec{k}}, \sum_{\lambda=1}^3 \vec{\varepsilon}^\lambda(\vec{k}) a_{\lambda,\vec{k}} \right), \quad (\text{Д4.1.8}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>У загальному випадку можна перейти в систему відліку, що буде рухатися відносно лабораторної.

де  $\epsilon^\lambda(\vec{k}) = (\epsilon_0^\lambda(\vec{k}), \vec{\epsilon}^\lambda(\vec{k}))$ ,  $(\lambda = 1, 2, 3)$  є чотиривимірними ортогональними векторами поляризації:

$$\epsilon^1(\vec{k}) = (0; \vec{\epsilon}^1), \quad \epsilon^2(\vec{k}) = (0; \vec{\epsilon}^2), \quad \epsilon^3(\vec{k}) = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}; \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{k_0}{m} \right). \quad (\text{Д4.1.9})$$

Для них виконується  $\epsilon_{\vec{\mu}}^\lambda(\vec{k})\epsilon^{\lambda'}(\vec{k}) = -\delta_{\lambda,\lambda'}$ , де сума ведеться за компонентами 4-векторів у локальній системі відліку.

Однак ми як спостерігачі перебуваємо у лабораторній системі відліку і потребуємо вираз для поля в нашій системі відліку. Тому запишемо всі компоненти вектора  $U(\vec{k})$  через компоненти вектора  $U'(\vec{k})$  (Д4.1.8):

$$U_\mu(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \quad (\text{Д4.1.10})$$

де коефіцієнти переходу  $\epsilon_\mu^\lambda(\vec{k})$  визначаються векторами поляризації  $\epsilon^\lambda(\vec{k})$  та знаходяться однозначно за допомогою формул перетворень 4-векторів від однієї до іншої системи відліку в загальній теорії відносності (Д2.2).

Підставивши явно вираз для  $U(\vec{k})$  (Д4.1.13) і спряжений до нього вираз для  $U^*(\vec{k})$  у визначення (Д4.1.4), отримуємо частотний розклад класичного поля  $U(x)$ , що вже має додатно визначену енергію. Остаточно маємо

$$U_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) a_{\lambda, \vec{k}} e^{-i kx} + \epsilon_{\mu}^{*\lambda}(\vec{k}) a_{\lambda, \vec{k}}^+ e^{i kx} \right), \quad (\text{Д4.1.11})$$

де  $U_\mu(x)$  –  $\mu$ -та компонента векторного поля в лабораторній системі відліку,  $a_{\lambda, \vec{k}}$  – компоненти векторного поля в локальній системі відліку,  $\epsilon_\mu^\lambda(\vec{k})$  – коефіцієнти переходу від однієї системи відліку до іншої.

У вторинно квантованій теорії оператор поля має вигляд:

$$\hat{U}_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda, \vec{k}} e^{-i kx} + \epsilon_{\mu}^{*\lambda}(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+ e^{i kx} \right), \quad (\text{Д4.1.12})$$

де  $\varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , оператор  $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}} (\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+)$  є оператором знищення (народження) частинок з 4-вектором  $k$ . Число  $\lambda$  визначає поляризацію поля.

Серед усіх можливих випадків поляризації зазвичай виділяють два випадки поляризаційних станів для квантів поля: стан з лінійною та коловою поляризаціями.

У випадку лінійної поляризації

$$\vec{\epsilon}^1 = \vec{e}^1, \quad \vec{\epsilon}^2 = \vec{e}^2, \quad (\text{Д4.1.13})$$

де  $\vec{e}^1, \vec{e}^2$  є векторами, що направлені вздовж орт, перпендикулярних до третьої осі (співпадає за напрямком з хвильовим вектором  $\vec{k}$ ):  $\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ij}$ ,  $\vec{e}^1 \cdot \vec{k} = 0$ ,  $\vec{e}^2 \cdot \vec{k} = 0$ , тобто  $\epsilon^\lambda(\vec{k}) = \epsilon^{*\lambda}(\vec{k})$ . У цьому випадку частинки не перебувають у стані з визначеною проекцією спіну на напрямок руху, оскільки відповідний оператор  $\hat{S}_3$  не є діагональним.

У випадку колової поляризації

$$\vec{\epsilon}^1 = \frac{\vec{e}^1 - i\vec{e}^2}{\sqrt{2}}, \quad \vec{\epsilon}^2 = \frac{\vec{e}^1 + i\vec{e}^2}{\sqrt{2}} \quad (\text{Д4.1.14})$$

з тими самими ортогональними векторами  $\vec{e}^1, \vec{e}^2$ . У цьому випадку  $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}} (\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+)$  є оператором знищення (народження) частинок з імпульсом  $k$  та проекцією спіну на напрямок руху  $S_3 = +1, -1, 0$  відповідно до  $\lambda = 1, 2, 3$ .

Комутаційні співвідношення для обох типів поляризацій:

$$[\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = 0, \quad [\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}]_- = 0. \quad (\text{Д4.1.15})$$

Причинна функція Гріна нейтрального векторного поля (0.32):

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x - x') &= -i \langle 0 | \hat{T} \hat{U}_\mu(x) \hat{U}_\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{m^2 - k^2 - i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \\ &\Rightarrow D_{\mu\nu}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}}{m^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (\text{Д4.1.16}) \end{aligned}$$

Зазначимо, що набір поляризаційних векторів  $\epsilon^\lambda(\vec{k})$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) безумовно не є повним

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\lambda_\mu(\vec{k}) \epsilon^{*\lambda}_\nu(\vec{k}) = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right), \quad (\text{Д4.1.17})$$

тому іноді вводять додатково четвертий 4-вектор

$$\epsilon^0(\vec{k}) = \frac{k}{m} = \frac{(k^0, \vec{k})}{m}, \quad (\text{Д4.1.18})$$

завдяки якому співвідношення повноти набуває стандартного вигляду

$$\sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon^\lambda_\mu(\vec{k}) \epsilon^{*\lambda}_\nu(\vec{k}) = g_{\mu\nu}. \quad (\text{Д4.1.19})$$

## Д4.2. Заряджене масивне векторне поле

Лагранжіан класичного зарядженого векторного поля<sup>1</sup>:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + m^2 V_\mu^* V^\mu, \quad (\text{Д4.2.1})$$

де  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu V_\nu^* - \partial_\nu V_\mu^*$ .

Полюове рівняння на компоненти поля<sup>2</sup>:

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) V_\mu(x) = 0, \quad (\partial_\nu \partial^\nu + m^2) V_\mu^*(x) = 0. \quad (\text{Д4.2.2})$$

При цьому завдяки вибору лагранжіана в формі (Д4.2.1) автоматично виконуються умови  $\partial^\nu V_\nu(x) = 0$ ,  $\partial^\nu V_\nu^*(x) = 0$ .

Оператори вторинно квантованих полів:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \epsilon^\lambda_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda, \vec{k}} e^{-i kx} + \epsilon^{*\lambda}_\mu(\vec{k}) \hat{b}_{\lambda, \vec{k}}^+ e^{i kx} \right) \\ \hat{V}_\mu^*(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \epsilon^{*\lambda}_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+ e^{i kx} + \epsilon^\lambda_\mu(\vec{k}) \hat{b}_{\lambda, \vec{k}} e^{-i kx} \right), \end{array} \right. \quad (\text{Д4.2.3})$$

<sup>1</sup> Аналогічно можна  $\mathcal{L}(x) = -\partial^\mu V_\nu^* \partial_\mu V^\nu + m^2 V_\mu^* V^\mu$ , див. примітку (1) на с. 431.

<sup>2</sup> Повністю аналогічно, як і у випадку нейтрального масивного векторного поля, накладається калібрувальна умова  $\partial^\mu V_\mu = \partial^\mu V_\mu^* = 0$ .

де  $\varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ,  $\varepsilon^\lambda(\vec{k})$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) є чотири-вимірними векторами поляризації (Д4.1.9) з (Д4.1.13) або (Д4.1.14). У випадку колової поляризації  $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}$  ( $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+$ ) є оператором знищення (народження) частинок із зарядом  $q = +1$ , 4-імпульсом  $k$  та проекцією спіну на напрямок руху  $S_3 = +1, -1, 0$  відповідно до  $\lambda = 1, 2, 3$ ;  $\hat{b}_{\lambda, \vec{k}}$  ( $\hat{b}_{\lambda, \vec{k}}^+$ ) є оператором знищення (народження) античастинок з зарядом  $q = -1$ , 4-імпульсом  $k$  та проекцією спіну на напрямок руху  $S_3 = -1, +1, 0$  відповідно до  $\lambda = 1, 2, 3$ .

Комутаційні співвідношення

$$[\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [\hat{b}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{b}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}. \quad (Д4.2.4)$$

Усі інші варіанти комутаторів двох операторів із числа  $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}, \hat{b}^+$  дорівнюють нулю.

Причинна функція Гріна зарядженого векторного поля є такою ж, як і для нейтрального поля (0.32), (Д4.1.16).

### Д4.3. Безмасове векторне поле на прикладі електромагнітного поля

У класичній теорії вільне електромагнітне поле описується рівняннями Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\partial_0 \vec{H}, & \text{rot } \vec{H} = \partial_0 \vec{E}, \\ \text{div } \vec{H} = 0, & \text{div } \vec{E} = 0. \end{cases} \quad (Д4.3.1)$$

Для симетричного та релятивістсько-інваріантного опису електромагнітного поля вводиться 4-вектор електромагнітного потенціалу  $A_\nu$  ( $\nu = 0, \dots, 3$ ):

$$E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad H^i = -\epsilon^{ikl} \partial^k A^l = \epsilon^{ikl} \partial_k A^l, \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad (Д4.3.2)$$

де  $\epsilon^{ikl}$  – антисиметричний тензор  $\epsilon^{123} = 1$ ; або в більш звичний формі

$$\vec{E} = -\text{grad } A_0 - \partial_0 \vec{A}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (Д4.3.3)$$

У позначеннях (Д4.3.3) рівняння Максвелла набувають вигляду

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) - \partial^\nu \partial_\mu A_\nu = 0. \quad (Д4.3.4)$$

Із компонент 4-вектора електромагнітного потенціалу можна побудувати антисиметричний тензор Максвелла

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \Rightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -H^z & H^y \\ E^y & H^z & 0 & -H^x \\ E^z & -H^y & H^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Д4.3.5})$$

Лагранжіан класичного безмасового векторного (електромагнітного) поля<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (\text{Д4.3.6})$$

При цьому, на відміну від випадку масивного поля, не можна накласти умову  $\partial^\nu A_\nu(x) = 0$  безпосередньо з форми лагранжіана. Безумовно, з даного лагранжіана відтворюються рівняння на компоненти поля (Д4.3.4).

Процедура введення 4-потенціалу  $A_\mu$  містить неоднозначності, а саме: компоненти тензора Максвелла (величини  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) і рівняння Максвелла (Д4.3.1), (Д4.3.4) не зміняться, якщо зробити так звані градієнтні перетворення другого роду

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f, \quad (\text{Д4.3.7})$$

де  $f(x)$  – довільна функція, для якої існує перша та друга похідні.

Зазначену неоднозначність використовують для накладання певної додаткової умови, зазвичай, релятивістсько-інваріантної умови Лоренца

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0. \quad (\text{Д4.3.8})$$

Тоді рівняння на компоненти поля отримають вигляд

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0. \quad (\text{Д4.3.9})$$

Умова Лоренца не повністю визначає потенціал  $A_\mu$ , оскільки рівняння (Д4.3.8), (Д4.3.9) залишаються інваріантними відносно спеціалізованих градієнтних перетворень другого роду

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f_0, \quad (\text{Д4.3.10})$$

<sup>1</sup> Аналогічно можна  $\mathcal{L}(x) = -\partial^\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu$ , див. примітку на с. 431.



де  $f_0$  – довільна функція, що задовольняє умову  $\partial_\nu \partial^\nu f_0 = 0$ .

Цією умовою можна скористатися, щоб в конкретно обраній лоренцевій системі відліку занулити одну з компонент  $A_\mu$ , зазвичай  $A_0$ , тоді умова Лоренца запишеться як  $A_0 = 0$ ,  $\text{div } \vec{A} = 0$ .

Головний висновок, що випливає з розгляду неоднозначності задання 4-потенціалу полягає в тому, що з чотирьох компонент  $A_\mu$  лише дві незалежні.

Надалі будемо розглядати рівняння (Д4.3.9) з умовою (Д4.3.8). У класичній теорії в лабораторній системі відліку частотний розклад поля має вигляд

$$A_\mu(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left( A_\mu(\vec{k}) e^{-i k x} + A_\mu^*(\vec{k}) e^{i k x} \right), \quad \omega_{\vec{k}} = k_0 = |\vec{k}|, \quad (\text{Д4.3.11})$$

де компоненти 4-вектора  $A(\vec{k})$  можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A(\vec{k}) &= (1, \vec{0})A_0(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^1)A_1(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^2)A_2(\vec{k}) + (0, \vec{\varepsilon}^3)A_3(\vec{k}) = \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \varepsilon^\mu A_\mu(\vec{k}) = \left( A_0, \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i A_i(\vec{k}) \right), \quad (\text{Д4.3.12}) \end{aligned}$$

де  $\varepsilon^\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ) утворюють чотири напрямні орти в лабораторній системі відліку<sup>1</sup>:  $\varepsilon^0 = (1; \vec{0})$ ,  $\varepsilon^i = (0; \vec{\varepsilon}^i)$ ,  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k = \delta^{i,k}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

Такий запис, як і в теорії масивного векторного поля, призводить до того, що вираз для енергії системи не є додатно визначеним. Щоб позбутися цього недоліку потрібно використати додаткову умову (Д4.3.8) і перейти в локальну систему відліку, що прив'язана до хвильового вектора  $\vec{k}$ :

$$A(\vec{k}) = (1, \vec{0})a_{0,\vec{k}} + (0, \vec{\varepsilon}^1)a_{1,\vec{k}} + (0, \vec{\varepsilon}^2)a_{2,\vec{k}} + \left( 0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) a_{3,\vec{k}} = \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^\lambda(\vec{k}) a_{\lambda,\vec{k}}, \quad (\text{Д4.3.13})$$

де  $a_{\lambda,\vec{k}}$  – компоненти 4-вектора  $U(\vec{k})$  у локальній системі відліку,  $\vec{\varepsilon}^i$  – одиничні вектора перпендикулярні до вектора  $\vec{k}$ , тобто  $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{k} = 0$ ,

<sup>1</sup>Наприклад:  $\varepsilon^0 = (1; 0; 0; 0)$ ,  $\varepsilon^1 = (0; 1; 0; 0)$ ,  $\varepsilon^2 = (0; 0; 1; 0)$ ,  $\varepsilon^3 = (0; 0; 0; 1)$ .

$\vec{\epsilon}^i \cdot \vec{\epsilon}^k = \delta^{i,k}$ , ( $i, k=1, 2$ ). Тоді з умови Лоренца  $k^\nu A_\nu(\vec{k})=0$  випливає

$$k^\nu a_\nu(\vec{k}) = k^0 a_0 - \vec{k} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = a_3. \quad (\text{Д4.3.14})$$

Завдяки цьому у виразі для енергії системи відбувається взаємне скорочення внесків від часових ( $a_0$ ) і поздовжніх ( $a_3$ ) компонент електромагнітного поля.

У вторинно квантованій теорії умова Лоренца виконується лише в середньому  $\Phi^* \partial_\nu \hat{A}^\nu(x) \Phi = 0$ , що зводиться до умов  $(\hat{a}_0 - \hat{a}_3)\Phi = 0$  та  $\Phi^*(\hat{a}_0^+ - \hat{a}_3^+) = 0$ , де  $\Phi$  – амплітуда стану. Тоді, якщо (Д4.3.13) у лабораторній системі відліку записати в операторній формі як

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(\vec{k}) &= \epsilon^1_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{1,\vec{k}} + \epsilon^2_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{2,\vec{k}} + \left( \frac{k_\mu}{|\vec{k}|} - \delta_{0,\mu} \right) \hat{a}_{3,\vec{k}} + \delta_{0,\mu} \hat{a}_{0,\vec{k}} = \\ &= \epsilon^1_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{1,\vec{k}} + \epsilon^2_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{2,\vec{k}} + \frac{k_\mu}{|\vec{k}|} \hat{a}_{3,\vec{k}} + \delta_{0,\mu} (\hat{a}_{0,\vec{k}} - \hat{a}_{3,\vec{k}}), \quad (\text{Д4.3.15}) \end{aligned}$$

то можна побачити, що при дії  $\hat{A}_\mu(\vec{k})$  на довільний стан  $\Phi$  доданок  $k_\mu \hat{a}_{3,\vec{k}} \Phi = k_\mu \Lambda \Phi$ , тобто його можна занулити завдяки градієнтному перетворенню другого роду (Д4.3.7), а доданок  $(\hat{a}_0 - \hat{a}_3)\Phi = 0$  згідно з визначенням. Тобто наявність у системі часових і поздовжніх фотонів (квантів поля) не має впливати на спостережувані величини.

Не заглиблюючись у деталі, скажемо, що, в принципі, в певному стані системи може перебувати однакова кількість поздовжніх і часових фотонів, але внески від них в усі фізичні величини є взаємокомпенсуючими; такі стани системи повністю еквівалентні стану, коли в системі загалом відсутні поздовжні та часові фотони.

Тобто, хоча математичний розклад 4-вектора вимагає чотирьох базисних векторів, для розкладу потенціалу електромагнітного поля фізично потрібні лише дві компоненти, поперечні до вектора  $\vec{k}$ .

У вторинно квантованій теорії оператор поля має вигляд

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left( \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda,\vec{k}} e^{-ikx} + \epsilon^{*\lambda}_\mu(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda,\vec{k}}^+ e^{ikx} \right), \quad (\text{Д4.3.16})$$

де  $\omega_{\vec{k}} = k_0 = |\vec{k}|$ ,  $\epsilon^\lambda = (0, \vec{\epsilon}^\lambda)$  ( $\lambda = 1, 2$ ), а  $\vec{\epsilon}^\lambda$  визначається як (Д4.1.13) у випадку лінійної та як (Д4.1.14) у випадку колової поляризації,  $\epsilon^\lambda_\mu$

є  $\mu$ -та компонента поляризаційного вектора  $\epsilon^\lambda$  у лабораторній системі відліку<sup>1</sup>.

У випадку колової поляризації  $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+$  ( $\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+$ ) є оператором знищення (народження) частинок з чотири-імпульсом  $k$  та проекцією спіну на напрямок руху  $S_3 = +1, -1$  відповідно до  $\lambda = 1, 2$ .

Комутаційні співвідношення для обох типів поляризацій

$$[\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad [\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}^+, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^+]_- = 0, \quad [\hat{a}_{\lambda, \vec{k}}, \hat{a}_{\lambda', \vec{k}'}^-]_- = 0. \quad (\text{Д4.3.17})$$

Причинна функція Гріна електромагнітного поля<sup>2</sup>(0.32):

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^0(x-x') &= -i\langle 0|\hat{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')|0\rangle = \\ &= -\lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \\ &\Rightarrow D_{\mu\nu}^0(k) = -\lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{Д4.3.18})$$

Наведемо корисне співвідношення:

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k})\epsilon_\nu^{*\lambda}(\vec{k}) = -g_{\mu\nu}, \quad (\text{Д4.3.19})$$

яке можна ефективно використовувати при врахуванні всіх можливих поляризацій реального фотона у випадку, коли вираз (Д4.3.19) входить як складова частина виразу для амплітуди матриці розсіяння КЕД. У повному вигляді (див., наприклад, [26]) співвідношення (Д4.3.19) містить доданки  $\sim k_\nu, k_\mu$ , які не впливають на фізичний результат і можуть бути відкинуті згідно з приміткою 2 внизу сторінки.

У випадку, коли стан фотона не є чистим, для опису його поляризації потрібно використовувати матрицю густини фотона (див. [12], §8 та [2]).

<sup>1</sup> Якщо лабораторна система відліку переходить у локальну лише завдяки просторовим поворотам, то, очевидно,  $\hat{A}_0 = 0$  й умова Лоренца отримає вигляд  $\text{div} \hat{A} = 0$ . В іншому випадку можуть бути ненульовими всі компоненти  $\hat{A}_\mu$ .

<sup>2</sup> Слід зазначити, що  $D_{\mu\nu}^0(k)$  не задано однозначно. Фізичні результати не зміняться, якщо  $D_{\mu\nu}^0(k) \rightarrow D_{\mu\nu}^0(k) + k_\mu k_\nu D(k^2)$ , де  $D(k^2)$  — довільна функція. Вказана неоднозначність пов'язана з законом збереження струму в електродинаміці  $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$  (в імпульсному представленні  $k_\mu j^\mu = 0$ ), оскільки у правила діаграмної техніки Фейнмана  $D_{\mu\nu}^0(k)$  входить у комбінаціях  $j^\mu D_{\mu\nu}^0(k) j^\nu$ .

#### Д4.4. Поляризаційні стани векторних полів

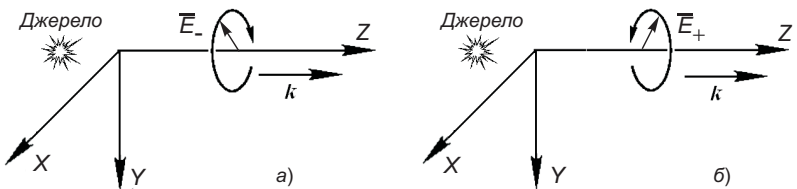
У класичній електродинаміці електромагнітна хвиля з певною поляризацією отримується шляхом суперпозиції двох лінійно поляризованих хвиль однієї частоти, що поширюється в одному напрямку. Для визначеності вважатимемо, що напрямок хвильового вектора  $\vec{k}$  співпадає з напрямком  $\vec{e}_z$ , коливання електричної компоненти  $\vec{E}_1$  першої хвилі лежать у площині  $XZ$ , компоненти  $\vec{E}_2$  другої хвилі – у площині  $YZ$  і між хвилями існує різниця фаз у  $\pi/2$ :

$$\vec{E}_1(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{e}_x E_1 e^{-i(\omega t - k_z z)} \right]; \quad \vec{E}_2(z, t) = \text{Re} \left[ \vec{e}_y E_2 e^{-i(\omega t - k_z z \pm \pi/2)} \right]. \quad (\text{Д4.4.1})$$

У результаті отримується два можливих варіанти електромагнітної хвилі з електричними компонентами

$$\vec{E}_{\mp}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t) = (E_1 \cos(\omega t - k_z z), \mp E_2 \sin(\omega t - k_z z), 0). \quad (\text{Д4.4.2})$$

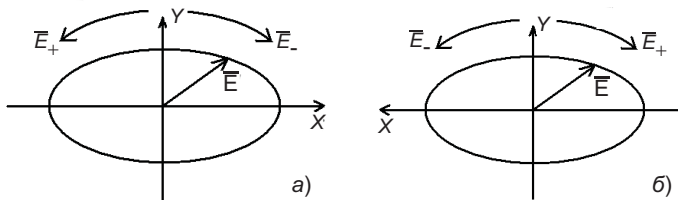
У площині  $XZ$  у фіксованій точці на осі  $Z$  вектор електричної компоненти кожної з цих двох хвиль буде обертатися по еліпсу, але в різні боки (див. рис. Д4.1).



**Рис. Д4.1.** Поширення електромагнітної хвилі з еліптичною поляризацією вздовж осі  $Z$ . Вектор електричної напруженості може обертатися навколо осі  $Z$  у двох напрямках.

Нажаль існують два протилежних визначення ліво- та правополяризованого електромагнітного поля. В оптиці історично прийнято таке визначення: якщо дивитися назустріч хвильовому вектору  $\vec{k}$  (з боку приймача світла) на площину  $XZ$  у фіксованій точці  $z$ , то у випадку, коли вектор електричної напруженості повертається за годинниковою стрілкою, то вважається, що електромагнітна хвиля має

праву поляризацію (хвиля  $\vec{E}_-$  у виразі (Д4.4.2)), а коли проти годинникової стрілки — ліву поляризацію (хвиля  $\vec{E}_+$ ) (див. рис. Д4.2 а). У подальшому ми будемо використовувати саме ці визначення поляризації електромагнітної хвилі.



**Рис. Д4.2.** Площина  $XY$  у фіксованій точці  $z$ . Повороти з часом векторів електричної напруженості електромагнітної хвилі, що поширюється в напрямку  $\vec{e}_z$ : а) якщо дивитися з боку приймача (вісь  $Z$  напрямлена на нас), б) якщо дивитися з боку джерела (вісь  $Z$  напрямлена від нас).

Існує й інше визначення, що збігається з вищенаведеним, але дивитися треба не назустріч хвильовому вектору  $\vec{k}$ , а йому вслід, тобто з боку джерела світла (див. рис. Д4.2 б). У зв'язку з цим може виникнути певна плутанина, тому потрібно завжди уточнювати, яке саме з означень мається на увазі.

Якщо виконується умова  $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$ , то в суперпозиції полів вектор електричної напруженості описує не еліпс, а коло. У цьому випадку кажуть про колову поляризацію. Відповідно, замість (Д4.4.2), матимемо

$$\vec{E}_{\mp}(z, t) = E(\cos(\omega t - k_z z), \mp \sin(\omega t - k_z z), 0). \quad (\text{Д4.4.3})$$

Згадаємо, як виникають поляризаційні фотонні стани в теорії поля. Як було зазначено, розклад електромагнітного 4-потенціалу за компонентами з лінійною поляризацією (позначимо їх як  $a_{1,\vec{k}}$  та  $a_{2,\vec{k}}$ ) (Д4.3.13) приводить до того, що вираз для проекції спіну на напрямок руху стає недіагональним за зазначеними компонентами. Щоб діагоналізувати вираз для проекції спіну на напрямок руху, виконують перехід до інших величин, які є лінійною комбінацією попередніх

(позначимо їх, наприклад,  $b_{1,\vec{k}}$  та  $b_{2,\vec{k}}$ ):

$$\begin{aligned} a_{1,\vec{k}} &= \frac{b_{1,\vec{k}} + b_{2,\vec{k}}}{\sqrt{2}}; & a_{1,\vec{k}}^+ &= \frac{b_{1,\vec{k}}^+ + b_{2,\vec{k}}^+}{\sqrt{2}}; \\ a_{2,\vec{k}} &= \frac{b_{1,\vec{k}} - b_{2,\vec{k}}}{i\sqrt{2}}; & a_{2,\vec{k}}^+ &= \frac{b_{1,\vec{k}}^+ - b_{2,\vec{k}}^+}{-i\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (\text{Д4.4.4})$$

Тоді початковий розклад за лінійними поляризаціями запишеться як

$$\vec{e}_1 a_{1,\vec{k}} + \vec{e}_2 a_{2,\vec{k}} = b_{1,\vec{k}} \frac{\vec{e}_1 - i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} + b_{2,\vec{k}} \frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} = b_{1,\vec{k}} \vec{e}^1 + b_{2,\vec{k}} \vec{e}^2, \quad (\text{Д4.4.5})$$

де поляризаційні вектори  $\vec{e}^{1,2}$  були визначені в (Д4.1.14).

У цьому випадку  $b_{1,\vec{k}}$  та  $b_{2,\vec{k}}$  компоненти 4-потенціалу будуть оберталися в часі у площині, поперечній до напрямку хвильового вектора  $\vec{k}$ . Справді, якщо вісь  $Z$  направити вздовж  $\vec{k}$ , а одиничні вектора  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  направити вздовж осей  $X$  та  $Y$ , то отримаємо вирази

$$\text{Re} \left[ b_{1,\vec{k}} \frac{\vec{e}_1 - i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - k_z z)} \right] = \frac{b_{1,\vec{k}}}{\sqrt{2}} (\cos(\omega t - k_z z), -\sin(\omega t - k_z z), 0), \quad (\text{Д4.4.6})$$

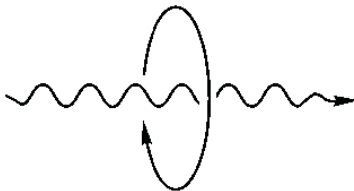
$$\text{Re} \left[ b_{2,\vec{k}} \frac{\vec{e}_1 + i\vec{e}_2}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - k_z z)} \right] = \frac{b_{2,\vec{k}}}{\sqrt{2}} (\cos(\omega t - k_z z), \sin(\omega t - k_z z), 0), \quad (\text{Д4.4.7})$$

що узгоджуються з отриманими раніше виразами для випадку колової поляризації (Д4.4.3).

Після застосування процедури вторинного квантування величини  $b_{1,\vec{k}}$  та  $b_{2,\vec{k}}$  перейдуть в оператори знищення (народження) частинок з вектором поляризації  $\vec{e}^1(\vec{k})$  та  $\vec{e}^2(\vec{k})$ , що мають проекцію спіну на напрямок руху  $S_3 = +1$  та  $S_3 = -1$ , відповідно (див. також (Д4.3.16)). Оскільки ми домовились дотримуватись визначення поляризації прийнятого в оптиці, то називатимемо такі частинки частинками з правою та лівою поляризацією, відповідно.

Усе сказане вище щодо електромагнітного поля поширюється й на випадок масивних векторних полів з одиничним спіном. У цьому

випадку поляризацію частинок буде визначати поперечна компонента 4-потенціалу векторного поля. Зазначимо, що для квантів векторних полів застосовують графічне зображення, представлене на рис. Д4.3.



**Рис. Д4.3.** Схематичне зображення векторної частинки. Вказується напрямок її руху та, схематично, напрямок обернення поперечної компоненти векторного поля, квантом якого вона є. Зокрема, тут зображена частинка з лівою поляризацією та, відповідно, з проекцією спину на напрямок руху  $S_3 = -1$ .

#### Д4.5. Вибір калібрування

Як було зазначено, лагранжیان векторного безмасового поля у формі (Д4.3.6) є калібрувально інваріантним відносно заміни  $A_\nu \rightarrow A'_\nu = A_\nu + \partial_\nu f$ , де  $f$  — довільна функція. Для позбавлення неоднозначності, в цьому випадку, накладалася умова Лоренца (Д4.3.8):  $\partial_\nu A^\nu(x) = 0$ . У випадку масивного векторного поля лагранжیان не є калібрувально інваріантним, однак умова  $\partial_\nu A^\nu(x) = 0$  є безпосереднім наслідком рівнянь руху. Зауважимо також, що процедури вторинного квантування в одному та іншому випадках принципово різні і простою заміною  $m \rightarrow 0$  в усіх співвідношеннях не можна з масивної теорії отримати безмасову. Наприклад, у пропагаторі масивного векторного поля (Д4.1.16) не можна зробити перехід  $m \rightarrow 0$ , щоб отримати пропагатор безмасового векторного поля (Д4.3.18).

Фізична причина неможливості такого переходу, полягає в тому, що у випадку безмасового векторного поля ми маємо лише два ступені вільності (поперечні складові поля), а у випадку масивного векторного поля — три ступені вільності (дві поперечні та одну поздовжню).

Виявляється, що можна модифікувати лагранжіани векторних полів таким чином, щоб масивна теорія переходила в безмасову при  $m \rightarrow 0$ .

Розглянемо спочатку випадок безмасового векторного поля. Відповідний лагранжіан (Д4.3.6) є інваріантним відносно калібрувальних перетворень. Дане поле можна представити у вигляді суми двох незалежних компонент: поперечної  $A_\mu^T$  (у сенсі  $\partial^\mu A_\mu^T = 0$ ,  $T$  – скорочення від англ. *transversal* – поперечний) і поздовжньої складової  $A_\mu^L$  ( $L$  – скорочення від англ. *longitudinal* – поздовжній):  $A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L$ . Наявність поздовжньої частини визначається величиною  $\partial^\mu A_\mu = \chi \neq 0$ .

Спробуємо зафіксувати вибір калібрування шляхом додавання до лагранжіана доданка, що явно порушує калібрувальну інваріантність. Явний вигляд цього доданка буде фіксувати калібрування. Нехай модифікований лагранжіан матиме вигляд<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_{m_A=0}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\chi^2, \quad (\text{Д4.5.1})$$

де  $\xi$  – довільний додатний параметр ( $\xi > 0$ ),  $\partial^\mu A_\mu = \chi$ .

Рівняння руху для лагранжіана (Д4.5.1), відповідно буде:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} - \frac{1}{\xi}\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\chi = 0. \quad (\text{Д4.5.2})$$

Подіявши на рівняння (Д4.5.2) оператором  $\sum_\mu \partial^\mu$ , отримаємо

$$\xi^{-1}\partial^\mu \partial_\mu\chi = 0 \quad (\text{Д4.5.3})$$

Тобто поздовжня частина векторного поля утворює скалярну величину  $\partial^\nu A_\nu = \chi$ , яка задовольняє рівнянню Клейна–Гордана для скалярного поля з масою  $m_\chi = 0$ . Безумовно, одним із розв’язків цього рівняння є тривіальний розв’язок  $\chi = \partial^\nu A_\nu = 0$ , який являє собою калібрування Лоренца в немодифікованій теорії. Однак величина  $\chi$  не обов’язково має бути нулем. Щоб дослідити такий варіант детальніше, зручно розглянути випадок масивного векторного поля з лагранжіаном:

$$\mathcal{L}_{m_A}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}\chi^2, \quad (\text{Д4.5.4})$$

що отримав назву лагранжіана Штюкельберга [6, 16].

<sup>1</sup>Тут можна навести певну аналогію з математичною процедурою пошуку екстремуму функції з додатковою умовою. У нашому випадку, додаткова умова  $(\partial^\mu A_\mu)^2 = 0$ , множник Лагранжа  $(2\xi)^{-1}$ .



Відповідне рівняння руху матиме вигляд

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) + m_A^2 A_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \chi = 0. \quad (\text{Д4.5.5})$$

Подіявши на рівняння (Д4.5.5) оператором  $\sum_\mu \partial^\mu$ , отримаємо

$$\xi^{-1}(\partial^\mu \partial_\mu + \xi m_A^2)(\partial^\nu A_\nu) = 0. \quad (\text{Д4.5.6})$$

Тобто поздовжня частина векторного поля утворює скалярну величину  $\partial^\nu A_\nu = \chi$ , яка задовольняє рівнянню Клейна–Гордона для скалярного поля з масою  $m_\varphi = \sqrt{\xi} m_A$  (зміст нижнього індексу  $\varphi$  буде зрозумілий пізніше). Саме для того, щоб така аналогія справді мала місце, накладається умова  $\xi > 0$ .

Отже, масивне векторне поле також можна представити як суму двох незалежних компонент: поперечної  $A_\mu^T$  (у сенсі  $\partial^\mu A_\mu^T = 0$ ) та поздовжньої  $A_\mu^L$  складової

$$\begin{aligned} A_\mu &= \left( A_\mu + \frac{\partial_\mu \chi}{\xi m_A^2} \right) - \frac{\partial_\mu \chi}{\xi m_A^2} = A_\mu^T + A_\mu^L, \\ A_\mu^T &= A_\mu + \frac{\partial_\mu \chi}{m_\varphi^2}, \quad A_\mu^L = -\frac{\partial_\mu \chi}{\xi m_A^2}. \end{aligned} \quad (\text{Д4.5.7})$$

Справді, у таких позначеннях, враховуючи (Д4.5.6), для поперечної складової автоматично виконується умова

$$\partial^\mu A_\mu^T = \frac{1}{m_\varphi^2}(\partial^\mu \partial_\mu + m_\varphi^2)\chi = 0. \quad (\text{Д4.5.8})$$

Тобто саме компонента  $A_\mu^T$  задовольняє умову (Д4.5.6) та рівнянням руху (Д4.5.5).

Корисно записати лагранжіан (Д4.5.4) через поздовжню частину, зробивши заміну  $A_\mu = A_\mu^T - \frac{\partial_\mu \chi}{\xi m_A^2}$  та  $\chi = \xi m_A \varphi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m_A}(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^T F^{T,\mu\nu} + \frac{m_A^2}{2} A_\mu^T A^{T,\mu} + \frac{m_A^2}{2m_\varphi^4} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2\xi} \chi^2 - \frac{1}{\xi} A_\mu^T \partial^\mu \chi = \\ &= \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^T F^{T,\mu\nu} + \frac{m_A^2}{2} A_\mu^T A^{T,\mu} \right] + \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{m_\varphi^2}{2} \varphi^2 \right] - m_A A_\mu^T \partial^\mu \varphi, \end{aligned} \quad (\text{Д4.5.9})$$

де вираз у перших квадратних дужках є лагранжіаном вільного масивного векторного поля  $A_\mu^T$ , вираз у других квадратних дужках є лагранжіаном вільного скалярного поля  $\varphi$ , а останній доданок можна відкинути. Справді,  $A_\mu^T \partial^\mu \varphi = \partial^\mu (A_\mu^T \varphi) - \varphi \partial^\mu A_\mu^T$ , відповідно перший доданок не дає внеску в дію, а останній тотожно дорівнює нулю внаслідок (Д4.5.8).

В нових позначеннях

$$A_\mu^T = A_\mu + m_A^{-1} \partial_\mu \varphi, \quad A_\mu^L = -m_A^{-1} \partial_\mu \varphi. \quad (\text{Д4.5.10})$$

Очевидно, що рівняння руху (Д4.5.5) для поля  $A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L$  дасть рівняння на вільні векторне та скалярне поля:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_A^2) A_\nu^T = 0, \quad \text{з додатковою умовою} \quad \partial^\mu A_\mu^T = 0 \quad (\text{Д4.5.11})$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_\varphi^2) \varphi = 0 \quad (\text{Д4.5.12})$$

Отже, якщо векторне поле  $A_\mu$  не задовольняє умові Лоренца, то воно являє собою суму безпосередньо векторного поля з калібрувальною умовою Лоренца (поперечна складова поля) та похідної від масивного, з масою  $m_\varphi = \sqrt{\xi} m_A$ , скалярного поля  $\varphi$  (подовжня частина поля). З іншого боку, дане скалярне поле за визначенням визначається через комбінацію  $\partial^\mu A_\mu$  ( $\varphi = \xi^{-1} m_A^{-1} \partial^\mu A_\mu$ ) і фіксує вибір калібрування. Той факт, що його маса та амплітуда залежать від калібрувального параметра  $\xi$  вказує на нефізичність такого поля.

Можна показати, що значення параметра  $\xi$  не впливатиме на величини, що фізично спостерігаються; лагранжіани (Д4.5.1), (Д4.5.4) будуть давати ті самі результати для фізичних величин, що і відповідні лагранжіани без модифікації. Даний формалізм є зручним, оскільки перебор всіх можливих обмежень для фіксації калібрування типу  $\partial_\mu A^\mu = f(x)$  зводиться лише до вибору певного значення параметра  $\xi > 0$ . Параметр  $\xi$  буде характеризувати вибір калібрування в загальному випадку.

Для лагранжіана (Д4.5.4) причинна функція Гріна поля  $A_\mu$  буде<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(x-x') &= -i \langle 0 | \hat{T} [\hat{A}_\mu^T(x) - m_A^{-1} \partial_\mu \varphi(x)] [\hat{A}_\nu^T(x') - m_A^{-1} \partial_\nu \varphi(x')] | 0 \rangle = \\ &= -i \langle 0 | \hat{T} \hat{A}_\mu^T(x) \hat{A}_\nu^T(x') | 0 \rangle - i m_A^{-2} \langle 0 | \hat{T} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\nu \varphi(x') | 0 \rangle \\ &\Rightarrow D_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_A^2}{m_A^2 - k^2 - i\epsilon} + \frac{k_\mu k_\nu / m_A^2}{m_\varphi^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (\text{Д4.5.13}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Див. примітку 2 на с. 439 щодо виразів (Д4.5.15), (Д4.5.13).

Останній вираз краще записати у вигляді

$$D_{\mu\nu}(k, \xi) = \frac{1}{m_A^2 - k^2 - i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{\xi m_A^2 - k^2 - i\epsilon} \right). \quad (\text{Д4.5.14})$$

Зазначимо, що при  $\xi \rightarrow \infty$  (так зване *унітарне* калібрування) відновлюється вираз для пропагатора у формі (Д4.1.16), котрий при  $k \rightarrow \infty$  переходить у неспадну функцію, що є катастрофічним при обчисленні радіаційних поправок. Однак при кінцевих значеннях параметра  $\xi$  (так зване  $R_\xi$ -калібрування, від англ. *renormalization*) матимемо  $D_{\mu\nu}(k \rightarrow \infty, \xi) \sim k^{-2}$ .  $R_\xi$  калібрування є дуже зручним при аналізі перенормованості певної теорії поля, див. детальніше розділ 24.

У виразі (Д4.5.14) можна зробити перехід  $m_A = 0$ , тоді отримаємо

$$D_{\mu\nu}^0(k, \xi) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right). \quad (\text{Д4.5.15})$$

Легко переконатися, що пропагатор (Д4.5.15) при  $\xi \rightarrow 1$  переходить<sup>1</sup> у пропагатор безмасового векторного поля (Д4.3.18).

Випадок  $\xi = 1$  називають *калібруванням Фейнмана*. У цьому калібруванні пропагатор векторного поля (як масивного так і безмасового) має найбільш простий вигляд.

Випадок  $\xi = 0$  називають *калібруванням Ландау*. У цьому калібруванні пропагатори (Д4.5.14) та (Д4.5.15) набувають вигляду

$$D_{\mu\nu}^\Lambda(k, \xi = 0) \sim \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (\text{Д4.5.16})$$

і стають поперечними до 4-імпульсу  $k$ , тобто  $D_{\mu\nu}^\Lambda k^\nu = k^\mu D_{\mu\nu}^\Lambda = 0$ .

Виділений також є випадок  $\xi = 3$ , котрий отримав назву *калібрування Йенні та Фріда*. В цьому випадку масовий оператор електрона допускає коректний перехід до нульової маси фотона, див. детальніше розділ 24.

У даному курсі, якщо явно не вказаний вибір калібрування, ми будемо використовувати означення причинних функцій Гріна у формі (0.32).

<sup>1</sup> Саме для виконання коректних граничних переходів у пропагаторах векторних полів до лагранжіанів були додані доданки  $\sim \chi^2$ , а не  $\sim \chi$ . До того ж, величина  $\chi^2$  має таку саму розмірність, як і розмірність лагранжіана ( $[m]^4$ ), відповідно калібрувальний параметр  $\xi$  у (Д4.5.1), (Д4.5.4) є безрозмірним.

## Додаток 5. Ферміони та ферміонні поля

Рівняння Дірака для вільної частинки:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - mI)\Psi(x) = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad (\text{Д5.1})$$

де  $\Psi(x)$  – 4-компонентна хвильова функція частинки,  $I$  – одинична матриця<sup>1</sup>  $4 \times 4$ , а в якості  $\gamma$  використовуються чотири матриці  $4 \times 4$ , що задовольняють таким співвідношенням<sup>2</sup>:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma_\mu, \quad (\text{Д5.2})$$

з яких, зокрема, випливає, що

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = I, \quad \gamma^\mu \gamma^\mu = g^{\mu\mu} I \quad (\mu - \text{фіксоване число}). \quad (\text{Д5.3})$$

Також будемо використовувати матрицю  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  з такими властивостями:

$$\gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0, \quad \gamma^5 \gamma^5 = I, \quad \gamma^{5+} = \gamma^5. \quad (\text{Д5.4})$$

### Алгебра матриць Дірака

Якщо розглянути всі можливі добутки різної кількості матриць  $\gamma^\mu$ , то, використавши (Д5.2), можна побачити, що добутки більші ніж чотирьох  $\gamma$ -матриць будуть зводитися або до однієї  $\gamma$ -матриці, або до добутків двох, трьох чи чотирьох  $\gamma$ -матриць.

Матриці рангу 4 містять  $4 \cdot 4 = 16$  елементів (можливо комплексних) і, відповідно, існують лише 16 лінійно незалежних матриць, за допомогою яких можна розкласти довільну матрицю  $4 \times 4$ . В якості таких незалежних матриць можна обрати:

$$\begin{aligned} & I, \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \\ & \gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^2, \gamma^0\gamma^3, \gamma^1\gamma^2, \gamma^1\gamma^3, \gamma^2\gamma^3, \\ & \gamma^0\gamma^1\gamma^2, \gamma^0\gamma^2\gamma^3, \gamma^0\gamma^1\gamma^3, \gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ & \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{Д5.5})$$

або

$$I, \gamma^\mu, \gamma^5, i\gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu\nu} = i\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu}{2}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3 \quad (\text{Д5.6})$$

<sup>1</sup>Надалі одиничну матрицю не будемо записувати, але будемо мати її на увазі.

<sup>2</sup>Явний вигляд  $\gamma$ -матриць наведено в переліку позначень на с. 16.

Матриці (Д5.5), (Д5.6) можна пронумерувати в довільному порядку і позначити їх як  $\Gamma^i$ ,  $i = 1, \dots, 16$ . Матриці  $\Gamma^i$  мають такі властивості:

$$\text{Tr}[\Gamma^i] = 0 \quad (\Gamma^i \neq I), \quad \Gamma^i \Gamma_i = I, \quad \text{Tr}[\Gamma^i \Gamma_j] = 4\delta_{ij}. \quad (\text{Д5.7})$$

Тоді, очевидно, будь-яку матрицю  $A$  ( $4 \times 4$ ) можна розкласти як

$$A = \sum_{i=1}^{16} C_i \Gamma^i, \quad C_i = \frac{1}{4} \text{Tr}[A \Gamma_i]. \quad (\text{Д5.8})$$

$\gamma$ -матриці в рівнянні Дірака не фіксуються однозначно умовами (Д5.2). Зв'язок між різними варіантами вибору  $\gamma$ -матриць встановлюється за допомогою **леми Паулі**: якщо існують два набори матриць  $4 \times 4$   $\gamma^\mu$  та  $\gamma'^\mu$ , що задовольняють (Д5.2), то існує неособлива унітарна матриця  $S$  така, що  $\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}$ ,  $S^+ S = 1$ .

З аналізу (Д5.1) випливає, що при зміні  $\gamma \rightarrow \gamma' = S \gamma S^{-1}$  хвильова функція перетворюється як  $\Psi \rightarrow \Psi' = S \Psi$ . Отже, рівняння Дірака є інваріантним відносно перетворень

$$\gamma \rightarrow \gamma' = S \gamma S^{-1}, \quad \Psi \rightarrow \Psi' = S \Psi. \quad (\text{Д5.9})$$

В якості рівняння на комплексно спряжену функцію використовується

$$i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m \bar{\Psi} = 0, \quad \text{або формально } \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0, \quad (\text{Д5.10})$$

де  $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$  отримала назву діраківськи-спряженої функції. Саме в таких позначеннях рівняння стає лоренц-інваріантним.

Зауважимо, що рівняння Дірака часто зводять до форми рівняння Шредінгера. Справді, домноживши (Д5.1) зліва на  $\gamma^0$ , отримаємо

$$i \partial_t \Psi(x) = [\gamma^0 \gamma^j (-i \partial_j) + m \gamma^0] \Psi(x). \quad (\text{Д5.11})$$

Позначивши оператор імпульсу як  $\hat{k}^j = i \partial^j = -i \partial_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ) та ввівши нові матриці  $\alpha^j = \gamma^0 \gamma^j$ ,  $\beta = \gamma^0$ , запишемо

$$i \partial_t \Psi(x) = [\vec{\alpha} \hat{k} + m \beta] \Psi(x) = \hat{H} \Psi(x), \quad (\text{Д5.12})$$

де  $\hat{H} = \vec{\alpha} \hat{k} + m \beta$  є гамільтоніаном системи.

Корисно зазначити, що у випадку наявності зовнішнього електромагнітного поля рівняння Дірака (Д5.1) модифікується до вигляду

$$(i \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) - m I) \Psi(x) = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3, \quad (\text{Д5.13})$$

або у вигляді рівняння Шредінгера

$$i\partial_t\Psi(x) = [\vec{\alpha}(\hat{k} - e\vec{A}) + eA_0 + m\beta]\Psi(x) = \hat{H}\Psi(x). \quad (\text{Д5.14})$$

В нерелятивістському наближенні дане рівняння зводиться до рівняння Паулі

$$i\partial_t\varphi(x) = \left[ \frac{(\hat{k} - e\vec{A})^2}{2m} + eA_0 - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{H} \right] \varphi(x) = \hat{H}\varphi(x), \quad (\text{Д5.15})$$

де  $\vec{H}$  – магнітне поле,  $\vec{\sigma}$  – матриці Паулі,  $\varphi$  – компонента хвильової функції  $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}$ .

Величина

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{\sigma} = g\mu_B\vec{S} \quad (\text{Д5.16})$$

отримала назву магнітного моменту електрона, де  $\mu_B = e/(2m)$  – елементарний магнітний момент: *магнетон Бора*,  $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$  – спін електрона,  $g$  – множник Ланде. В рамках КЕД, без врахування радіаційних поправок,  $g = 2$ . Зазначимо також, що в системі СІ

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}. \quad (\text{Д5.17})$$

Для подальшої роботи корисно нагадати роз'язки рівняння Дірака для вільної частинки.

### Д5.1. Розв'язки рівняння Дірака для вільної частинки

Запишемо рівняння (Д5.1) явно, вибравши  $\gamma$ -матриці в представленні Дірака (0.25):

$$\begin{pmatrix} i\partial_0 - m & i\vec{\sigma}\vec{\partial} \\ -i\vec{\sigma}\vec{\partial} & -i\partial_0 - m \end{pmatrix} \Psi(x) = 0, \quad \vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3). \quad (\text{Д5.1.1})$$

Будемо шукати розв'язок рівняння Дірака (Д5.1) у вигляді суперпозиції

$$\Psi(x) = \sum_k f_k v_k e^{-ikx}, \quad v_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}, \quad (\text{Д5.1.2})$$

де  $A_k, B_k$  – двокомпонентні спінори,  $f_k$  – константи розкладу, позначення  $k$  відповідає  $k^\mu = (E, \vec{k})$ , тоді

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma}\vec{k} \\ \vec{\sigma}\vec{k} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = 0 \quad \text{або} \\ \begin{cases} (E - m)A_k + (-\vec{\sigma}\vec{k})B_k = 0 \\ (\vec{\sigma}\vec{k})A_k + (-E - m)B_k = 0 \end{cases} \quad (\text{Д5.1.3})$$

Параметр енергії  $E = \pm k_0$  ( $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ) знаходиться з умови наявності нетривіальних розв'язків системи однорідних рівнянь (Д5.1.3), тобто з рівності нулю її детермінанту.

У випадку  $E = +k_0$  з нижнього рівняння (Д5.1.3) маємо

$$B_k = \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} A_k \quad \Rightarrow \quad v_k = \begin{pmatrix} A_k \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} A_k \end{pmatrix}. \quad (\text{Д5.1.4})$$

У випадку  $E = -k_0$  з верхнього рівняння (Д5.1.3) маємо

$$A_{(-k_0, \vec{k})} = \frac{-\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} B_{(-k_0, \vec{k})} \quad \Rightarrow \quad v_{(-k_0, \vec{k})} = \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} B_{(-k_0, \vec{k})} \\ B_{(-k_0, \vec{k})} \end{pmatrix}. \quad (\text{Д5.1.5})$$

Тоді в (Д5.1.2) можна залишити лише суму за  $\vec{k}$ , оскільки  $k_0$  односторонньо виражається через  $\vec{k}$  ( $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ). Отримаємо

$$\Psi(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \left( f_k v_k e^{-ik_0 x^0 + i\vec{k}\vec{x}} + f_{(-k_0, \vec{k})} v_{(-k_0, \vec{k})} e^{+ik_0 x^0 + i\vec{k}\vec{x}} \right). \quad (\text{Д5.1.6})$$

Щоб вираз був лоренц-інваріантним, зробимо заміну в другому доданку  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , тоді

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} (\Psi_k(x) + \Psi_{-k}(x)) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} (f_k v_k e^{-ikx} + f_{-k} v_{-k} e^{+ikx}) = \\ &= \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \left( f_k \begin{pmatrix} A_k \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} A_k \end{pmatrix} e^{-ikx} + f_{-k} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{k_0 + m} B_{-k} \\ B_{-k} \end{pmatrix} e^{+ikx} \right). \quad (\text{Д5.1.7}) \end{aligned}$$

Функції  $A_k, B_{-k}$  у (Д5.1.7) не визначаються однозначно і можуть мати по два незалежних розв'язки кожна. Отже, щоб мати змогу їх класифікувати, потрібно ввести ще одне квантове число. Нагадаємо, як воно визначається.

Спочатку запишемо (Д5.1) для одночастинкових розв'язків з додатною  $\Psi_{+k}(x) = v_k e^{-ikx}$  та від'ємною енергіями  $\Psi_{-k}(x) = v_{-k} e^{ikx}$ :

$$\begin{cases} (\gamma^\mu k_\mu - m)v_k = 0 \\ (-\gamma^\mu k_\mu - m)v_{-k} = 0 \end{cases} \quad (\text{Д5.1.8})$$

або, позначивши згортку  $\gamma^\mu k_\mu = \not{k}$  та узагальнивши:

$$(q \not{k} - m)v_{qk} = 0, \quad q = \pm 1, \quad (\text{Д5.1.9})$$

де  $q$  визначає знак енергії (додатній або від'ємний). З виразу (Д5.1.9) можна формально визначити оператор  $\hat{Q}$ :

$$\hat{Q}v_{qk} = \frac{\not{k}}{m}v_{qk} = qv_{qk}, \quad (\text{Д5.1.10})$$

власні значення якого будуть визначати приналежність функції частинці, чи, після відповідного перетворення, античастинці.

Тепер введемо ще одне квантове число. Позначимо його  $\mu$ , а відповідний оператор  $\hat{Q}_1$ :

$$\hat{Q}_1 v_{qk}^\mu = \mu v_{qk}^\mu. \quad (\text{Д5.1.11})$$

Верхній індекс  $\mu$  тут не є символом коваріантної величини, а означає квантове число. Накладемо умову, щоб дана величина спостерігалася одночасно з власним значенням оператора  $\hat{Q}$ , тобто

$$[\hat{Q}, \hat{Q}_1]_- = 0. \quad (\text{Д5.1.12})$$

Цій умові, як легко переконалися, буде задовольняти оператор  $\hat{Q}_1$  у вигляді  $\hat{Q}_1 = \gamma^5 \chi_\nu \gamma^\nu = \gamma^5 \not{\chi}$ , де  $\chi$  – деякий 4-вектор, скалярний добуток якого з 4-вектором імпульсу дорівнює нулю. Тобто

$$[\not{k}, \hat{Q}_1]_- = [\not{k}, \gamma^5 \not{\chi}]_- = 2\gamma^5 (\chi_\nu k^\nu) = 0. \quad (\text{Д5.1.13})$$

Накладемо умову  $\hat{Q}_1^2 = -\chi_\nu \chi^\nu = 1$ , тоді невідомий 4-вектор  $\chi$  у формі  $\chi = (\chi^0, \vec{\alpha k})$  буде однозначно визначатися умовами

$$\chi k = 0 \quad \text{та} \quad \chi^2 = -1. \quad (\text{Д5.1.14})$$



Вектор  $\chi$  отримав назву 4-вектора поляризації. Домноживши (Д5.1.11) зліва на  $\hat{Q}_1$  та врахувавши те, що  $\hat{Q}_1^2 = 1$ , знайдемо власні значення даного оператора:

$$\hat{Q}_1^2 v_{qk}^\mu = \mu \hat{Q}_1 v_{qk}^\mu = \mu^2 v_{qk}^\mu \Rightarrow v_{qk}^\mu = \mu^2 v_{qk}^\mu \Rightarrow \mu = \pm 1. \quad (\text{Д5.1.15})$$

Отже, стан фермі-частинки описується за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} (q \not{k} - m)v_{qk}^\mu = 0 \\ (\gamma^5 \not{\chi} - \mu)v_{qk}^\mu = 0. \end{cases} \quad (\text{Д5.1.16})$$

Розкриємо фізичний зміст нової характеристики ферміонних розв'язків. Розглянемо спочатку випадок, коли частинка перебуває в стані спокою. Тоді її 4-імпульс буде  $k = (m, 0)$ . Відповідно, 4-вектор  $\chi$  можна представити у вигляді:  $\chi = (0, \vec{\xi})$ , де  $\vec{\xi}$  — довільний одиничний вектор  $\vec{\xi}^2 = 1$  ( $\chi^2 = -1$ ). У цьому випадку система (Д5.1.16) зведеться до простого вигляду:

$$\begin{cases} (q\gamma^0 - 1)v_{qk}^\mu = 0 \\ (-\gamma^5 \vec{\gamma} \vec{\xi} - \mu)v_{qk}^\mu = 0, \end{cases} \quad (\text{Д5.1.17})$$

з якого випливає

$$-\gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma} \vec{\xi} v_{qk}^\mu = q\mu v_{qk}^\mu. \quad (\text{Д5.1.18})$$

Враховуючи, що спінова матриця як в представленні Дірака (0.25), так і в кіральному представленні (0.28) визначається як

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -\gamma^0 \gamma^5 \vec{\gamma}, \quad (\text{Д5.1.19})$$

вираз (Д5.1.18) остаточно запишеться як

$$\left(\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \vec{\xi}\right) v_{qk}^\mu = \frac{q\mu}{2} v_{qk}^\mu. \quad (\text{Д5.1.20})$$

Отже, для частинок ( $q = 1$ ) число  $\mu$  визначає проекцію спіну ( $\pm 1/2$ ) на довільний напрямок  $\vec{\xi}$ . Фізично це означає, що для вільної частинки в стані спокою ми завжди можемо вибрати такий напрямок у просторі, на який проекція спіну частинки буде мати визначене значення. Відповідно, ми можемо побудувати дві незалежні спінорні

функції, що будуть відрізнятися лише значенням проекції спіну на обрану нами вісь (напрямок з проекцією спіну  $+1/2$  задається вектором  $\vec{\xi}$ ). Отже просторова частина 4-вектору  $\chi$  визначає напрямок спіну частинки в системі спокою.

При переході в систему відліку, в якій ферміон рухається в певному (але довільно обраному) напрямку і має певне значення 4-імпульсу  $k$ , проекція спіну на вісь  $\vec{\xi}$  вже не буде мати певного значення, оскільки гамільтоніан частинки з певним 4-імпульсом  $k$  не комує з оператором  $\vec{\Sigma}\vec{\xi}$ .

Однак безпосередньо можна переконатися, що для випадку масивних ферміонів квантове число спіральності (тобто проекція спіну на напрямок імпульсу) є інтегралом руху ( $[\hat{H}, \vec{\Sigma}\vec{v}]_- = 0$ , де  $\hat{H}$  визначається (Д5.12)), однак не є лоренц-інваріантним. Справді, перейшовши в систему відліку, що рухається вздовж напрямку руху частинки, але з більшою швидкістю, ми отримуємо, що проекція спіну на напрямок руху змінить знак.

З наведених міркувань одразу випливає, що для безмасових частинок, що рухаються зі швидкістю світла, ситуація змінюється і значення квантового числа спіральності буде лоренц-інваріантним інтегралом руху. Випадок нульової маси ферміонів є особливим і ми його детально розглянемо після введення поняття киральності.

Перейдемо тепер в систему відліку, в якій ферміон рухається вздовж вектора  $\vec{\xi}$  і має 4-імпульс  $k = (k^0, \vec{k})$ , тоді вектор  $\chi$  матиме вигляд<sup>1</sup>:

$$\chi = \left( \frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{k^0}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right). \quad (\text{Д5.1.21})$$

У цьому випадку система (Д5.1.16) зводиться до

$$\begin{cases} (qk^0\gamma^0 - q\vec{\gamma}\vec{k} - m)v_{qk}^\mu = 0 \\ \left( \gamma^5\gamma^0 \frac{|\vec{k}|}{m} - \gamma^5\vec{\gamma}\vec{k} \frac{k^0}{m|\vec{k}|} - \mu \right) v_{qk}^\mu = 0. \end{cases} \quad (\text{Д5.1.22})$$

Виразивши  $k^0$  з першого рівняння та підставивши в друге, отримуємо

$$-\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}\vec{v}v_{qk}^\mu = q\mu v_{qk}^\mu, \quad \text{або} \quad \left( \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\vec{v} \right) v_{qk}^\mu = \frac{q\mu}{2} v_{qk}^\mu, \quad (\text{Д5.1.23})$$

<sup>1</sup>Альтернативно, 4-вектор  $\chi$  можна шукати у вигляді  $\chi = (\chi^0, \alpha\vec{k})$ , де  $\chi^0$  та  $\alpha$  знаходяться з умов (Д5.1.14).

де  $\vec{\nu} = \vec{k}/|\vec{k}|$  є одиничним вектором, що напрямлений вздовж напрямку руху. Отже, для частинок ( $q = 1$ ) число  $\mu$  визначає проєкцію спіну на напрямок руху ( $\pm 1/2$ ) і має назву квантового числа спіральності<sup>1</sup>. Частинки з  $\mu = +1$  називаються частинками з правою поляризацією, а з  $\mu = -1$  — з лівою поляризацією.

Так і має було бути, оскільки, ми з самого початку направляли вектор імпульсу вздовж вектора спіну. За цієї умови проєкція спіну на напрямок руху є чітко визначеною.

У загальному ж випадку, зі стану спокою частинки  $p = (m, 0)$ ,  $\chi = (0, \vec{\xi})$  ми можемо перейти в систему відліку, де ферміон має 4-імпульс  $k$ , але вектор  $\vec{k}$  не є паралельним вектору  $\vec{\xi}$ . Виконавши перетворення Лоренца, отримаємо

$$\chi = \left( \frac{(\vec{k}\vec{\xi})}{m}, \vec{\xi} + \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{\xi})}{m(m+k^0)} \right). \quad (\text{Д5.1.24})$$

У цьому випадку квантове число спіральності вже не буде власним значенням оператора спіральності. Усереднене значення проєкції спіну на довільний напрямок, у тому числі і на напрямок руху, можна отримати за допомогою матриці густини  $\rho$  (4.9) [12]:

$$\bar{s} = \frac{1}{4k_0} \text{Tr}[\rho \gamma^0 \vec{\Sigma}] = \frac{(-1)}{4k_0} \text{Tr}[\rho \gamma^5 \vec{\gamma}]. \quad (\text{Д5.1.25})$$

За допомогою наведеної формули, можна явно переконатися в тому, що, якщо зафіксувати напрямки спіну  $\vec{\xi}$  (у системі спокою) та імпульсу (нехай  $\vec{\xi}$  не паралельний  $\vec{k}$ ), то проєкція спіну на напрямок руху буде залишатися постійною (вона не буде дорівнювати  $\pm 1/2$ ), а на будь-який інший напрямок буде змінюватися зі зміною значення модуля імпульсу.

Тепер можна отримати явний вигляд функцій ферміонного поля. Ми це зробимо для ферміонних станів з чітко визначеним числом спіральності. Для цього потрібно в (Д5.1.23) підставити шукані функції  $v_{qk}^\mu$  згідно з (Д5.1.7) і знайти невідомі  $A_k$  та  $B_{-k}$ .

---

<sup>1</sup>В принципі, замість числа  $\mu$  ми могли ввести додаткове квантове число  $\lambda$  як власне значення оператора спіральності  $\vec{\Sigma}\vec{\nu}$ . Цей оператор комує як з  $Q$ , так і з гамільтоніаном системи (Д5.12).

У представленні Дірака<sup>1</sup> функції  $\Psi_{qk}^\mu(x)$  при нормуванні на об'єм записуються як

$$\Psi_{+k}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} v_{+k}^\mu e^{-ikx}, \quad v_{+k}^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} + m} \omega^\mu \\ \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} - m} (\vec{\sigma}\vec{v}) \omega^\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{Д5.1.26})$$

$$\Psi_{-k}^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} v_{-k}^\mu e^{ikx}, \quad v_{-k}^\mu = -\mu \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} - m} (\vec{\sigma}\vec{v}) \omega^{-\mu} \\ \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}} + m} \omega^{-\mu} \end{pmatrix}, \quad (\text{Д5.1.27})$$

де  $m$  – маса частинки,  $\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ ,  $\mu$  – квантове число спіральності,  $\vec{v} = \vec{k}/|\vec{k}|$ , а функції  $\omega^\mu$  мають вигляд

$$\omega^{+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad \omega^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (\text{Д5.1.28})$$

і властивості, в яких легко явно переконатися:

$$(\omega^\mu)^\dagger \omega^{\mu'} = \delta_{\mu, \mu'}; \quad (\vec{\sigma}\vec{v})\omega^\mu = \mu \omega^\mu; \quad i\sigma^2(\omega^\mu)^* = -\mu \omega^{-\mu}, \quad (\text{Д5.1.29})$$

де  $\theta, \varphi$  задають напрямок вектора  $\vec{k}$  у сферичній системі відліку.

Знаначимо важливі співвідношення для одночастинкових розв'язків:

$$\bar{v}_{qk}^\mu v_{q'k}^{\mu'} = 2mq \delta_{q, q'} \delta_{\mu, \mu'}, \quad (\text{Д5.1.30})$$

$$\sum_{q, \mu} q v_{qk}^\mu \bar{v}_{qk, \beta}^\mu = 2m \delta_{\alpha, \beta}, \quad (\text{Д5.1.31})$$

де  $\alpha, \beta$  – номер компоненти ферміонної функції.

Отже, загальний розв'язок (Д5.1.7) рівняння Дірака насправді має вигляд

$$\Psi(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=\pm 1} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} (f_{k, \mu} v_k^\mu e^{-ikx} + f_{-k, \mu} v_{-k}^\mu e^{+ikx}) \quad (\text{Д5.1.32})$$

і є суперпозицією розв'язків з різними частотами та різними значеннями числа спіральності. Кожному окремому доданку зіставляється

<sup>1</sup>Для отримання функцій у кіральному представленні достатньо виконати петворення  $\Psi_{\text{Кір}} = S\Psi_{\text{Дір}}$ , де  $S$ -матриця задана на с. 17.

одночастинковий розв'язок. Розв'язок з додатною енергією ( $q = +1$ ) відповідає частинці з 4-імпульсом  $k$  та проекцією спіну на напрямок руху  $\mu$ , наприклад, електрону  $\Psi_{\text{ел}}(x) = \Psi_{+k}^{\mu}(x)$ . Розв'язку з від'ємною енергією ( $q = -1$ ), виконавши процедуру зарядового спряження, можна зіставити розв'язок для частинки з  $k^0 > 0$  і протилежним зарядом, наприклад, позитрона

$$\Psi_{\text{поз}}(x) = \hat{C}\Psi_{-k}^{\mu}(x) = \hat{U}_C \left( \overline{\Psi_{-k}^{\mu}}(x) \right)^T, \quad (\text{Д5.1.33})$$

де  $\hat{C}$  – оператор зарядового спряження, дія якого на ферміонну функцію зводиться до добутку матричного оператора  $U_C$  на транспоновану діраковськи спряжену функцію. У довільному представленні  $\gamma$ -матриць матричний оператор  $\hat{U}_C$  має задовольняти таким властивостям:

$$\hat{U}_C(\gamma^{\mu})^T \hat{U}_C^{-1} = -\gamma^{\mu}, \quad \hat{U}_C^{\dagger} \hat{U}_C = 1. \quad (\text{Д5.1.34})$$

У стандартному та кіральному представленні  $\gamma$ -матриць матричний оператор  $U_C$  має вигляд  $\hat{U}_C = -i\gamma^2\gamma^0$ , тоді

$$\Psi_{\text{поз}}(x) = -i\gamma^2\gamma^0 \left( \overline{\Psi_{-k}^{\mu}}(x) \right)^T = -i\gamma^2\Psi_{-k}^{*\mu}(x) \quad (\text{Д5.1.35})$$

За допомогою співвідношень (Д5.1.29) можна явно виконати процедуру зарядового спряження функцій (Д5.1.27) і побачити, що позитронні функції співпадають з електронними<sup>1</sup>:

$$\Psi_{\text{поз}}(x) = \hat{C}\Psi_{-k}^{\mu}(x) = \Psi_k^{\mu}(x). \quad (\text{Д5.1.36})$$

Отже, квантове число спіральності дорівнює знаку проекції спіну на напрямок руху<sup>2</sup> як для частинки, так і для античастинки.

## Д5.2. Кіральні стани ферміонів

Якщо вибрати  $\gamma$ -матриці в кіральному представленні (0.28), (0.29), то у ферміонній функції можна виділити дві так звані двокомпонентні

<sup>1</sup> Саме для цього в (Д5.1.27) був штучно введений фазовий множник  $-\mu$  в означенні  $v_{-k}^{\mu}$ .

<sup>2</sup> У випадку, коли імпульс частинки дорівнює нулю, все сказане залишається в силі, але квантове число  $\mu$  дорівнює знаку проекції спіну не на напрямок руху, а на довільний, фіксований напрямок.

вейлевські складові  $\Psi_L$  та  $\Psi_R$ :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_L(x) \\ \Psi_R(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{Д5.2.1})$$

що при перетвореннях неоднорідної групи Лоренца (трансляції, просторові повороти та лоренцеві бусты) будуть перетворюватися незалежно (не будуть змішуватися між собою) внаслідок діагональності відповідних матриць  $\vec{\Sigma}$  та  $\vec{\alpha}$  (див. (Д2.4), (Д2.6)). В інших представленнях  $\gamma$ -матриць функція  $\Psi(x)$  також буде містити дві незалежні в такому сенсі компоненти, однак цей факт не буде таким очевидним.

У довільному представленні  $\gamma$ -матриць незалежні компоненти ферміонної функції можна виділити за допомогою проєкційних операторів<sup>1</sup>

$$\hat{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad \hat{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (\text{Д5.2.2})$$

для яких виконуються співвідношення

$$\hat{P}_L + \hat{P}_R = \hat{I}; \quad \hat{P}_L \hat{P}_L = \hat{P}_L; \quad \hat{P}_R \hat{P}_R = \hat{P}_R; \quad \hat{P}_L \hat{P}_R = \hat{P}_R \hat{P}_L = 0. \quad (\text{Д5.2.3})$$

Тоді незалежними компонентами хвильової функції будуть  $\Psi_L = \hat{P}_L \Psi$ , та  $\Psi_R = \hat{P}_R \Psi$ .

Функції  $\Psi_L(x)$  та  $\Psi_R(x)$  є власними функціями оператора кіральності  $\gamma^5$ . Якщо  $\gamma^5 \Psi = -\Psi$ , то це функція  $\Psi_L(x)$  з лівою кіральністю ( $\hat{P}_+ \Psi_L = 0$ ). Якщо  $\gamma^5 \Psi = +\Psi$ , то це функція  $\Psi_R(x)$  з правою кіральністю ( $\hat{P}_- \Psi_R = 0$ ).

У кіральному представленні проєкційні оператори та функції  $\Psi_L$  та  $\Psi_R$  мають вигляд:

$$\hat{P}_- = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad (\text{Д5.2.4})$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_- \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{Д5.2.5})$$

У представленні Дірака, відповідно, маємо

$$\hat{P}_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}; \quad (\text{Д5.2.6})$$

---

<sup>1</sup>Зазначимо, що можна зустріти альтернативне позначення для проєкційних операторів  $\hat{P}_- = \hat{P}_L$ ,  $\hat{P}_+ = \hat{P}_R$ , що явно вказує на знак перед матрицею  $\gamma^5$ .

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_- \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_2 \\ -(\Psi_1 - \Psi_2) \end{pmatrix}; \quad \hat{P}_+ \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \Psi_2 \\ \Psi_1 + \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{Д5.2.7})$$

Як легко побачити, функції  $\Psi_L$  та  $\Psi_R$  в кожному з представлень справді є незалежними.

Зауважимо, що оператор кіральності для масивних частинок не є інтегралом руху ( $[\hat{H}, \gamma^5]_- \neq 0$ ), але його значення є лоренц-інваріантною величиною. Для безмасових частинок кіральність є як лоренц-інваріантною величиною, так і інтегралом руху ( $[\hat{H}, \gamma^5]_- = 0$ , де  $\hat{H}$  визначається згідно з (Д5.12)).

Запишемо ряд корисних співвідношень для кіральних функцій:

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R, \quad \bar{\Psi} = \bar{\Psi}_L + \bar{\Psi}_R, \quad (\text{Д5.2.8})$$

$$\Psi_L = \hat{P}_- \Psi, \quad \Psi_R = \hat{P}_+ \Psi, \quad (\text{Д5.2.9})$$

$$\bar{\Psi}_L = (\Psi_L)^+ \gamma^0 = \Psi^+ \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^0 = \Psi^+ \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} = \bar{\Psi} \hat{P}_+, \quad \bar{\Psi}_R = \bar{\Psi} \hat{P}_- \quad (\text{Д5.2.10})$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_L = \bar{\Psi}_R \Psi_R = 0 \Rightarrow \bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R, \quad (\text{Д5.2.11})$$

$$\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_L = 0 \Rightarrow \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L, \quad (\text{Д5.2.12})$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \hat{P}_+ \Psi = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \Psi, \quad \bar{\Psi}_R \Psi_L = \bar{\Psi} \hat{P}_- \Psi, \quad (\text{Д5.2.13})$$

$$\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L = \bar{\Psi} \hat{P}_+ \gamma^\mu \hat{P}_- \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_- \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_- \Psi, \quad (\text{Д5.2.14})$$

$$\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R = \bar{\Psi} \gamma^\mu \hat{P}_+ \Psi. \quad (\text{Д5.2.15})$$

### Д5.3. Безмасові ферміони. Нейтрино

Якщо зробити перехід  $m \rightarrow 0$  у виразах (Д5.1.26), (Д5.1.27), то отримаємо, що для безмасових ферміонів існують стани з додатною та від'ємною енергіями та двома можливими значеннями проекції спіну в кожному випадку. Однак експерименти за участі нейтрино<sup>1</sup> вказують, що у нейтрино спіральність набуває лише одного значення ( $-1$ ), а в антинейтрино ( $+1$ ). Це справедливо як для електронного, так і для

<sup>1</sup>Довгий час нейтрино вважалася безмасовими частинками. Як безмасові вони входять у лагранжіан стандартної моделі. Однак у 1998 р. було експериментально доведено наявність у нейтрино дуже малої маси [22]. Сучасне обмеження на суму мас електронного, мюонного та  $\tau$  нейтрино  $< 0.4 - 1$  еВ [23]. У даному розділі наведений теоретичний опис саме для безмасових частинок в рамках стандартної моделі.

мюонного та  $\tau$ -нейтрино. Цей факт знаходить своє відображення в лагранжіані стандартної моделі.

Щоб розібратися в цьому, будемо шукати розв'язок рівняння Дірака у вигляді суперпозиції

$$\Psi(x) = \sum_k f_k \Psi_k(x) = \sum_k f_k \Psi_k e^{-ikx}, \quad (\text{Д5.3.1})$$

де  $f_k$  – константи розкладу, та запишемо рівняння (Д5.1) явно, вибравши  $\gamma$ -матриці в кіральному представленні:

$$\begin{pmatrix} -m & i\partial_0 + i\vec{\sigma}\vec{\partial} \\ i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\partial} & -m \end{pmatrix} \Psi_k(x) = 0, \quad \vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3). \quad (\text{Д5.3.2})$$

У цьому представленні видно, що при  $m \rightarrow 0$  рівняння на вейлевські компоненти з лівою та правою кіральністю  $\Psi_k(x) = \begin{pmatrix} \xi_{L,k} \\ \eta_{R,k} \end{pmatrix} e^{-ikx}$ , ( $k^\mu = (E, \vec{k})$ ) стають незалежними<sup>2,3</sup>:

$$\begin{cases} (i\partial_0 + i\vec{\sigma}\vec{\partial})\eta_{R,k} e^{-ikx} = 0 \\ (i\partial_0 - i\vec{\sigma}\vec{\partial})\xi_{L,k} e^{-ikx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (E - \vec{\sigma}\vec{k})\eta_{R,k} e^{-ikx} = 0 \\ (E + \vec{\sigma}\vec{k})\xi_{L,k} e^{-ikx} = 0 \end{cases}, \quad (\text{Д5.3.3})$$

де  $E = \pm k_0 = \pm |\vec{k}|$ .

Для розв'язків з додатною енергією ( $E = |\vec{k}|$ ) отримаємо

$$\begin{cases} \vec{\sigma}\vec{v}\eta_{R,k} = +\eta_k & \Rightarrow \eta_{R,k} \sim \omega^{(+)} \\ \vec{\sigma}\vec{v}\xi_{L,k} = -\xi_{L,k} & \Rightarrow \xi_{L,k} \sim \omega^{(-)} \end{cases}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \quad (\text{Д5.3.4})$$

Отже, для нейтрино (у припущенні, що вони безмасові фермі частинки) значення кіральності та спіральності частинки є однаковими<sup>3</sup>.

Оскільки спіральність нейтрино в стандартній моделі  $(-1)$ , то реалізується лише нижнє рівняння на компоненту  $\xi_{L,k} \sim \omega^{(-)}$ , тобто функція нейтрино з 4-імпульсом  $k$  має вигляд  $\Psi_\nu(x) = \Psi_L(x)$ :

<sup>2</sup> Саме тому в безмасовому випадку, кіральність є інтегралом руху.

<sup>3</sup> Незалежні рівняння на окремі компоненти безмасового спірного поля були вперше отримані Германом Вейлем в 1929 році. Кірально представлення  $\gamma$ -матриць також називають представленням Вейля.

<sup>3</sup> Визначення спіральності залишається тим самим, що і в масивному випадку:  $\vec{\sigma}\vec{v}f_{qk}^\mu = q^\mu f_{qk}^\mu$



$$\begin{aligned}\Psi_\nu(x) &= \Psi_L(x) = \Psi_k^{\mu=-1}(x) = \begin{pmatrix} \xi_{L,k} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \nu_k^{-1} e^{-ikx}. \quad (\text{Д5.3.5})\end{aligned}$$

Зазначимо, що для безмасових правих ферміонів хвильова функція матиме вигляд

$$\begin{aligned}\Psi_R(x) &= \Psi_k^{\mu=+1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{R,k} \end{pmatrix} e^{-ikx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(+)} \end{pmatrix} e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \nu_k^{+1} e^{-ikx}. \quad (\text{Д5.3.6})\end{aligned}$$

В останніх виразах ми використали нормування на об'єм, використали позначення  $\varepsilon = k_0$  та записали функцію у вигляді, подібному до (Д5.1.26), (Д5.1.27).

Відомо, що спіральність антинейтрино (+1). За аналогією з масивними ферміонами (див. (Д5.1.36)) функція антинейтрино має бути отримана дією операції зарядового спряження на функцію з від'ємною енергією і має бути пропорційною  $\omega^{(+)}$ . З двох наявних функцій для від'ємних енергій  $\Psi_{-k}^{\mu=\pm 1}(x)$  функцію антинейтрино можна отримати з  $\Psi_{-k}^{\mu=1}(x)$ :

$$\begin{aligned}\Psi_{-k}^{\mu=1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{+ikx} = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \nu_{-k}^{+1} e^{+ikx}, \\ \Psi_{\bar{\nu}}(x) &= \hat{C}\Psi_{-k}^{\mu=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(+)} \end{pmatrix} e^{-ikx}, \quad (\text{Д5.3.7})\end{aligned}$$

де ми використали оператор зарядового спряження  $\hat{C}\Psi(x) = -i\gamma^2\Psi^*(x)$  з матрицею  $\gamma^2$  у кіральному представленні та співвідношення (Д5.1.29).

Слід звернути увагу на те, що функція антинейтрино  $\Psi_{\bar{\nu}}(x) = \hat{C}\Psi_{-k}^{\mu=1}(x)$  містить лише нижню компоненту (є функцією з правою кіральністю), а функція нейтрино – верхню (ліва кіральність). А в масивній теорії функції античастинок тотожно дорівнювали функціям частинок (Д5.1.36). Тобто ми порушили інваріантність теорії відносно процедури зарядового спряження. Інваріантність теорії буде відновлена по відношенню до одночасного перетворення зарядового спряження та просторової інверсії. Справді, враховуючи дію оператора просторової інверсії  $\hat{P}\Psi(x^0, \vec{x}) = \gamma^0\Psi(x^0, -\vec{x})$  та (Д5.3.7), отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{C}\Psi_{-k}^{\mu=1}(x) &= \hat{P}\frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(+)} \end{pmatrix}e^{-ikx} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}}\begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix}e^{-ik^0x^0 - i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{Д5.3.8}) \end{aligned}$$

та, змінивши у відповідному доданку в сумі (Д5.3.1)  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ ,

$$\hat{P}\hat{C}\Psi_{-k}^{\mu=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon}}\begin{pmatrix} \sqrt{2\varepsilon}\omega_k^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix}e^{-ikx} = \Psi_k^{\mu=-1}(x). \quad (\text{Д5.3.9})$$

З явного вигляду функцій  $\Psi_k^{\mu=-1}(x)$  та  $\Psi_{-k}^{\mu=1}(x)$  видно, що для нейтрино загальний розв'язок (Д5.3.1) складатиметься лише із функцій з лівою кіральністю:

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) &= \sum_k \left[ f_k \Psi_k^{\mu=-1}(x) + f_{-k} \Psi_{-k}^{\mu=1}(x) \right] = \\ &= \sum_k [f_k \Psi_{L,k}(x) + f_{-k} \Psi_{L,-k}(x)]. \quad (\text{Д5.3.10}) \end{aligned}$$

Цей результат не залежить від вибору представлення  $\gamma$ -матриць.

Слід зазначити, що отримані функції (Д5.3.5), (Д5.3.7) можна було отримати із загального розв'язку рівняння Дірака для масивної частинки, в якому слід покласти  $m = 0$  та подіяти на нього проектувальним оператором  $\hat{P}_L$ . Загальний розв'язок (Д5.3.10) для нейтрино також дорівнює  $\hat{P}_L\Psi(x)/m=0$ , де  $\Psi(x)$  – загальний розв'язок для масивних ферміонів (Д5.1.32). У записі нейтринних функцій через  $\hat{P}_L$  є певні переваги, зокрема, ними можна оперувати згідно зі співвідношеннями (Д5.2.8) – (Д5.2.15).

#### Д5.4. Ферміонне поле

##### Масивне ферміонне поле

Функцію Лагранжа для ферміонного поля ми будемо використовувати у вигляді

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x). \quad (\text{Д5.4.1})$$

Після процедури вторинного квантування оператори ферміонного поля можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(x) = \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},\mu} v_{\vec{k}}^{\mu} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k},\mu}^{+} v_{-\vec{k}}^{\mu} e^{ikx} \right), \\ \hat{\bar{\Psi}}(x) = \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},\mu}^{+} \bar{v}_{\vec{k}}^{\mu} e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k},\mu} \bar{v}_{-\vec{k}}^{\mu} e^{-ikx} \right), \end{cases} \quad (\text{Д5.4.2})$$

де  $\varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ , функції  $v_{q\vec{k}}^{\mu}$  є одночастинковими розв'язками рівняння (Д5.1) і мають вигляд (Д5.1.26), (Д5.1.27). Оператори  $\hat{a}_{\vec{k},\mu}^{+}$  та  $\hat{a}_{\vec{k},\mu}$  ( $\hat{b}_{\vec{k},\mu}^{+}$  та  $\hat{b}_{\vec{k},\mu}$ ) є відповідно операторами народження та знищення частинки (античастинки) з імпульсом  $\vec{k}$ , числом спіральності  $\mu$  та зарядом  $Q=1$  ( $Q=-1$ ).

Полюсові оператори задовольняють антикомутаційним співвідношенням:

$$[\hat{a}_{\vec{k}',\mu'}, \hat{a}_{\vec{k},\mu}^{+}]_{+} = \delta_{\mu,\mu'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad [\hat{b}_{\vec{k}',\mu'}, \hat{b}_{\vec{k},\mu}^{+}]_{+} = \delta_{\mu,\mu'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \quad (\text{Д5.4.3})$$

Усі інші варіанти комутаторів двох операторів з числа  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^{+}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^{+}$  дорівнюють нулю.

Причинна функція Гріна ферміонного поля:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x-x') &= i\langle 0|\hat{T}\hat{\Psi}_{\alpha}(x)\hat{\bar{\Psi}}_{\beta}(x')|0\rangle = \\ &= \lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{(m+\not{k})_{\alpha\beta}}{m^2-k^2-i\epsilon} e^{-ik(x-x')} \\ &\Rightarrow G_{\alpha\beta}(k) = \lim_{\epsilon\rightarrow+0} \frac{(m+\not{k})_{\alpha\beta}}{m^2-k^2-i\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{Д5.4.4})$$

де  $\alpha, \beta$  – номер компоненти ферміонної функції; перекреслений символ векторної величини означає згортку відповідного вектора з  $\gamma$ -матрицями, тобто  $\not{a} = \sum_{\nu=0}^3 a^{\nu} \gamma_{\nu}$ .

Ми будемо також використовувати факт, що вторинно квантовані функції антикомутують на  $c$ -функцію:

$$[\hat{\Psi}_{\alpha}(x), \hat{\bar{\Psi}}_{\beta}(x')]_{+} = S_{\alpha\beta}(x-x'). \quad (\text{Д5.4.5})$$

### Безмасове поле нейтрино

Лагранжіан безмасового нейтринного поля можна отримати з лагранжіана (Д5.4.1), в якому слід занулити масу та накласти умову  $\hat{P}_+ \Psi = 0$  (в теорію будуть входити лише ліві поля). Позначимо  $\nu(x) = \hat{P}_- \Psi(x) = \Psi_L(x)$ , тоді лагранжіан нейтринного поля матиме вигляд

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\nu}(x) i \gamma^\mu \partial_\mu \nu(x). \quad (\text{Д5.4.6})$$

Після процедури вторинного квантування оператори нейтринного поля можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \hat{\nu}(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},-1} \nu_{\vec{k}}^{-1} e^{-ikx} + \hat{b}_{\vec{k},+1}^+ \nu_{-\vec{k}}^{+1} e^{ikx} \right), \\ \hat{\bar{\nu}}(x) = \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{k}}}} \left( \hat{a}_{\vec{k},-1}^+ \bar{\nu}_{\vec{k}}^{-1} e^{ikx} + \hat{b}_{\vec{k},+1}^- \bar{\nu}_{-\vec{k}}^{+1} e^{-ikx} \right), \end{cases} \quad (\text{Д5.4.7})$$

де  $\varepsilon_{\vec{k}} = k_0 = |\vec{k}|$ ;  $\nu_{\pm\vec{k}}^\pm$  визначені в (Д5.3.5), (Д5.3.7); оператори  $\hat{a}_{\vec{k},-1}^+$  та  $\hat{a}_{\vec{k},-1}$  ( $\hat{b}_{\vec{k},+1}^+$  та  $\hat{b}_{\vec{k},+1}$ ) є операторами народження та знищення нейтрино (антинейтрино) з імпульсом  $\vec{k}$  та відповідним числом спіральності.

Польові оператори задовольняють антикомутаційним співвідношенням (Д5.4.3). Вираз для причинної функції Гріна нейтринного поля легко отримати, згадавши, що  $\hat{\nu}(x) = \hat{\Psi}_L(x)/_{m=0} = \hat{P}_- \hat{\Psi}(x)/_{m=0}$  та  $\hat{\bar{\nu}}(x) = \hat{\Psi}_L(x)/_{m=0} = \hat{\Psi}(x)/_{m=0} \hat{P}_+$ , де  $\hat{\Psi}(x)$ ,  $\hat{\bar{\Psi}}$  – вторинно квантовані функції (Д5.4.2):

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(\nu)}(x-x') &= i \langle 0 | \hat{T} \hat{\nu}_\alpha(x) \hat{\bar{\nu}}_\beta(x') | 0 \rangle = \\ &= (\hat{P}_-)_{\alpha\alpha'} i \langle 0 | \hat{T} \hat{\Psi}_{\alpha'}(x) \hat{\bar{\Psi}}_{\beta'}(x') | 0 \rangle (\hat{P}_+)_{\beta'\beta} = (\hat{P}_- G(x-x') \hat{P}_+)_{\alpha\beta} /_{m=0}. \end{aligned} \quad (\text{Д5.4.8})$$

де  $\alpha, \beta$  – номер компоненти ферміонної функції,  $G(x-x')$  – причинна функція Гріна ферміонного поля (Д5.4.4).

Зауважимо, що замінивши функції  $\nu(x)$  на  $\hat{P}_- \Psi(x)/_{m=0}$  та  $\bar{\nu}(x)$  на  $\bar{\Psi}(x)/_{m=0} \hat{P}_+$ , можна переписати лагранжіан через звичайні функції  $\Psi, \bar{\Psi}$ , а оператори  $\hat{P}_-, \hat{P}_+$  просто модифікують його явний вигляд.

## Додаток 6. Стан вакууму та амплітуда стану в представленні Фока

### Стан вакууму

Розглянемо динамічну систему, що складається з декількох типів квантованих незсаємодіючих полів<sup>1</sup>, для яких можна ввести вторинноквантовані функції.

Визначимо амплітуду стану вакууму  $|0\rangle$  для даної системи як стану, в якому відсутні частинки. Тоді енергія та імпульс вакууму мають дорівнювати нулю.

Дія операторів знищення призводить до зменшення енергії в системі. Якщо ми домовимось, що енергії, меншої від нульової в системі не може бути, то ми приходимо до умови

$$a_{\vec{k},i}^-|0\rangle = 0 \quad \text{та спряженої до неї} \quad \langle 0|a_{\vec{k},i}^+ = 0, \quad (\text{Д6.9})$$

де  $a_{\vec{k},i}^-$  ( $a_{\vec{k},i}^+$ ) — оператори народження (знищення) частинки з певним значення імпульсу  $\vec{k}$  та іншими квантовими числами (проекція спіну на виділену вісь, поляризація і т.д.), сукупність яких ми позначили літерою  $i$ . Іноді для спрощення запису ми позначатимемо стан  $\vec{k}, i$  однією літерою  $i$ . Домовимось також вибрати нормування вакуумного стану у вигляді

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (\text{Д6.10})$$

Рівняння (Д6.9) та (Д6.10) повністю визначають вакуумний стан.

### Амплітуда одночастинкового стану

Амплітуда стану для однієї частинки, що перебуває в стані з визначеним імпульсом  $\vec{k}$ , енергією та іншими квантовими числами  $i$ , буде

$$|1\rangle = a_{\vec{k},i}^+|0\rangle \equiv a_i^+|0\rangle. \quad (\text{Д6.11})$$

при цьому для реальної частинки має виконуватись дисперсійне співвідношення  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2$ . Норма цього стану визначається стандартним чином як  $\langle 1|1\rangle$ . Врахувавши, що  $a_i a_{i'}^+ = \delta_{i,i'} \pm a_{i'}^+ a_i$  (знак  $\pm$

---

<sup>1</sup>Це справедливо для полів у представленні взаємодії, процеси за участі яких ми розглядали.

залежить від того, чи є частинка бозоном, чи ферміоном), і врахувавши (Д6.9), (Д6.10), отримаємо

$$\langle 1|1\rangle = \langle 0|a_i a_i^+|0\rangle = \langle 0|\delta_{i,i}|0\rangle = 1. \quad (\text{Д6.12})$$

Амплітуда стану для однієї частинки, що перебуває в стані, що є суперпозицією станів з визначеним імпульсом  $\vec{k}$ , енергією та іншими квантовими числами  $i$ , буде

$$|1\rangle = \sum_{\vec{k}, i} C(\vec{k}, i) a_{\vec{k}, i}^+ |0\rangle, \quad (\text{Д6.13})$$

де  $C(\vec{k}, i)$  — коефіцієнти розподілу в суперпозиції та для кожного  $\vec{k}$  має виконуватись  $k^2 = m^2$ . Норма цього стану буде

$$\begin{aligned} \langle 1|1\rangle &= \sum_{\vec{k}, i, \vec{k}', i'} C^*(\vec{k}', i') C(\vec{k}, i) \langle 0|a_{\vec{k}', i'} a_{\vec{k}, i}^+|0\rangle = \\ &= \sum_{\vec{k}, i, \vec{k}', i'} C^*(\vec{k}', i') C(\vec{k}, i) \delta_{\vec{k}i, \vec{k}'i'} = \sum_{\vec{k}, i} |C(\vec{k}, i)|^2. \end{aligned} \quad (\text{Д6.14})$$

Вимагаючи, щоб норма амплітуди стану дорівнювала одиниці, отримаємо обмеження на коефіцієнти функцій у суперпозиції

$$\sum_{\vec{k}, i} |C(\vec{k}, i)|^2 = 1. \quad (\text{Д6.15})$$

Вищенаведене стосувалося як бозонів, так і ферміонів. Однак для опису багаточастинкових станів існують певні відмінності.

### Амплітуда багаточастинкового стану.

#### Випадок бозе-частинок

Зазначимо, що в одному квантовому стані не заборонено перебувати декільком бозе-частинкам. Якщо цей стан має визначений імпульс, енергією та інші квантові числа, то для опису  $N$  частинок потрібно подіяти  $N$  разів оператором народження (для визначеності будемо бозонні оператори позначати за допомогою літери  $b$ ):

$$|N\rangle = \beta \underbrace{b_j^+ b_j^+ \dots b_j^+}_N |0\rangle, \quad (\text{Д6.16})$$

де  $\beta$  нормувальний коефіцієнт.

Норма стану

$$\langle N|N\rangle = \beta^2 \langle 0| \underbrace{b_j b_j \dots b_j}_N \underbrace{b_j^+ b_j^+ \dots b_j^+}_N |0\rangle = \beta^2 N!. \quad (\text{Д6.17})$$

Відповідно, вимагаючи одиничної норми стану знаходимо

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \underbrace{b_j^+ b_j^+ \dots b_j^+}_N |0\rangle. \quad (\text{Д6.18})$$

При такому визначенні норми стану значення енергії в системі, що складається з  $N$  частинок з імпульсом  $\vec{k}$  та однаковими фіксованими іншими квантовими числами, буде

$$\begin{aligned} E &= \langle N|\hat{E}|N\rangle = \langle N|\sum_i \varepsilon_i b_i^+ b_i|N\rangle = \\ &= \frac{1}{N!} \langle 0|\underbrace{b_j b_j \dots b_j}_N \left( \sum_i \varepsilon_i b_i^+ b_i \right) \underbrace{b_j^+ b_j^+ \dots b_j^+}_N |0\rangle = N\varepsilon_j, \end{aligned} \quad (\text{Д6.19})$$

де  $\varepsilon_j$  — енергія однієї частинки в стані  $j \equiv \vec{k}, j$ , а також автоматично (згідно з комутаційними правилами для бозонних операторів) виконуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} b_j|N_j\rangle &= \sqrt{N_j}|N_j-1\rangle; \quad b_j^+|N_j\rangle = \sqrt{N_j+1}|N_j+1\rangle; \quad \hat{N}|N_j\rangle = N_j|N_j\rangle; \\ &[b_j b_j^+ - b_j^+ b_j]|N_j\rangle = |N_j\rangle, \end{aligned} \quad (\text{Д6.20})$$

де  $|N_j\rangle$  — стан системи з  $N_j$  однакових частинок у стані  $j$  (Д6.18);  $\hat{N} = \sum_k b_k^+ b_k$  — оператор кількості частинок у системі, а остання рівність підтверджує комутаційний закон перестановки для бозонних операторів.

Нехай ми маємо систему з  $N$  однакових частинок, що перебувають у станах з визначеними числами  $i$ . При цьому в стані з певним квантовим числом  $i$  перебуває  $N_i$  частинок,  $N = \sum_i N_i$ . Амплітуда стану такої системи буде

$$|N\rangle = \prod_i \hat{A}_i |0\rangle, \quad \hat{A}_i = \frac{1}{\sqrt{N_i!}} \underbrace{b_i^+ b_i^+ \dots b_i^+}_{N_i}, \quad (\text{Д6.21})$$

а енергія системи буде сумою енергій всіх частинок

$$E = \langle N | \hat{E} | N \rangle = \langle N | \sum_i \varepsilon_i b_i^+ b_i | N \rangle = \sum_i N_i \varepsilon_i. \quad (\text{Д6.22})$$

Зазначимо, що порядок операторів у визначенні (Д6.21) є довільним. Оскільки бозонні оператори комутують, то перестановка операторів народження не призведе до змін у фізичній системі.

У випадку, коли система містить  $N$  однакових частинок, що не перебувають у стані з визначеним імпульсом та іншими квантовими числами

$$|N\rangle = \sum_{\vec{k}_1, i_1, \vec{k}_2, i_2, \dots, \vec{k}_N, i_N} F(\vec{k}_1, i_1, \vec{k}_2, i_2, \dots, \vec{k}_N, i_N) b_{\vec{k}_1, i_1}^+ b_{\vec{k}_2, i_2}^+ \dots b_{\vec{k}_N, i_N}^+ |0\rangle, \quad (\text{Д6.23})$$

де  $F(\vec{k}_1, i_1, \vec{k}_2, i_2, \dots, \vec{k}_N, i_N)$  — вагова функція, що описує розподіл частинок по імпульсах і має нормуватися згідно з умовою  $\langle N | N \rangle = 1$ . Сума ведеться за всіма дозволеними значеннями імпульсів ( $k^2 = m^2$ ) і за всіма іншими квантовими числами. Оскільки це бозе-частинки, то значення змінних підсумовування можуть співпадати між собою для різних операторів у добутку.

### Амплітуда багаточастинкового стану.

#### Випадок фермі-частинок

Як відомо з принципу Паулі, у стані з однаковими квантовими числами може перебувати лише одна фермі-частинка. Завдяки тому, що ферміонні оператори народження  $f_i^+$  (знищення  $f_i$ ) антикомутують, принцип Паулі виконується автоматично. Справді, якщо ми захочемо записати стан, з певними квантовими числами  $i$ , в якому перебувають два ферміони, то отримаємо

$$|2\rangle = f_i^+ f_i^+ |0\rangle = [f_i^+, f_i^+]_+ = 0 = -f_i^+ f_i^+ |0\rangle, \quad (\text{Д6.24})$$

що вказує на неможливість існування такого стану.

Для опису системи  $N$  ферміонів, що не перебувають в одному стані та мають невизначене значення енергії-імпульсу можна застосовувати (Д6.23), в якому слід замінити бозонні оператори на ферміонні і виключати доданки, де два (або більше) ферміонів будуть в однаковому стані.



Зауважимо, що порядок операторів у наведеному визначенні станів не є зовсім довільним. Внаслідок антикомутації ферміонних операторів зміна порядку операторів може привести до зміни знака у визначенні стану. У випадку, коли усереднення від оператора певної фізичної величини ( $\hat{F}$ ) береться за діагональними станами  $\langle N|\hat{F}|N\rangle$  можлива зміна знака стану системи не приведе до зміни значення фізичної величини. У випадку, коли усереднення від оператора певної фізичної величини береться за недіагональними станами  $\langle N'|\hat{F}|N\rangle$  розташування операторів у станах  $|N'\rangle$  та  $|N\rangle$  має бути таким, щоб виконувалась умова  $\langle N'|N\rangle = \delta_{N,N'}$ .

*Головне запитання, яке може виникнути, є таким. Наскільки мають відрізнятися імпульси двох ферміонів, щоб вважати їх приналежними до різних квантових станів і не суперечити принципу Паулі? Згідно з (1.35), відповідні проєкції імпульсів мають відрізнятися на  $2\pi\hbar/L$ , де  $L$  – характерний розмір системи, що визначає спектр ферміонів.*

*Максимальна кількість станів, що мають енергію меншу від  $E$ , буде очевидно,*

$$G(E) = g \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\vec{k}(E_{min})}^{\vec{k}(E)} d^3\vec{k} = g \frac{4\pi}{3} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{k}(E)|^3,$$

*де ми вважали, що  $E = E(|\vec{k}|)$ ;  $g$  – фактор виродження (кількість спіннових станів),  $V$  – об'єм системи. Фактично, це максимальна кількість ферміонів у системі, чия енергія є меншою за  $E$ . Звертаємо увагу, що ця величина прямо пропорційна об'єму системи та залежить від явного вигляду дисперсійного співвідношення.*

*Максимальна кількість станів, що мають імпульс менший за  $|\vec{p}|$ :*

$$G(|\vec{p}|) = g \frac{4\pi}{3} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{p}|^3.$$

*Корисною характеристикою системи є також максимальна густина станів поблизу імпульсу  $|\vec{p}|$  по відношенню до об'єму системи:*

$$g(\vec{p}^2) = \frac{1}{V} \frac{dG(|\vec{p}|)}{d|\vec{p}|} = \frac{4\pi g}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{p}|^2.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Ахиезер А.И.* Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М.: Наука, 1981.
2. *Блум К.* Теория матрицы плотности и ее приложения / К. Блум; пер. с англ. под ред. Д.Н. Зубарева. – М.: Мир, 1983.
3. *Боголюбов Н.Н.* Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – М.: Наука, 1976.
4. *Боголюбов Н.Н.* Квантовые поля / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – М.: Наука, 1980.
5. *Горбунов Д.С.* Введение в теорию ранней вселенной / Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. – М.: изд-во ИЯИ РАН, 2007.
6. *Ициксон К.* Квантовая теория поля / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. В 2 т. Т.I. – М.: Мир, 1984.
7. *Казаков Д.И.* Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля / Д.И. Казаков, Д.В. Ширков. – Дубна: ОИЯИ, 1980.
8. *Казаков Д.И.* Радиационные поправки, расходимости, регуляризация, ренормировка, ренормгруппа и все-такое в примерах в квантовой теории поля / Д.И. Казаков, Д.В. Ширков. – Дубна: ОИЯИ, 2008.
9. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.I Классическая механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 1988.
10. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.II Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 1988.
11. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. В 10 т. Т.III Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 1988.
12. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. В 10 т. Т.IV Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Физматлит, 1989.

13. *Наумов Д.В.* Фейнмановские диаграммы для экспериментаторов / Д.В. Наумов. – Дубна: Лаборатория Ядерных проблем ОИЯИ, 2008.
14. *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки / Л.Б. Окунь. – М.: Физматлит, 1990.
15. *Окунь Л.Б.* Слабое взаимодействие элементарных частиц / Л.Б. Окунь. – М.: Физматлит, 1963.
16. *Пескин М.Е.* Введение в квантовую теорию поля / М.Е. Пескин, Д.В. Шрёдер. – Ижевск: РХД, 2001.
17. *Ребенко О.Л.* Основи сучасної теорії взаємодіючих квантованих полів / О.Л. Ребенко. – К.: Наукова думка, 2007.
18. *Райдер Л.* Квантовая теория поля / Л. Райдер. – Волгоград: ПЛАТОН, 1998.
19. *Ситенко О.Г.* Теорія розсіяння / О.Г. Ситенко. – К.: Либідь, 1993.
20. *Строковский Е.А.* Лекции по основам кинематики элементарных процессов / Е.А. Строковский – М.: Университетская книга, 2010.
21. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля / С. Швебер. – М.: изд-во Ин. Лит., 1963.
22. *American Super-K* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://neutrino.phys.washington.edu/~superk/>
23. *Particle Data Group* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://pdg.lbl.gov>
24. *Bilenky S.M.* Massive neutrinos and neutrino oscillations / S.M. Bilenky and S.T. Petcov // *Rev. Mod. Phys.*, 1987. – Vol.59, №3, Part 1.
25. *Greiner W.* Quantum electrodynamics / W. Greiner and J. Reinhardt // Springer, 2003.

- 
26. *Greiner W. and Reinhardt J.* Field quantization / W. Greiner and J. Reinhardt // Springer, 1996.
  27. *Radovanovic V.* Problem Book Quantum Field Theory / V. Radovanovic // Springer, 2006.