

Feynman Vorlesungen
über Physik

The **Feynman**
LECTURES ON PHYSICS

Band II, Teil 2

Volume II, Part 2

HAUPTSÄCHLICH ELEKTROMAGNETISMUS
UND STRUKTUR DER MATERIE

MAINLY ELECTROMAGNETISM
AND MATTER

Deutsche Übersetzung:
DR. MARLIS MITTER

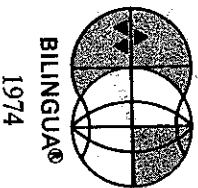
RICHARD P. FEYNMAN
*Richard Chace Tolman Professor of Theoretical Physics
California Institute of Technology*


Wissenschaftlicher Berater:
PROF. DR. HEINRICH MITTER
*Institut für theoretische Physik,
Universität Tübingen*


ROBERT B. LEIGHTON
*Professor of Physics
California Institute of Technology*

MATTHEW SANDS
*Professor
Stanford University*

Mit 262 Figuren
und 15 Tabellen




R. OLDENBOURG VERLAG
München · Wien 1974


ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY
Reading, Massachusetts · London
Menlo Park, California · Don Mills, Ontario

der Aerodynamik Objekte, die für kleinere Geschwindigkeiten gebaut sind, mit Überschallgeschwindigkeit fliegen lassen wollen, so geht das nicht. Das bedeutet nicht, daß es da eine große „Barriere“ gibt; es bedeutet nur, daß das Objekt anders konstruiert werden muß. Genauso wird diese Spule, die als „Induktivität“ konstruiert wurde, bei hohen Frequenzen nicht als gute Induktivität funktionieren, sondern als irgendwie anders. Für hohe Frequenzen müssen wir eine andere Art Induktivität konstruieren.

23-2 Ein Kondensator bei hohen Frequenzen

Nun wollen wir das Verhalten eines Kondensators — eines geometrisch idealen Kondensators — bei immer höheren Frequenzen untersuchen, um so die Änderung seiner Eigenschaften zu sehen. (Wir betrachten lieber einen Kondensator als eine Induktivität, weil die Geometrie eines Plattenpaares viel weniger kompliziert als die einer Spule ist.) Wir betrachten den in Fig. 23-4 (a) dargestellten Kondensator, der aus zwei parallelen kreisförmigen Platten besteht, die über ein Paar von Drähten mit einem äußeren Generator verbunden sind. Laden wir den Kondensator mit Gleichstrom, so tritt auf einer Platte eine positive und auf der anderen eine negative Ladung auf; zwischen den Platten gibt es ein gleichförmiges elektrisches Feld.

happens in all subjects. In aerodynamics, if you try to make things go faster than the speed of sound when they were designed for lower speeds, they don't work. It doesn't mean that there is a great "barrier" there; it just means that the object should be redesigned. So this coil which we designed as an "inductance" is not going to work as a good inductance, but as some other kind of thing at very high frequencies. For high frequencies, we have to find a new design.

23-2 A capacitor at high frequencies

Now we want to discuss in detail the behavior of a capacitor—a geometrically ideal capacitor—as the frequency gets larger and larger, so we can see the transition of its properties. (We prefer to use a capacitor instead of an inductance, because the geometry of a pair of plates is much less complicated than the geometry of a coil.) We consider the capacitor shown in Fig. 23-4(a), which consists of two parallel circular plates connected to an external generator by a pair of wires. If we charge the capacitor with DC, there will be a positive charge on one plate and a negative charge on the other; and there will be a uniform electric field between the plates.

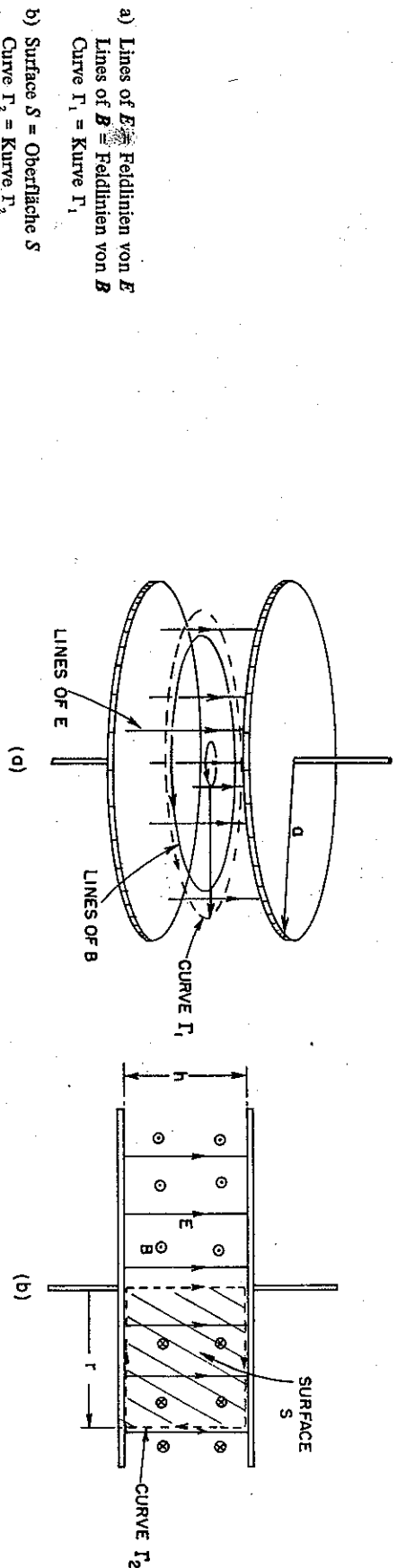


Fig. 23-4. Das elektrische und magnetische Feld zwischen den Platten eines Kondensators.

Fig. 23-4. The electric and magnetic fields between the plates of a capacitor.

Legen wir nun statt einer Gleichspannung eine Wechselfspannung niedriger Frequenz an die Platten an. (Wir werden später sehen, was „niedrig“ und was „hoch“ bedeutet.) Wir verbinden beispielsweise den Kondensator mit einem Niederfrequenzgenerator. Ändert sich die Spannung, so wird positive Ladung an der oberen Platte entfernt und negative Ladung hingebacht. Während das passiert, verschwindet das elektrische Feld und wird dann in umgekehrter Richtung aufgebaut. Schwankt die Ladung langsam hin und her, so folgt ihr das elektrische Feld. In jedem Augenblick ist das elektrische Feld, wie in Fig. 23-4 (b) gezeigt, mit Ausnahme einiger Rand-

Now suppose that instead of DC, we put an AC of low frequency on the plates. (We will find out later what is "low" and what is "high".) Say we connect the capacitor to a lower-frequency generator. As the voltage alternates, the positive charge on the top plate is taken off and negative charge is put on. While that is happening, the electric field disappears and then builds up in the opposite direction. As the charge sloshes back and forth slowly, the electric field follows. At each instant the electric field is uniform, as shown in Fig. 23-4(b), except for some edge

effekte, die wir vernachlässigen werden, homogen. Wir können den Betrag der elektrischen Feldstärke in der Form schreiben

wobei E_0 konstant ist.

Bleibt das richtig, wenn die Frequenz höher wird? Nein, weil es durch jede Schleife wie Γ_1 in Fig. 23-4 (a) einen Fluß des elektrischen Feldes gibt, wenn die elektrische Feldstärke zunimmt und abfällt. Und weil, wie Sie wissen, ein veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld hervorruft. Eine der Maxwell-Gleichungen besagt, daß es ein Linienintegral der magnetischen Feldstärke geben muß, wenn ein veränderliches elektrisches Feld auftritt, wie das hier der Fall ist. Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke um einen geschlossenen Ring, multipliziert mit c^2 , ist gleich der zeitlichen Änderungsrate des elektrischen Flusses durch die Fläche innerhalb des Ringes (wenn es da keine Ströme gibt):

$$\text{inside} = \text{innerhalb von}$$

Wie stark ist also das Magnetfeld? Das ist nicht schwer zu finden. Betrachten wir die Schleife Γ_1 , die von einem Kreis mit dem Radius r gebildet wird. Aus der Symmetrie können wir sehen, daß das Magnetfeld, wie in der Figur gezeigt, kreisförmig verläuft. Das Linienintegral von B ist dann $2\pi rB$. Da das elektrische Feld homogen ist, beträgt sein Fluß einfach E mal πr^2 , der Fläche des Kreises:

Die Zeitableitung von E ist für unser Wechselfeld einfach $i\omega E_0 e^{i\omega t}$. Unser Kondensator hat daher das Magnetfeld

Mit anderen Worten, das Magnetfeld oszilliert ebenfalls und seine Feldstärke ist proportional r .

Was wird dadurch bewirkt? Gibt es ein veränderliches Magnetfeld, so treten induzierte elektrische Felder auf und der Kondensator fängt an, ein wenig als Induktivität zu wirken. Wächst die Frequenz, so wird das Magnetfeld stärker; es ist proportional der Änderungsrate von E und daher proportional ω . Die Impedanz des Kondensators ist nicht mehr einfach gleich $1/i\omega C$.

Lassen wir die Frequenz weiterhin anwachsen und untersuchen genauer, was passiert. Wir haben ein hin- und herschwingendes Magnetfeld. Dann kann aber das elektrische Feld nicht, wie wir angenommen haben, gleichförmig sein! Gibt es ein veränderliches Magnetfeld, so muß ein Linienintegral der elektrischen Feldstärke vorhanden sein — wegen des Faraday'schen Gesetzes. Ist daher ein beträchtliches Magnetfeld vorhanden, wie es bei hohen Frequenzen aufzutreten beginnt, so kann die elektrische Feldstärke nicht in allen Abständen vom Mittelpunkt gleich groß sein. Die elektrische Feldstärke muß sich mit r so ändern, daß ihr Linienintegral dem veränderlichen Fluß des Magnetfeldes gleich sein kann.

effects which we are going to disregard. We can write the magnitude of the electric field as

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

where E_0 is a constant.

Now will that continue to be right as the frequency goes up? No, because as the electric field is going up and down, there is a flux of electric field through any loop like Γ_1 in Fig. 23-4(a). And, as you know, a changing electric field acts to produce a magnetic field. One of Maxwell's equations says that when there is a varying electric field, as there is here, there has got to be a line integral of the magnetic field. The integral of the magnetic field around a closed ring, multiplied by c^2 , is equal to the time rate-of-change of the electric flux through the area inside the ring (if there are no currents):

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{inside } \Gamma_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a}. \quad (23.3)$$

So how much magnetic field is there? That's not very hard. Suppose that we take the loop Γ_1 , which is a circle of radius r . We can see from symmetry that the magnetic field goes around as shown in the figure. Then the line integral of B is $2\pi rB$. And, since the electric field is uniform, the flux of the electric field is simply E multiplied by πr^2 , the area of the circle:

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

The derivative of E with respect to time is, for our alternating field, simply $i\omega E_0 e^{i\omega t}$. So we find that our capacitor has the magnetic field

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

In other words, the magnetic field also oscillates and has a strength proportional to r .

What is the effect of that? When there is a magnetic field that is varying, there will be induced electric fields and the capacitor will begin to act a little bit like an inductance. As the frequency goes up, the magnetic field gets stronger; it is proportional to the rate of change of E , and so to ω . The impedance of the capacitor will no longer be simply $1/i\omega C$.

Let's continue to raise the frequency and to analyze what happens more carefully. We have a magnetic field that goes sloshing back and forth. But then the electric field cannot be uniform, as we have assumed! When there is a varying magnetic field, there must be a line integral of the electric field—because of Faraday's law. So if there is an appreciable magnetic field, as begins to happen at high frequencies, the electric field cannot be the same at all distances from the center. The electric field must change with r so that the line integral of the electric field can equal the changing flux of the magnetic field.

Sehen wir nun können wir tun, in wir ursprünglich E Feld E_0 , da es im

wobei E_0 die Konstanten wir das Feld i ren), so daß im M Zur Berechnung:

Die Integrale sind den, die entlang r nach außen, verläuft von E_0 , um die beträgt genau $-E$ E positiv, wenn es B , die wir mit Hilfe Fig. 23-4 (b) erhält beträgt $B(r) \cdot 2\pi r$.

Setzen wir $-\partial/\partial t$

Beachten Sie, daß ab. Benutzen wir

Die Zeitableitung

Wie erwartet trachtet abzusetzen. Das k

itude of the electric
(23.2)

up? No, because as
electric field through any
that when there is a
line integral of the
osed ring, multiplied
ux through the area

(23.3)

Suppose that we take
n symmetry that the
line integral of B is
electric field is simply

(23.4)

(23.5)

strength proportional
that is varying, there
act a little bit like an
is stronger; it is pro-
ance of the capacitor
t happens more care-
forth. But then the
in there is a varying
-because of Faraday's
o happen at high fre-
from the center. The
the electric field can

23-5

Sehen wir nach, ob wir das richtige elektrische Feld herausfinden können. Das können wir tun, indem wir eine „Korrektur“ zu dem homogenen Feld berechnen, das wir ursprünglich für kleine Frequenzen angenommen haben. Wir nennen das homogene Feld E_1 , da es immer noch die Form $E_0 e^{i\omega t}$ hat und schreiben das richtige Feld als

wobei E_2 die Korrektur infolge des veränderlichen Magnetfeldes ist. Für jedes ω schreiben wir das Feld in der Mitte des Kondensators als $E_0 e^{i\omega t}$ (wodurch wir E_0 definieren), so daß im Mittelpunkt keine Korrektur auftritt; $E_2 = 0$ in $r = 0$.

Zur Berechnung von E_2 verwenden wir die Integralform des Faraday'schen Gesetzes:

$$(\text{Fluß von } B)$$

Die Integrale sind einfach, wenn wir sie für die in Fig. 23-4 (b) gezeigte Kurve Γ_2 bilden, die entlang der Achse nach oben, dann radial entlang der oberen Platte eine Strecke r nach außen, vertikal zur unteren Platte und zurück zur Achse verläuft. Das Linieneintegral von E_1 um diese Kurve ist natürlich Null; daher trägt nur E_2 bei, und sein Integral beträgt genau $-E_2(r) \cdot h$, wobei h der Abstand zwischen den Platten ist. (Wir nennen E positiv, wenn es nach oben zeigt.) Das ist gleich der Änderungsrate des Flusses von B , die wir mit Hilfe eines Integrals über die schraffierte Fläche S innerhalb von Γ_2 in Fig. 23-4 (b) erhalten müssen. Der Fluß durch einen vertikalen Streifen der Breite dr beträgt $B(r)h dr$ und daher ist der gesamte Fluß

Setzen wir $-\partial/\partial t$ des Flusses gleich dem Linieneintegral von E_2 , so erhalten wir

Beachten Sie, daß h herausfällt; die Feldstärken hängen nicht vom Abstand der Platten ab. Benutzen wir Gl. (23.5) für $B(r)$, so erhalten wir

Die Zeitableitung führt zu einem weiteren Faktor $i\omega$; wir erhalten

Wie erwartet trachtet das induzierte Feld, die elektrische Feldstärke weiter außen herabzusetzen. Das korrigierte Feld $E = E_1 + E_2$ ist dann

Let's see if we can figure out the correct electric field. We can do that by computing a "correction" to the uniform field we originally assumed for low frequencies. Let's call the uniform field E_1 , which will still be $E_0 e^{i\omega t}$, and write the correct field as

$$E = E_1 + E_2,$$

where E_2 is the correction due to the changing magnetic field. For any ω we will write the field at the center of the condenser as $E_0 e^{i\omega t}$ (thereby defining E_0), so that we have no correction at the center; $E_2 = 0$ at $r = 0$.

To find E_2 we can use the integral form of Faraday's law:

$$\oint_{\Gamma} E \cdot ds = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{Flux of } B).$$

The integrals are simple if we take them for the curve Γ_2 shown in Fig. 23-4(b), which goes up along the axis, out radially the distance r along the top plate, down vertically to the bottom plate, and back to the axis. The line integral of E_1 around this curve is, of course, zero; so only E_2 contributes, and its integral is just $-E_2(r) \cdot h$, where h is the spacing between the plates. (We call E positive if it points upward.) This is equal to the rate of change of the flux of B , which we have to get by an integral over the shaded area S inside Γ_2 in Fig. 23-4(b). The flux through a vertical strip of width dr is $B(r)h dr$, so the total flux is

$$h \int B(r) dr.$$

Setting $-\partial/\partial t$ of the flux equal to the line integral of E_2 , we have

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$

Notice that the h cancels out; the fields don't depend on the separation of the plates. Using Eq. (23.5) for $B(r)$, we have

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} i\omega r^2 E_0 e^{i\omega t}.$$

The time derivative just brings down another factor $i\omega$; we get

$$E_2(r) = - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

As we expect, the induced field tends to reduce the electric field farther out. The corrected field $E = E_1 + E_2$ is then

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

23-6

Fig. 23-5. Das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten bei hohen Frequenzen. (Randeffekte sind vernachlässigt.)

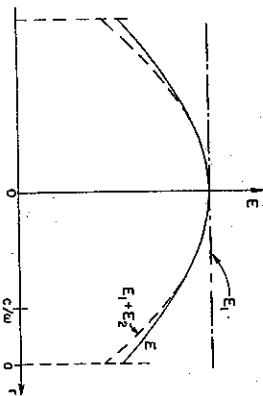


Fig. 23-5. The electric field between the capacitor plates at high frequency. (Edge effects are neglected.)

Das elektrische Feld im Kondensator ist nicht mehr homogen; es hat die parabolische Form, die durch die unterbrochene Linie in Fig. 23-5 dargestellt ist. Sie sehen, daß unser einfacher Kondensator etwas kompliziert wird.

Wir könnten nun unsere Resultate dazu verwenden, die Impedanz des Kondensators bei hohen Frequenzen auszurechnen. Da wir das elektrische Feld kennen, könnten wir die Ladungen auf den Platten berechnen und herausfinden, wie der Strom durch den Kondensator von der Frequenz ω abhängt; das soll uns aber jetzt nicht beschäftigen. Wir interessieren uns mehr dafür zu sehen, was passiert, wenn wir die Frequenz weiter steigern — damit wir feststellen, was bei noch höheren Frequenzen vorgeht. Sind wir nicht bereits fertig? Nein, weil wir das elektrische Feld korrigiert haben, was bedeutet, daß das berechnete Magnetfeld nicht mehr stimmt. Das Magnetfeld aus Gl. (23.5) ist näherungsweise richtig, es handelt sich aber nur um eine erste Näherung. Wir sollten daher Gl. (23.5) in der Form schreiben

$$\text{(Fluß von } E_2 \text{ durch } \Gamma_1 \text{)}$$

Sie erinnern sich daran, daß dieses Feld durch die Änderung von E_1 hervorgerufen wurde. Das richtige Magnetfeld wird das vom gesamten elektrischen Feld $E_1 + E_2$ hervorgerufen sein. Schreiben wir das Magnetfeld als $B = B_1 + B_2$; so ist der zweite Term gerade das von E_2 hervorgerufene Zusatzfeld. Um B_2 zu finden, können wir dieselbe Überlegung anstellen, mit der wir B_1 ermittelt haben; das Linienelement von B_2 um die Kurve Γ_1 ist gleich der Änderungsrate des Flusses von E_2 durch Γ_1 . Wir erhalten noch einmal Gl. (23.4), wobei B durch B_2 und E durch E_2 zu ersetzen ist:

Da E_2 vom Radius abhängt, müssen wir über die Kreisfläche innerhalb Γ_1 integrieren, um den Fluß zu erhalten. Mit dem Flächenelement $2\pi r dr$ wird dieses Integral

$$\text{Damit erhalten wir für } B_2(r)$$

The electric field in the capacitor is no longer uniform; it has the parabolic shape shown by the broken line in Fig. 23-5. You see that our simple capacitor is getting slightly complicated.

We could now use our results to calculate the impedance of the capacitor at high frequencies. Knowing the electric field, we could compute the charges on the plates and find out how the current through the capacitor depends on the frequency ω , but we are not interested in that problem for the moment. We are more interested in seeing what happens as we continue to go up with the frequency — to see what happens at even higher frequencies. Aren't we already finished? No, because we have corrected the electric field, which means that the magnetic field we have calculated is no longer right. The magnetic field of Eq. (23.5) is approximately right, but it is only a first approximation. So let's call it B_1 . We should then rewrite Eq. (23.5) as

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t} \quad (23.9)$$

You will remember that this field was produced by the variation of E_1 . Now the correct magnetic field will be that produced by the total electric field $E_1 + E_2$. If we write the magnetic field as $B = B_1 + B_2$, the second term is just the additional field produced by E_2 . To find B_2 we can go through the same arguments we have used to find B_1 ; the line integral of B_2 around the curve Γ_1 is equal to the rate of change of the flux of E_2 through Γ_1 . We will just have Eq. (23.4) again with B replaced by B_2 and E replaced by E_2 :

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} \text{(Flux of } E_2 \text{ through } \Gamma_1 \text{)}$$

Since E_2 varies with radius, to obtain its flux we must integrate over the circular surface inside Γ_1 . Using $2\pi r dr$ as the element of area, this integral is

$$\int_0^r E_2(r') \cdot 2\pi r' dr' \quad (23.10)$$

So we get for $B_2(r)$

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r') r' dr'.$$

Entnehmen wir E_2 ,
lich gleich $r'/4$ ist.

Aber wir sind
tete, so haben wir
anbringen, die von
liche Korrektur der
ben Weise zusammen
nd müssen nur die

Verwenden wir um
trischen Feld

Schreiben wir unse
halten wir

Die Abhängigkeit c
Parabel, die wir in
Radien etwas oberl
Wir sind ihm
neue Korrektur zu
weitere Korrektur
Formeln, die wir b
Indizes von B und
Die nächste K

Bis zu dieser Ordn

dabei haben wir di
Reihe fortzusetzen
Unser Endres
Platten des Konde
unendlichen Reihe

electric field between plates at high frequency, neglected.) ; it has the parabolic form for simple capacitor is

ance of the capacitor compute the charges on either depends on the the moment. We are up with the frequency we already finished? ans that the magnetic field of Eq. (23.5) is o let's call it B_1 . We

$$(23.9)$$

tion of E_1 . Now the electric field $E_1 + E_2$ term is just the addition the same arguments curve Γ_1 is equal to have Eq. (23.4) again

rate over the circular integral is

$$(23.10)$$

23-7

Entnehmen wir $E_2(r)$ aus Gl. (23.7), so brauchen wir das Integral von $r^3 dr$, das natürlich gleich $r^4/4$ ist. Unsere Korrektur zum Magnetfeld wird

Aber wir sind immer noch nicht fertig. Ist das Magnetfeld nicht das zuerst Vermutete, so haben wir E_2 nicht richtig berechnet. Wir müssen eine weitere Korrektur an E_2 anbringen, die von dem zusätzlichen Magnetfeld B_2 herrührt. Nennen wir diese zusätzliche Korrektur des elektrischen Feldes E_3 . Sie hängt mit dem Magnetfeld B_2 in derselben Weise zusammen wie E_2 mit B_1 . Wir können Gl. (23.6) noch einmal verwenden und müssen nur die Indizes ändern:

Verwenden wir unser Resultat Gl. (23.11) für B_2 , so wird die neue Korrektur zum elektrischen Feld

Schreiben wir unser doppelt korrigiertes elektrisches Feld als $E = E_1 + E_2 + E_3$, so erhalten wir

Die Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke vom Radius ist nicht mehr die einfache Parabel, die wir in Fig. 23-5 gezeichnet haben, sondern die Kurve liegt bei größeren Radien etwas oberhalb der von $(E_1 + E_2)$.

Wir sind immer noch nicht ganz fertig. Das neue elektrische Feld verursacht eine neue Korrektur zum Magnetfeld, und das neu korrigierte Magnetfeld verursacht eine weitere Korrektur des elektrischen Feldes, und so geht das weiter. Wir haben aber alle Formeln, die wir brauchen. Für B_3 können wir Gl. (23.10) verwenden, wobei wir die Indizes von B und E von 2 in 3 abändern.

Die nächste Korrektur zum elektrischen Feld ist

Bis zu dieser Ordnung beträgt also die gesamte elektrische Feldstärke

dabei haben wir die Zahlenkoeffizienten so angeschrieben, daß es klar ist, wie die Reihe fortzusetzen ist.

Unser Endresultat bedeutet also, daß die elektrische Feldstärke zwischen den Platten des Kondensators bei beliebiger Frequenz gegeben ist durch $E_0 e^{i\omega t}$ mal der unendlichen Reihe, die nur

Using $E_2(r)$ from Eq. (23.7), we need the integral of $r^3 dr$, which is, of course, $r^4/4$. Our correction to the magnetic field becomes

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

But we are still not finished! If the magnetic field B is not the same as we first thought, then we have incorrectly computed E_2 . We must make a further correction to E_2 which comes from the extra magnetic field B_2 . Let's call this additional correction to the electric field E_3 . It is related to the magnetic field B_2 in the same way that E_2 was related to B_1 . We can use Eq. (23.6) all over again just by changing the subscripts:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

Using our result, Eq. (23.11), for B_2 , the new correction to the electric field is

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

Writing our doubly corrected electric field as $E = E_1 + E_2 + E_3$, we get

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

The variation of the electric field with radius is no longer the simple parabola we drew in Fig. 23-5, but at large radii lies slightly above the curve $(E_1 + E_2)$.

We are not quite through yet. The new electric field produces a new correction to the magnetic field, and the newly corrected magnetic field will produce a further correction to the electric field, and on and on. However, we already have all the formulas that we need. For B_3 we can use Eq. (23.10), changing the subscripts of B and E from 2 to 3.

The next correction to the electric field is

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

So to this order we have that the complete electric field is given by

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^2 + \frac{1}{(2)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^4 - \frac{1}{(3)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^6 + \dots \right], \quad (23.15)$$

where we have written the numerical coefficients in such a way that it is obvious how the series is to be continued.

Our final result is that the electric field between the plates of the capacitor, for any frequency, is given by $E_0 e^{i\omega t}$ times the infinite series which contains only

23-8

die Variable $\omega r/c$ enthält. Wenn wir wollen, können wir eine spezielle Funktion, die wir $J_0(x)$ nennen, als die unendliche Reihe definieren, die in der Klammer von Gl. (23.15) auftritt:

Wir können dann unsere Lösung als $E_0 e^{i\omega t}$ mal dieser Funktion schreiben, wobei $x = \omega r/c$:

Der Grund, weshalb wir unsere spezielle Funktion J_0 genannt haben, ist natürlich, daß dies nicht das erste Mal ist, daß jemand ein Problem mit Schwingungen in einem Zylinder gelöst hat. Die Funktion ist schon vorher aufgetreten und wird üblicherweise J_0 genannt. Sie kommt immer vor, wenn Sie ein Problem von Wellen mit Zylinderdimensionen lösen. Die Funktion J_0 bedeutet für Zylinderwellen das, was die Cosinusfunktion für Wellen entlang einer geraden Linie bedeutet. Es handelt sich also um eine wichtige Funktion, die vor langer Zeit gefunden wurde. Damals verlieh ihr ein Mann namens Bessel seinen Namen. Der Index Null bedeutet, daß Bessel eine Menge verschiedener Funktionen erfunden hat, und diese ist gerade die erste davon. Die anderen Funktionen von Bessel $-J_1, J_2, \dots$ hängen mit Zylinderwellen zusammen, deren Stärke vom Winkel um die Zylinderachse abhängt.

Das vollständig korrigierte elektrische Feld zwischen den Platten unseres kreisförmigen Kondensators, das durch Gl. (23.17) gegeben ist, ist als ausgezogene Linie in Fig. 23-5 dargestellt. Für Frequenzen, die nicht zu hoch sind, war unsere zweite Näherung bereits recht gut. Die dritte Näherung war noch besser. Sie war tatsächlich so gut, daß Sie den Unterschied zwischen ihr und der ausgezogenen Kurve nicht gesehen hätten, wenn wir sie eingezeichnet hätten. Sie werden aber in nächsten Abschnitt sehen, daß die vollständige Reihe benötigt wird, wenn man eine genaue Beschreibung für große Radian oder für hohe Frequenzen erhalten will.

23-3 Ein Hohlraumresonator

Wir wollen nun nachsehen, welches elektrische Feld zwischen den Platten des Kondensators unsere Lösung ergibt, wenn wir zu immer höheren Frequenzen übergehen. Für große ω wird der Parameter $x = \omega r/c$ groß, und die ersten Glieder in der Reihe für $J_0(x)$ wachsen rasch an. Das bedeutet, daß die in Fig. 23-5 gezeichnete Parabel sich bei höheren Frequenzen steiler nach unten krümmt. Es sieht tatsächlich so aus, als ob die Feldstärke bei einer hohen Frequenz bis Null abfiel, vielleicht wenn c/ω ungefähr halb so groß wie a ist. Sehen wir nach, ob J_0 wirklich durch Null geht und negativ wird. Wir versuchen es erst mit $x = 2$:

Die Funktion ist noch nicht Null, wir versuchen es daher mit einem höheren Wert von x , beispielsweise $x = 2.5$. Wir setzen Zahlen ein und erhalten

the variable $\omega r/c$. If we wish, we can define a special function, which we will call $J_0(x)$, as the infinite series that appears in the brackets of Eq. (23.15):

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (23.16)$$

Then we can write our solution as $E_0 e^{i\omega t}$ times this function, with $x = \omega r/c$:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (23.17)$$

The reason we have called our special function J_0 is that, naturally, this is not the first time anyone has ever worked out a problem with oscillations in a cylinder. The function has come up before and is usually called J_0 . It always comes up whenever you solve a problem about waves with cylindrical symmetry. The function J_0 is to cylindrical waves what the cosine function is to waves on a straight line. So it is an important function, invented a long time ago. Then a man named Bessel got his name attached to it. The subscript zero means that Bessel invented a whole lot of different functions and this is just the first of them.

The other functions of Bessel— J_1, J_2, \dots and so on—have to do with cylindrical waves which have a variation of their strength with the angle around the axis of the cylinder.

The completely corrected electric field between the plates of our circular capacitor, given by Eq. (23.17), is plotted as the solid line in Fig. 23-5. For frequencies that are not too high, our second approximation was already quite good. The third approximation was even better—so good, in fact, that if we had plotted it, you would not have been able to see the difference between it and the solid curve. You will see in the next section, however, that the complete series is needed to get an accurate description for large radii, or for high frequencies.

23-3 A resonant cavity

We want to look now at what our solution gives for the electric field between the plates of the capacitor as we continue to go to higher and higher frequencies. For large ω , the parameter $x = \omega r/c$ also gets large, and the first few terms in the series for J_0 of x will increase rapidly. That means that the parabola we have drawn in Fig. 23-5 curves downward more steeply at higher frequencies. In fact, it looks as though the field would fall all the way to zero at some high frequency, perhaps when c/ω is approximately one-half of a . Let's see whether J_0 does indeed go through zero and become negative. We begin by trying $x = 2$:

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0.22.$$

The function is still not zero, so let's try a higher value of x , say, $x = 2.5$. Putting in numbers, we write

$$J_0(2.5) = 1 - 1.56 + 0.61 - 0.09 = -0.04.$$

23-9

Bei $x = 2.5$ ist die Funktion für $x = 2$ in Strecke von 2,5 nach ungefähr bei gleich 2,

Mit unserer zweistelligen nauer durch (oder sel so finden wir, daß sie Ihnen zu zeigen, daß nachzusehen.

Wenn wir schon die Funktion für größer Mit wachsendem x o mender Amplitude.

Wir haben das f quenzen zeigt die ek Richtung und nahe e weise ω genügend gr trägt; dann entspricht bedeutet, daß unser Rand der Platten ha gesetzten Richtung. Kondensator bei hol oszilliert die Richtu Mittelpunkt des Kor elektrischen Feldern Kondensator für hol nen, uns sogar Gedä oder wie eine Induk pliziertere Effekte a Beispiel kommt es z sogar noch komplizi diesen Effekten hier

which we will call

$$3.15) \quad + \dots \quad (23.16)$$

where $x = \omega r/c$:

$$(23.17)$$

naturally, this is not
ions in a cylinder.
always comes up
metry. The func-
ives on a straight
hen a man named
at Bessel invented
n.

o with cylindrical
round the axis of
s of our circular
Fig. 23-5. For
was already quite
ct, that if we had
etween it and the
complete series is
frequencies.

tric field between
higher frequencies.
it few terms in the
parabola we have
quencies. In fact,
the high frequency,
where J_0 does indeed
2:

$x = 2.5$. Putting

Bei $x = 2.5$ ist die Funktion J_0 bereits durch Null durchgegangen. Vergleichen wir die Resultate für $x = 2$ und $x = 2.5$, so sieht es so aus, als ob J_0 bei einem Fünftel der Strecke von 2,5 nach 2 durch Null geht. Wir vermuten also, daß die Nullstelle für x ungefähr bei gleich 2,4 auftritt. Sehen wir nach, was dieser Wert von x liefert:

Mit unserer zweistelligen Genauigkeit erhalten wir Null. Führen wir die Rechnung genauer durch (oder sehen wir in einem Buch nach, da J_0 eine bekannte Funktion ist), so finden wir, daß sie bei $x = 2,405$ durch Null geht. Wir haben das vorhergerechnet, um Ihnen zu zeigen, daß Sie diese Dinge auch selbst finden können, statt in einem Buch nachzusehen.

Wenn wir schon J_0 einem Buch entnehmen, so können wir untersuchen, wie sich die Funktion für größere Werte von x verhält; sie ist in Fig. 23-6 graphisch dargestellt. Mit wachsendem x oszilliert $J_0(x)$ zwischen positiven und negativen Werten mit abnehmender Amplitude.

Fig. 23-6. Die Bessel-Funktion $J_0(x)$.

Wir haben das folgende interessante Resultat erhalten: Bei genügend hohen Frequenzen zeigt die elektrische Feldstärke in der Mitte unseres Kondensators in einer Richtung und nahe am Rand in der entgegengesetzten Richtung. Nehmen wir beispielsweise ω genügend groß, so daß $x = \omega r/c$ am äußeren Rand des Kondensators 4 beträgt; dann entspricht der Rand des Kondensators der Abszisse $x = 4$ in Fig. 23-6. Das bedeutet, daß unser Kondensator mit der Frequenz $\omega = 4c/a$ betrieben wird. Am Rand der Platten hat das elektrische Feld einen ziemlich hohen Wert in der entgegengesetzten Richtung, als wir erwarten würden. Dieses schlimme Ereignis kann einem Kondensator bei hohen Frequenzen passieren. Machen wir die Frequenz sehr hoch, so oszilliert die Richtung des elektrischen Feldes viele Male hin und her, wenn wir vom Mittelpunkt des Kondensators nach außen gehen. Außerdem gibt es die mit diesen elektrischen Feldern verknüpften Magnetfelder. Es ist nicht überraschend, daß unser Kondensator für hohe Frequenzen nicht wie eine ideale Kapazität aussieht. Wir beginnen, uns sogar Gedanken darüber zu machen, ob er sich mehr wie ein Kondensator oder wie eine Induktivität benimmt. Es muß betont werden, daß es sogar noch kompliziertere Effekte am Rand des Kondensators gibt, die wir vernachlässigt haben. Zum Beispiel kommt es zur Ausstrahlung von Wellen von den Rändern, so daß die Felder sogar noch komplizierter sind als jene, die wir berechnet haben; wir wollen uns mit diesen Effekten hier nicht befassen.

The function J_0 has already gone through zero by the time we get to $x = 2.5$. Comparing the results for $x = 2$ and $x = 2.5$, it looks as though J_0 goes through zero at one-fifth of the way from 2.5 to 2. We would guess that the zero occurs for x approximately equal to 2.4. Let's see what that value of x gives:

$$J_0(2.4) = 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0.00.$$

We get zero to the accuracy of our two decimal places. If we make the calculation more accurate (or since J_0 is a well-known function, if we look it up in a book), we find that it goes through zero at $x = 2.405$. We have worked it out by hand to show you that you too could have discovered these things rather than having to borrow them from a book.

As long as we are looking up J_0 in a book, it is interesting to notice how it goes for larger values of x ; it looks like the graph in Fig. 23-6. As x increases, $J_0(x)$ oscillates between positive and negative values with a decreasing amplitude of oscillation.

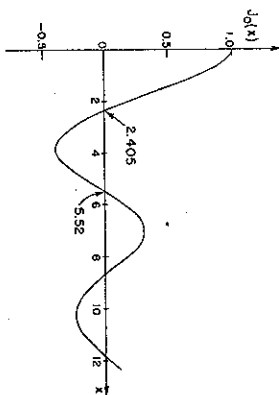


Fig. 23-6. The Bessel function $J_0(x)$.

We have gotten the following interesting result: If we go high enough in frequency, the electric field at the center of our condenser will be one way and the electric field near the edge will point in the opposite direction. For example, suppose that we take an ω high enough so that $x = \omega r/c$ at the outer edge of the capacitor is equal to 4; then the edge of the capacitor corresponds to the abscissa $x = 4$ in Fig. 23-6. This means that our capacitor is being operated at the frequency $\omega = 4c/a$. At the edge of the plates, the electric field will have a rather high magnitude opposite the direction we would expect. That is the terrible thing that can happen to a capacitor at high frequencies. If we go to very high frequencies, the direction of the electric field oscillates back and forth many times as we go out from the center of the capacitor. Also there are the magnetic fields associated with these electric fields. It is not surprising that our capacitor doesn't look like the ideal capacitance for high frequencies. We may even start to wonder whether it looks more like a capacitor or an inductance. We should emphasize that there are even more complicated effects that we have neglected which happen at the edges of the capacitor. For instance, there will be a radiation of waves out past the edges, so the fields are even more complicated than the ones we have computed, but we will not worry about those effects now.

Wir könnten eine äquivalente Schaltung für den Kondensator herausfinden; vielleicht ist es aber besser, einfach festzustellen, daß der für niederfrequente Felder konstruierte Kondensator einfach nicht mehr zufriedenstellend ist, wenn die Frequenz zu hoch ist. Wollen wir die Wirkungsweise eines solchen Objekts bei hohen Frequenzen untersuchen, so müssen wir die Näherungen aufgeben, die wir an den Maxwell-Gleichungen zur Behandlung von Schaltungen angebracht haben und müssen zu dem ganzen Gleichungssystem zurückkehren, das die Felder im Raum vollständig beschreibt. Statt uns mit idealisierten Schaltelementen zu befassen, müssen wir die wirklichen Leiter, wie sie sind, hinnehmen und alle Felder im dazwischenliegenden Raum berücksichtigen. Wollen wir zum Beispiel einen Resonanzkreis bei hohen Frequenzen erhalten, so werden wir ihn nicht mit Hilfe einer Spule und einem Plattenkondensator zu konstruieren versuchen.

We could try to figure out an equivalent circuit for the capacitor, but perhaps it is better if we just admit that the capacitor we have designed for low-frequency fields is just no longer satisfactory when the frequency is too high. If we want to treat the operation of such an object at high frequencies, we should abandon the approximations to Maxwell's equations that we have made for treating circuits and return to the complete set of equations which describe completely the fields in space. Instead of dealing with idealized circuit elements, we have to deal with the real conductors as they are, taking into account all the fields in the spaces in between. For instance, if we want a resonant circuit at high frequencies we will not try to design one using a coil and a parallel-plate capacitor.

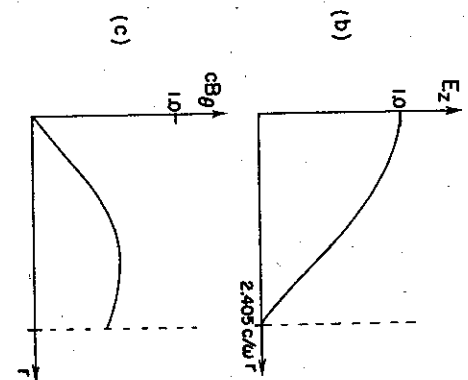
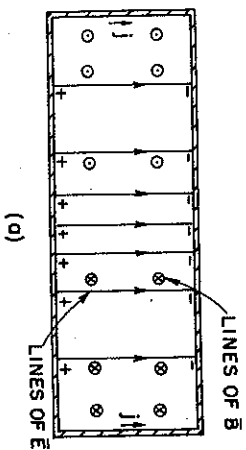


Fig. 23-7. Das elektrische und magnetische Feld im Innern einer geschlossenen zylindrischen Dose.

Fig. 23-7. The electric and magnetic fields in an enclosed cylindrical con.

Lines of \vec{B} = Feldlinien von \vec{B}
Lines of \vec{E} = Feldlinien von \vec{E}

Wir haben bereits erwähnt, daß der untersuchte Plattenkondensator gewisse Merkmale eines Kondensators und einer Induktivität aufweist. Infolge des elektrischen Feldes gibt es Ladungen auf den Platten und infolge des Magnetfeldes gibt es induzierte EMK's. Ist es möglich, daß bereits ein Resonanzkreis vorliegt? Das ist tatsächlich der Fall. Wählen wir eine Frequenz, für die das elektrische Feld bei einem Radius innerhalb des Randes der Platten auf Null abfällt; das heißt, wir wählen $\omega a/c$ größer als 2,405. Das elektrische Feld verschwindet überall auf einem Kreis.

We have already mentioned that the parallel-plate capacitor we have been analyzing has some of the aspects of both a capacitor and an inductance. With the electric field there are charges on the surfaces of the plates, and with the magnetic fields there are back emf's. Is it possible that we already have a resonant circuit? We do indeed. Suppose we pick a frequency for which the electric field pattern falls to zero at some radius inside the edge of the disc; that is, we choose $\omega a/c$ greater than 2.405. Everywhere on a circle coaxial with the plates the electric field

der mit den Platten k
daraus einen Streifen,
sators zu passen. Dan
Radius verläuft, an d
schen Felder gibt, die
dieser Stelle anbringe
Wir konnten also den
ten Sie, was wir erha
schen und magnetisch
Felder im Innern änd
unserer Dose wegsch
bleibt, ist die in Fig.
tischen Feldern im I
die, vergessen wir da
des schwingenden E -
das in Fig. 23-7 (b)
der Bessel-Funktion
mig um die Achse wi
schiebung schwingt.

Wir können au
23-7 (c) gezeigt, gr
Wie kommt es,
äußere Anschlüsse a
magnetischen Felder
und das veränderlich
Magnetfeld hat ind
ter, zusammen bew
Bedingungen nur de
Für eine Dose mit
magnetischen Felde
dieser speziellen Fr
Resonanz bei der F

Wir haben ges
die Dose vollständi
lich, wenn die Wärm
ren jedoch die oszi
folge des Widerstan
langsam ab. Wir kö
schen Feldern im
vertikale elektrisch
eine grobe Diverge
gative Ladungen a
Feld um, so musse
Boden der Dose e
gen in der Seiten
hen, daß in der St
was mit dem Mag

actor, but perhaps
for low-frequency
igh. If we want to
ould abandon the
or treating circuits
mpletely the fields
have to deal with
ds in the spaces in
requencies we will

der mit den Platten koaxial ist. Wir nehmen nun ein dünnes Metallblech und schneiden daraus einen Streifen, der gerade breit genug ist, um zwischen die Platten des Kondensators zu passen. Dann biegen wir ihn zu einem Zylinder zusammen, der entlang des Radius verläuft, an dem das elektrische Feld verschwindet. Weil es da keine elektrischen Felder gibt, fließen in dem leitenden Zylinder keine Ströme, wenn wir ihn an dieser Stelle anbringen; die elektrischen und magnetischen Felder ändern sich nicht. Wir können also den Kondensator kurzschließen, ohne daß sich etwas ändert. Beachten Sie, was wir erhalten haben: eine geschlossene zylinderförmige Dose mit elektrischen und magnetischen Feldern im Innern ohne Verbindung mit der Außenwelt. Die Felder im Innern ändern sich sogar dann nicht, wenn wir die Plattenränder außerhalb unserer Dose wegschneiden und ebenso die Zuleitungen zum Kondensator. Was übrigbleibt, ist die in Fig. 23-7 (a) gezeigte geschlossene Dose mit elektrischen und magnetischen Feldern im Innern. Die elektrischen Felder oszillieren mit der Frequenz ω — die, vergessen wir das nicht, den Durchmesser der Dose bestimmt hat. Die Amplitude des schwingenden E -Feldes ändert sich mit dem Abstand von der Achse der Dose, wie das in Fig. 23-7 (b) graphisch dargestellt ist. Diese Kurve ist gerade der erste Bogen der Bessel-Funktion nullter Ordnung. Es gibt auch ein magnetisches Feld, das kreisförmig um die Achse verläuft und gegenüber dem elektrischen Feld mit 90° Phasenverschiebung schwingt.

Wir können auch eine Reihe für das Magnetfeld anschieben und es, wie in Fig. 23-7 (c) gezeigt, graphisch darstellen.

Wie kommt es, daß im Innern einer Dose elektrische und magnetische Felder ohne äußere Anschlüsse auftreten können? Das kommt daher, daß sich die elektrischen und magnetischen Felder gegenseitig aufrecht erhalten: das veränderliche E erzeugt ein B und das veränderliche B erzeugt ein E — alles gemäß den Maxwell-Gleichungen. Das Magnetfeld hat induktiven Charakter und das elektrische Feld hat kapazitiven Charakter; zusammen bewirken sie so etwas wie einen Resonanzkreis. Beachten Sie, daß diese Bedingungen nur dann eintreten, wenn der Radius der Dose genau $2,405 c/\omega$ beträgt. Für eine Dose mit vorgegebenem Radius erhalten die oszillierenden elektrischen und magnetischen Felder einander aufrecht — in der beschriebenen Weise — aber nur bei dieser speziellen Frequenz. Daher ist eine zylinderförmige Dose mit dem Radius r in Resonanz bei der Frequenz

$$\omega_0 = 2,405 \frac{c}{r} \quad (23.18)$$

Wir haben gesagt, daß die Felder in der gleichen Weise weiterschwingen, nachdem die Dose vollständig geschlossen wurde. Das ist nicht genau richtig. Es wäre nur möglich, wenn die Wände der Dose perfekte Leiter wären. Für eine wirkliche Dose verleiht jedoch die Widerstand des Materials Energie. Die Schwingungen der Felder klingen langsam ab. Wir können aus Fig. 23-7 sehen, daß mit den elektrischen und magnetischen Feldern innerhalb des Hohlraums starke Ströme verknüpft sein müssen. Da das vertikale elektrische Feld am Deckel und Boden der Dose jäh verschwindet, hat es dort eine große Divergenz; es müssen daher auf den Innenwänden der Dose positive und negative Ladungen auftreten, wie in Fig. 23-7 (a) gezeigt ist. Kehrt sich das elektrische Feld um, so müssen sich auch die Ladungen umkehren, so daß zwischen Deckel und Boden der Dose ein Wechselstrom auftreten muß. Die entsprechenden Ladungen fließen in der Seitenwand der Dose, wie in der Figur gezeigt ist. Wir können auch einsehen, daß in der Seitenwand der Dose Ströme auftreten müssen, indem wir betrachten, was mit dem Magnetfeld passiert. Der Graph von Fig. 23-7 (c) zeigt uns, daß

will be zero. Now suppose we take a thin metal sheet and cut a strip just wide enough to fit between the plates of the capacitor. Then we bend it into a cylinder that will go around at the radius where the electric field is zero. Since there are no electric fields there, when we put this conducting cylinder in place, no currents will flow in it; and there will be no changes in the electric and magnetic fields. We have been able to put a direct short circuit across the capacitor without changing anything. And look what we have; we have a complete cylindrical can with electrical and magnetic fields inside and no connection at all to the outside world. The fields inside won't change even if we throw away the edges of the plates outside our can, and also the capacitor leads. All we have left is a closed can with electric and magnetic fields inside, as shown in Fig. 23-7(a). The electric fields are oscillating back and forth at the frequency ω —which, don't forget, determined the diameter of the can. The amplitude of the oscillating E field varies with the distance from the axis of the can, as shown in the graph of Fig. 23-7(b). This curve is just the first arch of the Bessel function of zero order. There is also a magnetic field which goes in circles around the axis and oscillates in time 90° out of phase with the electric field.

We can also write out a series for the magnetic field and plot it, as shown in the graph of Fig. 23-7(c).

How is it that we can have an electric and magnetic field inside a can with no external connections? It is because the electric and magnetic fields maintain themselves: the changing E makes a B and the changing B makes an E —all according to the equations of Maxwell. The magnetic field has an inductive aspect, and the electric field a capacitive aspect; together they make something like a resonant circuit. Notice that the conditions we have described would only happen if the radius of the can is exactly $2,405 c/\omega$. For a can of a given radius, the oscillating electric and magnetic fields will maintain themselves—in the way we have described—only at that particular frequency. So a cylindrical can of radius r is resonant at the frequency

We have said that the fields continue to oscillate in the same way after the can is completely closed. That is not exactly right. It would be possible if the walls of the can were perfect conductors. For a real can, however, the oscillating currents which exist on the inside walls of the can lose energy because of the resistance of the material. The oscillations of the fields will gradually die away. We can see from Fig. 23-7 that there must be strong currents associated with electric and magnetic fields inside the cavity. Because the vertical electrical field stops suddenly at the top and bottom plates of the can, it has a large divergence there; so there must be positive and negative electric charges on the inner surfaces of the can, as shown in Fig. 23-7(a). When the electric field reverses, the charges must reverse also, so there must be an alternating current between the top and bottom plates of the can. These charges will flow in the sides of the can, as shown in the figure. We can also see that there must be currents in the sides of the can by considering what happens to the magnetic field. The graph of Fig. 23-7(c) tells us that the

