



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN



DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG

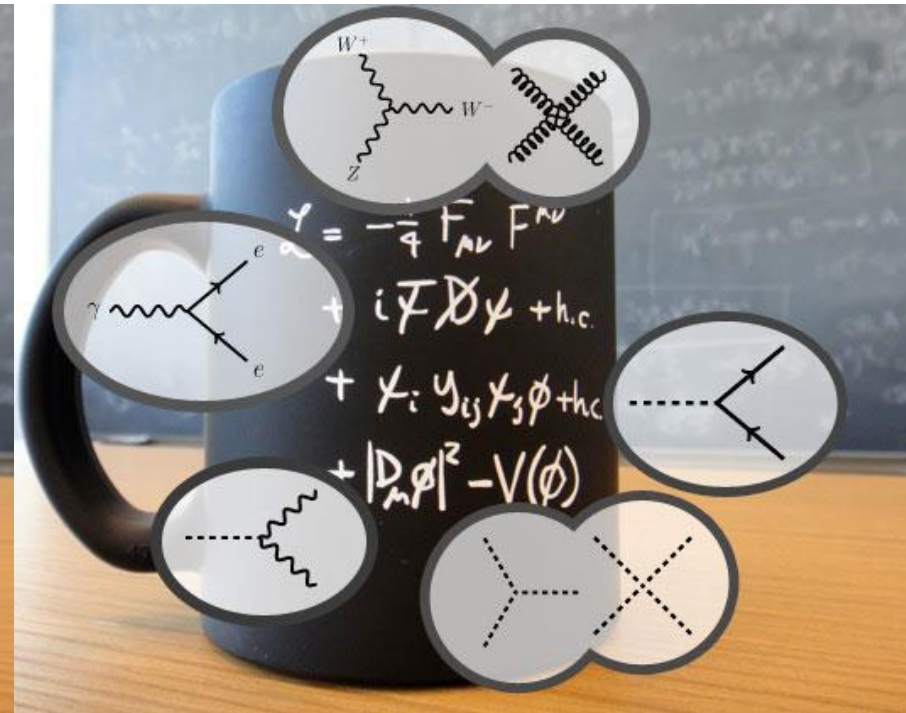
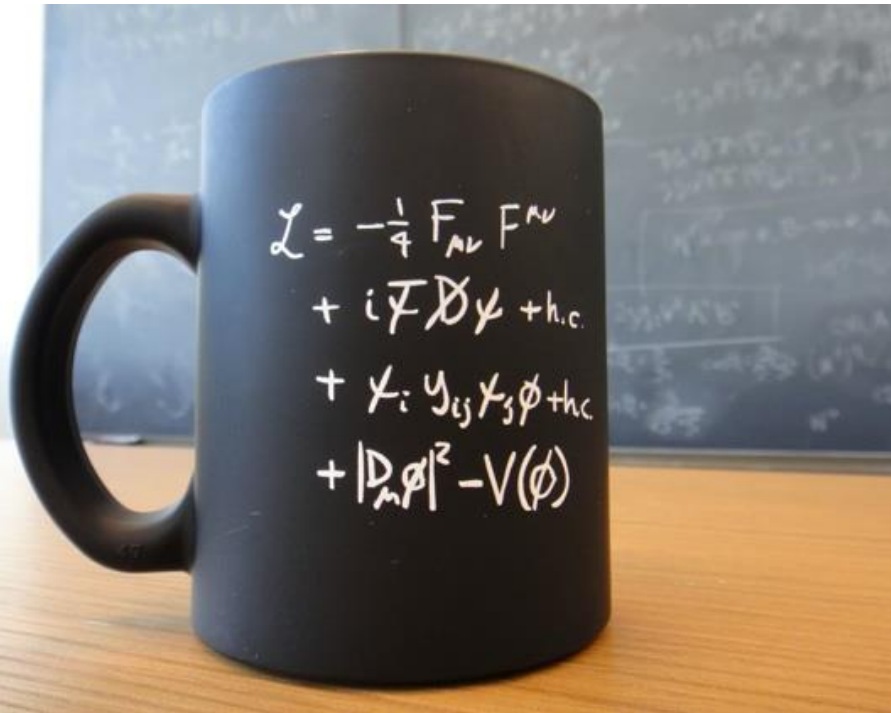
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Physik

# Die Theorie hinter dem Standardmodell: Symmetrien & Lagrangedichten

Michael Kobel  
Technische Universität Dresden

Netzwerk Teilchenwelt Summer School  
CERN 17.07.2018

<http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/>



Lesenswert dazu: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa5b25> (englisch)  
<https://cds.cern.ch/record/2244912/files/CERN-OPEN-2017-012.pdf> (deutsch)

## Der Lagrangian entmystifiziert

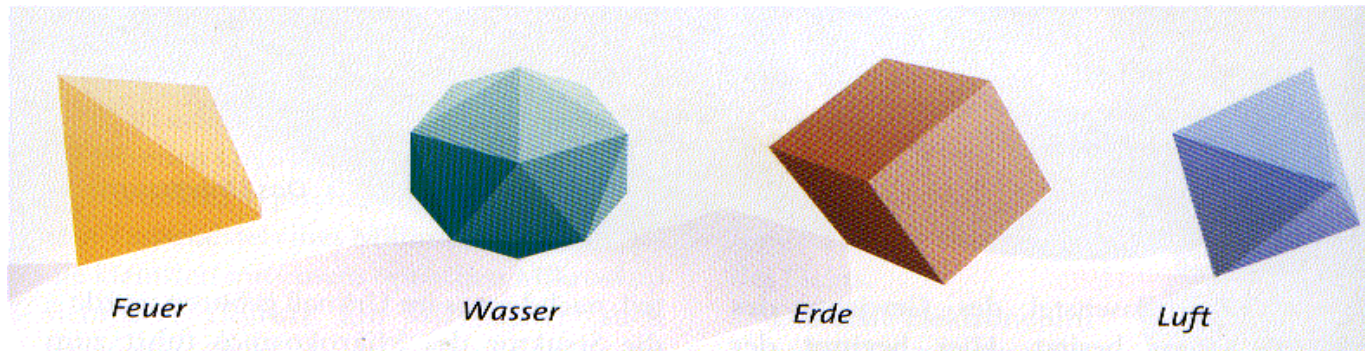
Kaffeeeklatsch mit dem Standardmodell der Teilchenphysik

J. Woithe u. G. Wiener

- 1. THEORIEN FRÜHER UND HEUTE**
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Ladungen
5. Symmetrien
6. Vorhersagen und Bedeutung

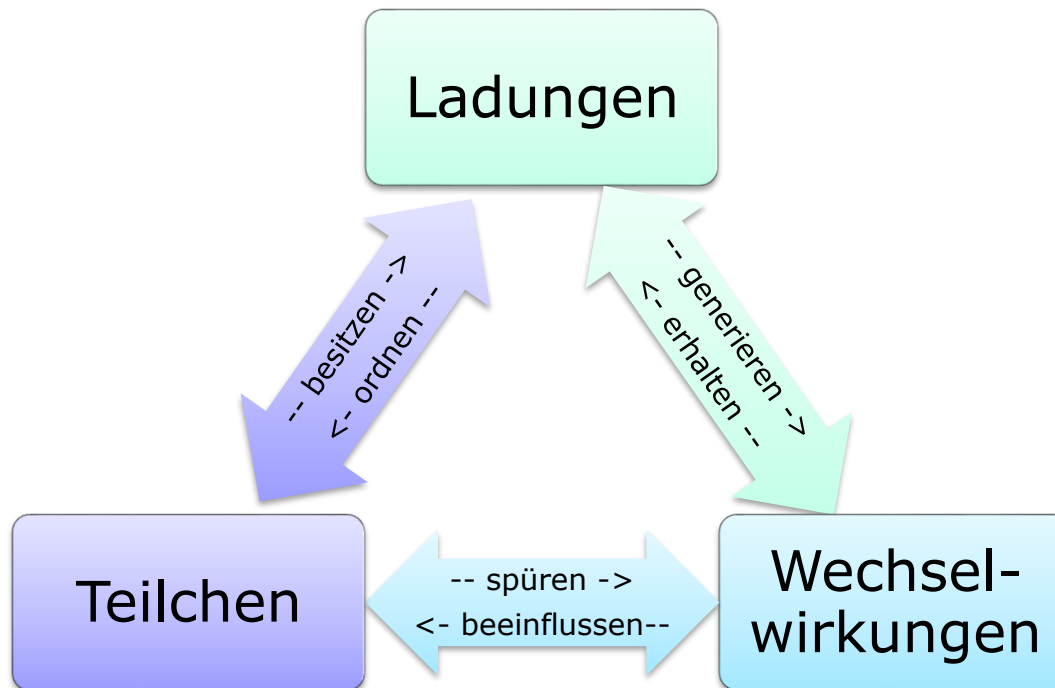
“Standardmodell“ der griechischen Philosophie vor 2500 Jahren

- ❖ **Elemente und Kräfte:** 500-430 v.Chr. **Empedokles**
  - **Vier Elemente:** Feuer, Wasser, Erde, Luft
  - **Zwei Urkräfte:** Liebe , Haß  $\Leftrightarrow$  Mischung , Trennung
- ❖ **Symmetrien:** 427-347 v.Chr. **Platon**
  - **Räumliche Symmetrien:** Schönheit der Körper



- ❖ **Kleinste Bausteine:** 460-371 v.Chr. **Demokrit**
  - **Atome:** verschiedene Formen und Gewichte
  - **Leere:** Verbindung und Bewegung im Nichts

- ❖ **Urkräfte** (heute: enthalten in Wechselwirkungen (WW))
- ❖ **Kleinste Bausteine** (heute: unteilbare Elementarteilchen)
- ❖ **Räumliche Symmetrien** (heute: Ladungssymmetrien)
- ❖ **Neu: verbindendes Konzept: Ladungen für jede WW**
  - → Ladungen sind \*das\* Grundkonzept des Standardmodells (SM) !



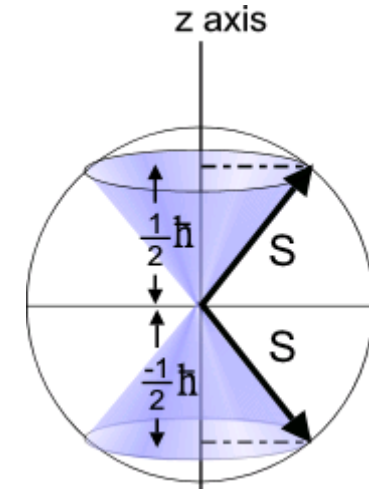
- ❖ Unterschiedliche mathematische Struktur der 3 Ladungen:
  - Starke `Farb`ladung, schwache `Isospin`ladung, elektrische Ladung

Wechselwirkung	Botenteilchen	Ladung der Materieteilchen
Starke	<p><b>Gluonen g</b></p>	<p><b>Starker „Farb“-Ladungsvektor <math>\vec{C}</math></b></p>
Schwache	<p>„Weakonen“ (<math>W^+, W^-, Z</math>)</p> $\begin{pmatrix} W^+ \\ Z \\ W^- \end{pmatrix} \begin{matrix} I = +1 & Z = +1 \\ I = 0 & Z = 0 \\ I = -1 & Z = -1 \end{matrix}$	<p><b>Schwache „Isospin“-Ladungszahl I</b></p> $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} I = +\frac{1}{2} & Z = +\frac{2}{3} \\ I = -\frac{1}{2} & Z = -\frac{1}{3} \end{matrix}$
Elektromagnetische	<p><b>Photonen <math>\gamma</math></b></p> <p><math>Z = 0</math></p>	<p><b>Elektrische Ladungszahl Z</b></p> <p><math>Z = -1, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \dots</math></p>
Gravitation	<p><b>Gravitonen ? Wahrscheinlich!</b></p>	<p><b>Masse ??? Nein!</b></p>

❖ Zugrundeliegende Symmetrie  
genau dieselbe wie bei Spin

❖ Vektor mit 3 Komponenten

- Spin  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  im Ortsraum
- Schwacher Isospin  $\mathbf{I}^W = (I_1^W, I_2^W, I_3^W)$  im abstrakten schwachen Isospinraum



❖ Messbar nur:

- Gesamter Betrag
- eine Komponente (meist gewählt: die 3.)
- sie beiden anderen sind „unscharf“
- Relevant daher besonders schwache Ladungszahl  $I := I_3^W$

<http://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach-Versuch>

❖ Darstellung der Teilchen in Multipletts

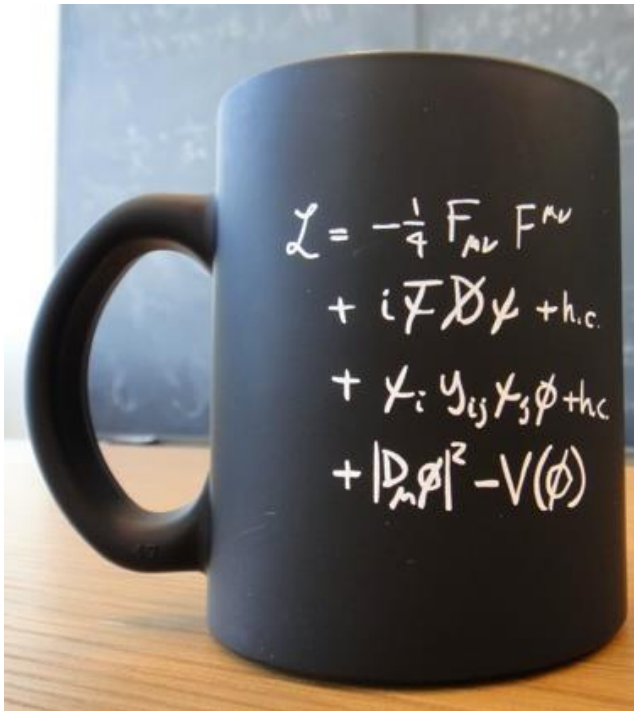
$$\begin{pmatrix} I_3^W \\ +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : \left( \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_3^W \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W^+ \\ Z^0 \\ W^- \end{pmatrix}$$

1. Theorien früher und heute
- 2. LAGRANGEFUNKTION IN KLASSISCHER MECHANIK**
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung



### ❖ Hintergrund der heutigen „Weltformel“ der Teilchenphysik



$$L = T - V$$

- ❖  $L$ : Lagrange Funktion  
(Joseph L. Lagrange, 1736-1814, Mathematiker)
- ❖  $T$ : Bewegungsenergie
- ❖  $V$ : Potentielle Energie (z.B. Lageenergie)
- ❖ **Vorgehen:**
  - Finde  $T$  und  $V$  für das gegebene Problem
  - Anwenden von Mathematik
  - Erhalte Bewegungsgleichungen und Bewegungen

- ❖ Grundprinzip von Maureau de Maupertuis (1750)

(Prinzip der minimalen Wirkung  $S = \int_A^B L dt$  )

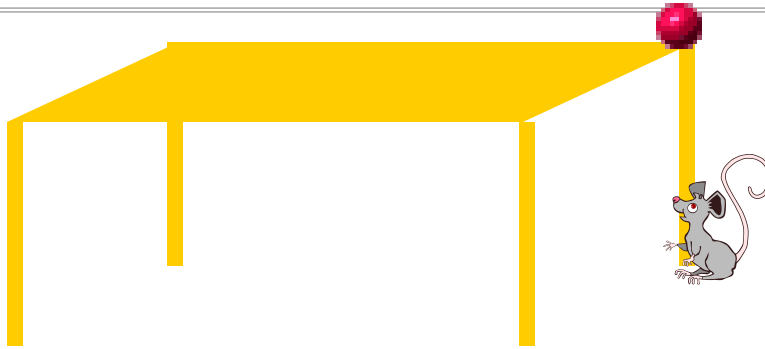
[https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis\\_Moreau\\_de\\_Maupertuis](https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis_Moreau_de_Maupertuis)

[https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches\\_Prinzip](https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches_Prinzip)

*Vereinfacht gesagt:*

*Jede Bewegung von A nach B erfolgt so,  
dass der Mittelwert von  $L=T-V$   
so klein (negativ) wie möglich ist*

- ❖ Handwerkszeug: Mathematik von 1744  
(Euler, Lagrange: Variationsrechnung)



$T = 0, V$  groß  
 $\Rightarrow T-V$  sehr negativ  
**GUT !**



$T$  groß,  $V = 0$   
 $\Rightarrow T-V$  sehr positiv  
**SCHLECHT!**



Mittelwert:  
minimales  $T-V \Rightarrow$   
oben lange (langsam)  
unten kurz (schnell)

❖ Wenn kinetische Energie  $T$  und potenzielle Energie  $V$  bekannt sind:

- Bilde  $L=T-V$

- Definiere die „Wirkung“  $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t)) dt$

- Suche  $x(t)$  und  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$   
so dass Wirkung  $S$  minimal (= möglichst negativ) wird  
(Bemerkung:  $S$  minimal, wenn zeitlicher Mittelwert von  $L$  minimal)

- Methode: Variationsrechnung (variieren  $x(t)$  solange, bis es passt)  
→ erhalte so Bahn und die Bahngeschwindigkeit

- Ergibt **immer** die Euler-Lagrange Gleichungen der klass. Mechanik  
(Uni-Studium Physik, 2. Semester)

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{dv} = 0$$

- → Newtonsche Bewegungsgleichung → deren Lösung ergibt Bahn  $x(t)$
- Beispiel: freier Fall

$$V = mgx$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

**Jede Bewegung erfolgt so,  
dass das Zeitintegral über  $L=T-V$  („Wirkung“)  
so klein wie möglich ist**

$$L=T-V = \frac{1}{2} mv^2 - mgx$$

nutze: Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dv} = \frac{dL}{dx}$$

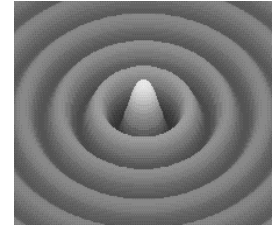
$$\frac{d}{dt} mv = -mg$$

$$ma = -mg$$

erhalte: Newtonsche Bewegungsgleichung

1. Theorien früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
- 3. LAGRANGEDICHTEN**
4. Symmetrien
5. Zusammenfassung und Bedeutung

#### ❖ Quantenmechanik verlangt Ersetzungen:



- Keine Bahnen mehr:  $x(t) \rightarrow$  Wellenfunktionen  $\psi(t, x, y, z)$
- Zeitliche **und** örtliche Variationen:  $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_{\mu} := \left( \frac{1}{c} \frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$
- Ersetze Zeitableitung  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow$  Raum+Zeitableitung  $\partial_{\mu} \psi(t, x, y, z)$

#### ❖ Lagrangefunktion L (Energie) $\rightarrow$ Lagrangedichte $\mathcal{L}$ (Energiedichte)

- Statt  $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t)) dt \rightarrow$  Wirkung  $S = \int \iiint_{x, y, z, t} \mathcal{L}(\psi(t, x, y, z), \partial_{\mu} \psi(t, x, y, z)) dx dy dz dt$
- Lagrangedichte wird weiterhin gebildet als  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
- Aber:  $\mathcal{T}$ : kin. Energiedichte,  $\mathcal{V}$ : potenzielle Energiedichte sind nur für freie Teilchen (ohne WW) aus Quantenfeldtheorie bekannt
- **\*Die\* theoretische Herausforderung: finde allgemein generelles  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$**



$$\mathcal{V} = mc^2 \bar{\psi} \psi$$

$$\mathcal{T} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Euler-Lagrange Variationsrechnung:  
*Jede Bewegung erfolgt so,  
 dass das Raum-Zeitintegral über  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$   
 so klein wie möglich ist*

(Uni-Studium Physik, 6. Semester)

<https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Matrizen>

Dirac Gleichung

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0$$

(entspricht dem Newtonschen  $F=ma$ )

Dirac wollte  $\delta$  Fermionen lineare Bedingungen  
 $\hookrightarrow$  Linearisierung

$$\text{Ansatz } (\not{p} \not{p} - m^2 c^2) = \underbrace{(\not{p}^{\lambda} \not{p}_{\lambda} + mc)}_{\text{neue Zahlen}} (\not{p}^{\kappa} \not{p}_{\kappa} - mc) = 0$$

Ergebnis oft:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \\ \gamma^{\lambda} \gamma^{\kappa} = -\gamma^{\kappa} \gamma^{\lambda} \text{ für } \lambda \neq \kappa \end{array} \right|$$

$\hookrightarrow$  keine "normale" komplexe Zahlen

$\rightarrow$  hyperkomplexen Zahlen

$\rightarrow$  verschiedene Darstellungen z.B. Matrizen

$\Rightarrow$  Dirac Matrizen  $\gamma^{\mu}$  sind Darstellung d. kl. Zahlen

Dnaac Matrizen ( $4 \times 4$  Matrizen)

ASK:  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$

PAULI MATRIZEN

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \vec{\gamma}^3) = \begin{pmatrix} 0 & \vec{b} \\ -\vec{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \gamma^0 \quad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = -(\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \vec{\gamma}^3)$$

z.B.

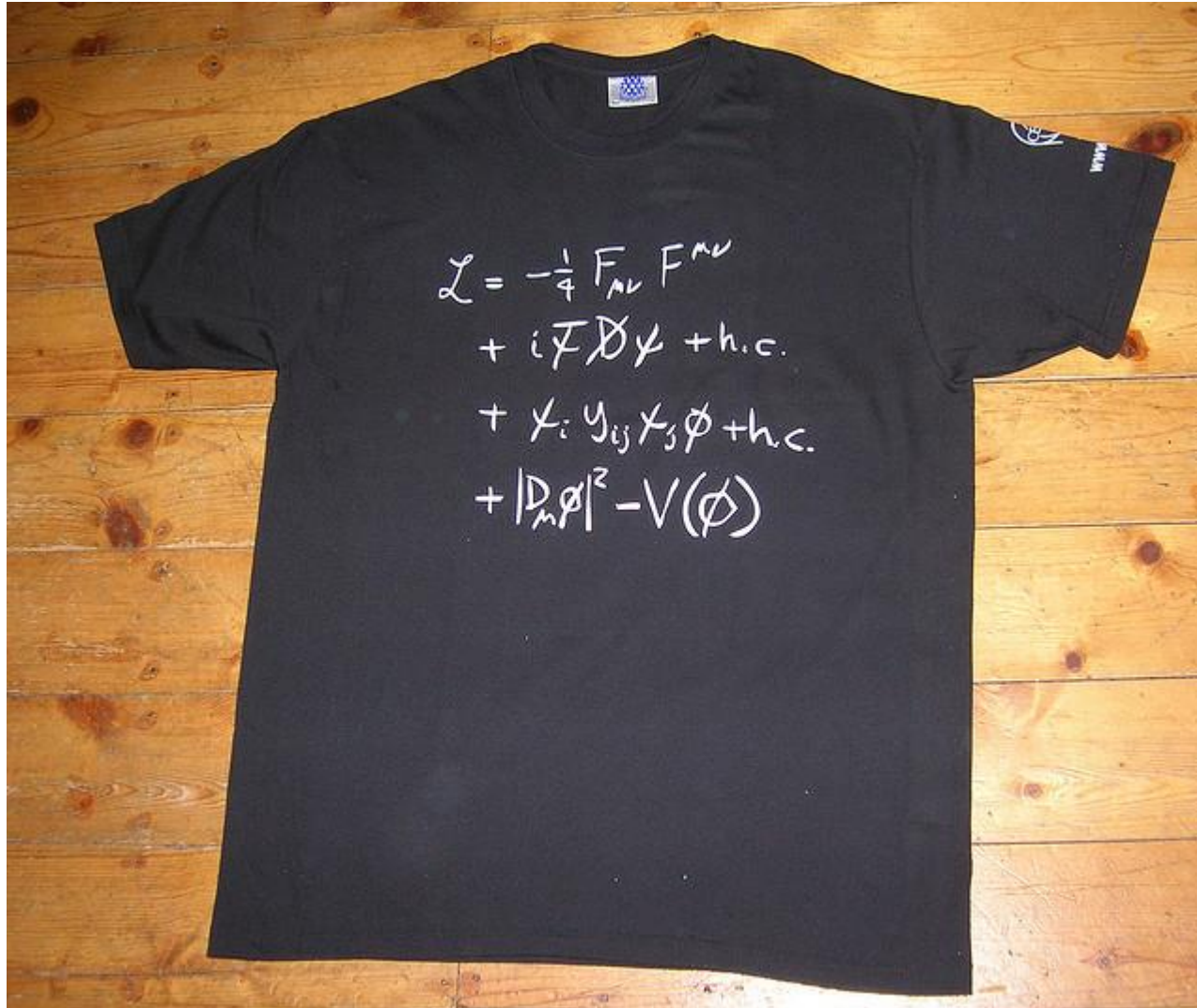
$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[ \text{Dnaac-Gleichung } (i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0 \right]$$

$\swarrow$   $4 \times 4$   $\searrow$   $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Lösung } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \psi_3(x, t) \\ \psi_4(x, t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^- \uparrow, e^- \downarrow, e^+ \uparrow, e^+ \downarrow$$

4 Freiheitsgrade



❖ „Weltformel“  
auf CERN  
T-shirt und  
Mouse Pad



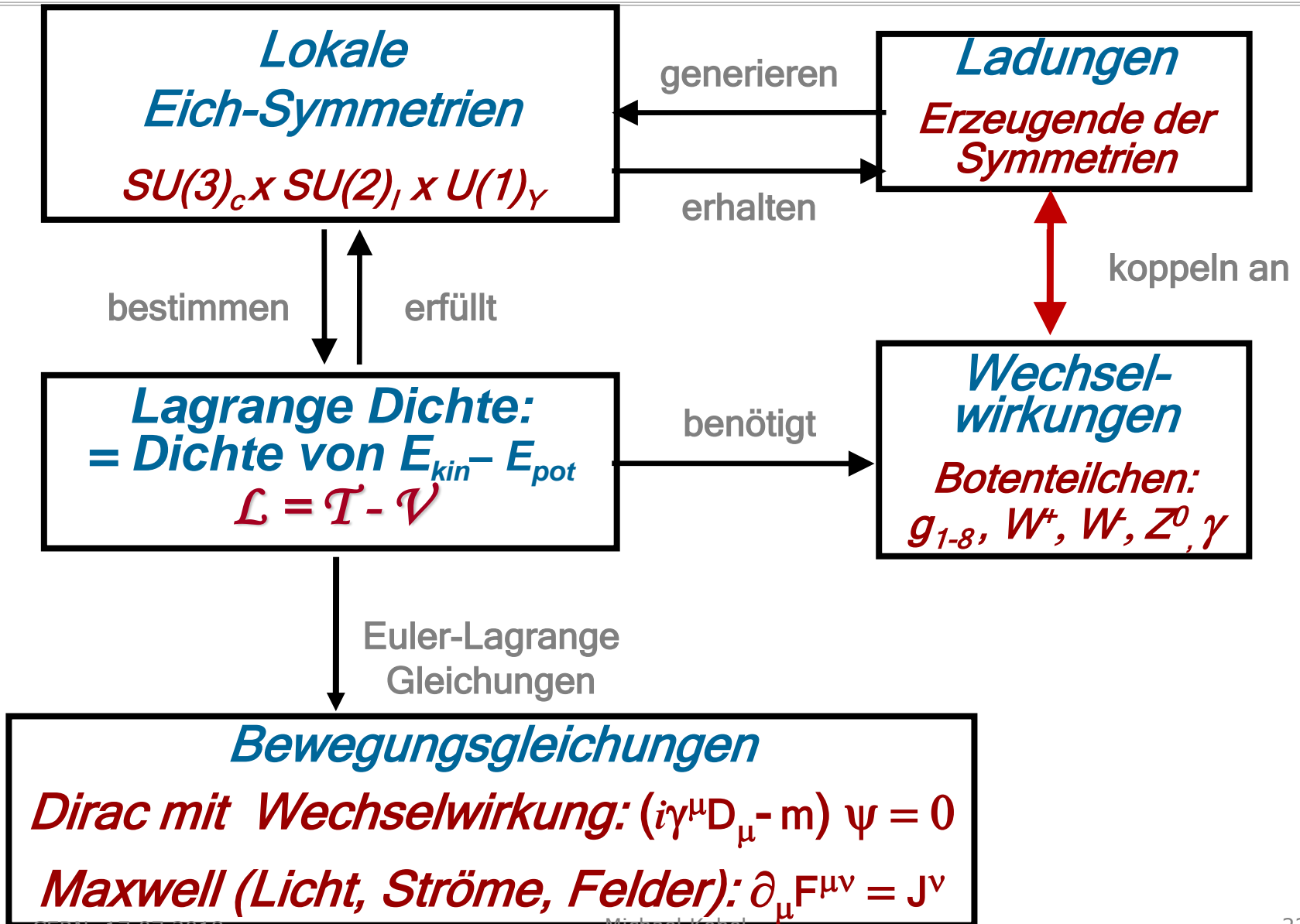
1. Theorien von früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. **SYMMETRIEN**
5. Zusammenfassung und Bedeutung

## 4. Mathematische Symmetrien (Hermann Weyl)

Werkzeugkiste: Transformationsgruppen

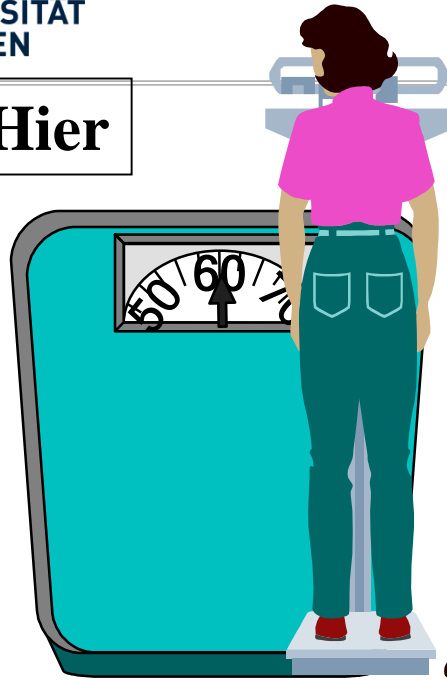


R.P. Feynman: Ein **Objekt** heißt *symmetrisch*, wenn man mit ihm **etwas anstellen** kann, **ohne** es am Ende, wenn man fertig ist mit der Prozedur, **geändert** zu haben.

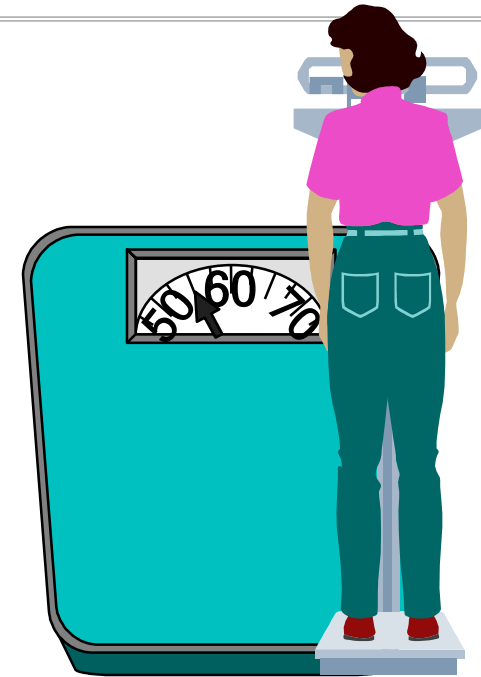


# Lokale Umeichungen auf einer Waage

Hier

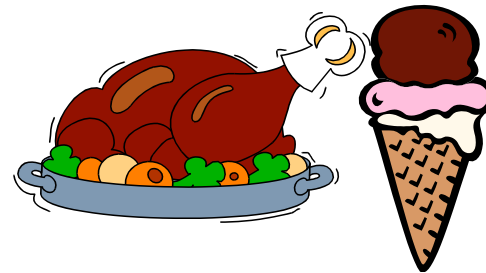
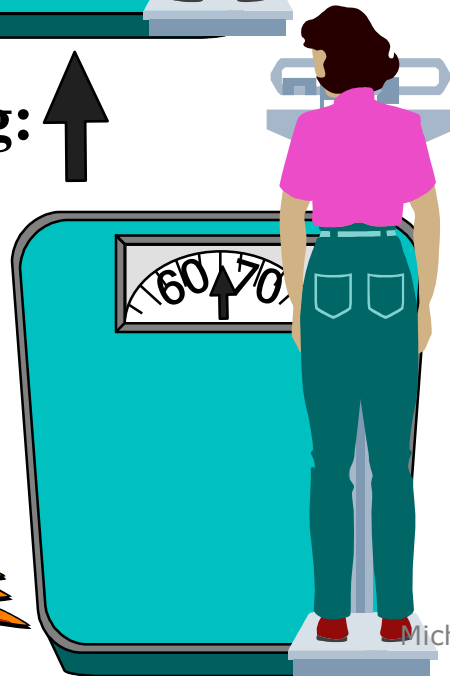


Dort



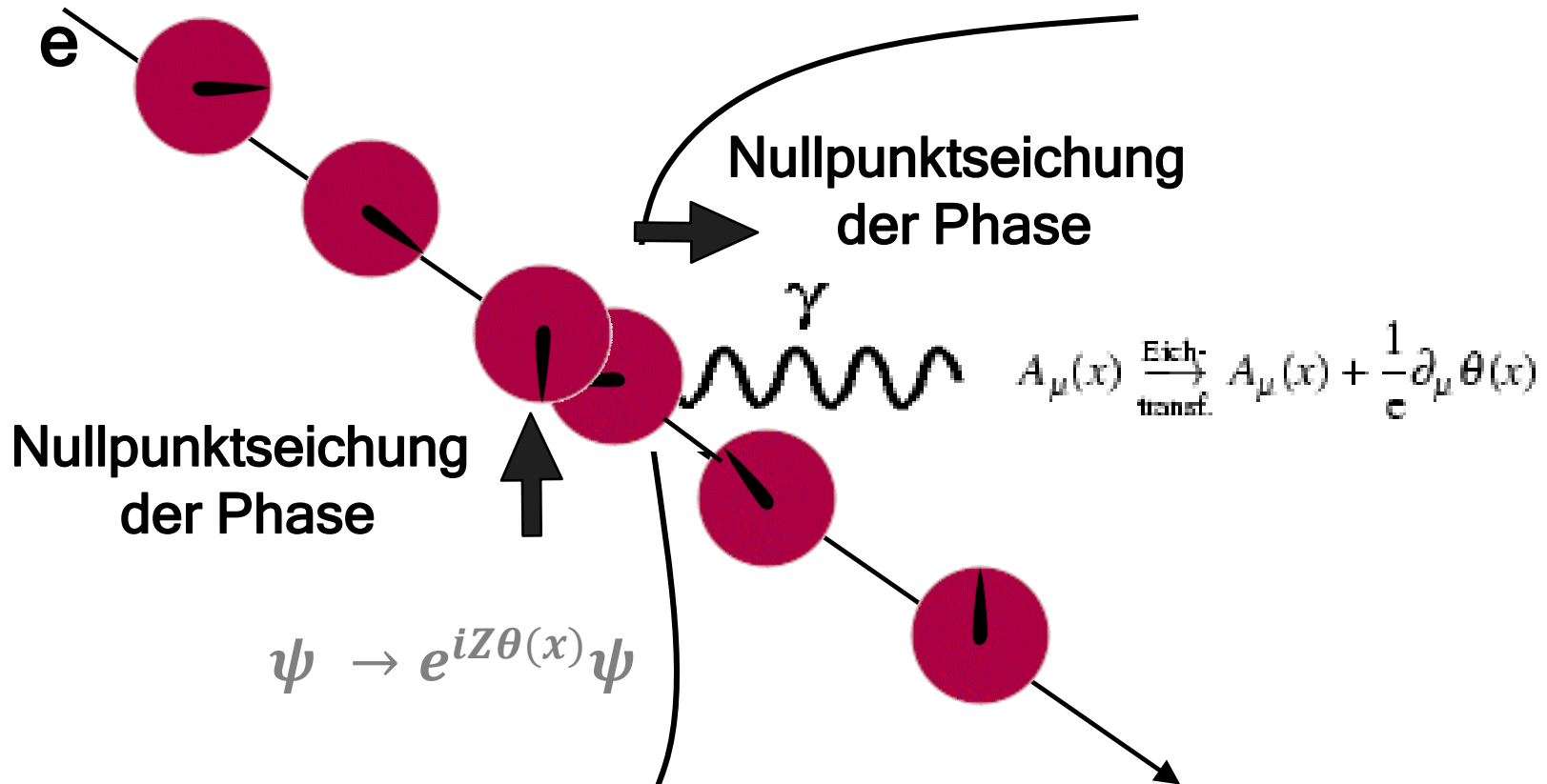
Messung:

Messung:



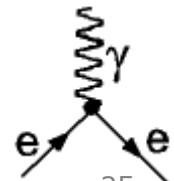
- ❖ Lokale Eichsymmetrie erfordert
  - Absorption oder Emission von "Eich-Teilchen"



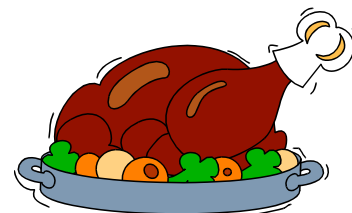
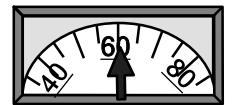
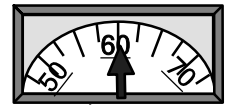


- QED 1927: Dirac, Jordan, Heisenberg, Pauli...  
Eichtheorie 1941: Pauli, ...

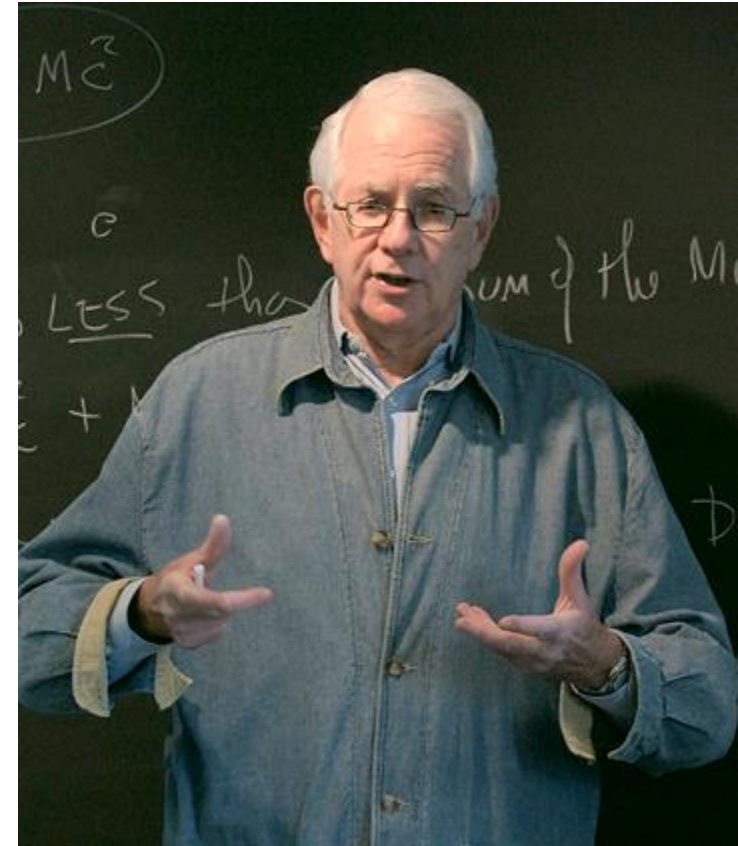
Ergebnis:  
Fundamentalprozess („Vertex“)  
Aufnahme oder Abgabe  
eines Eichbosons (*Photon*  $\gamma$ )



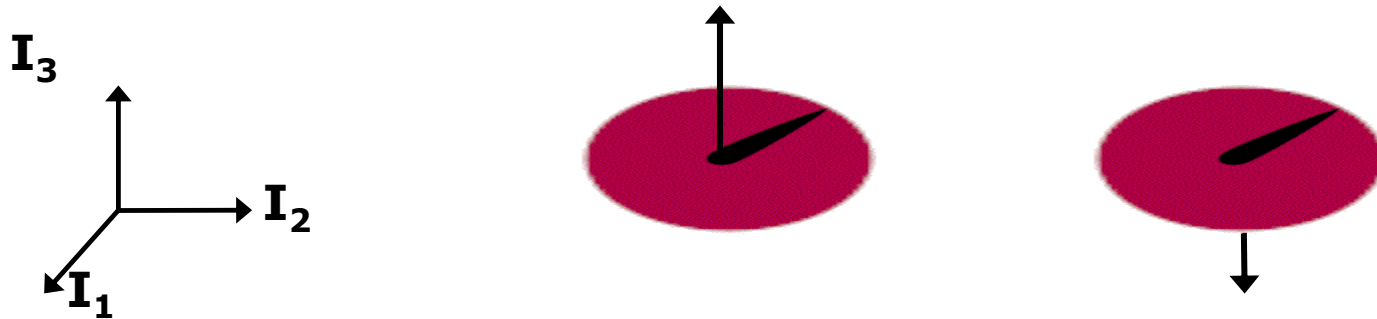
- ❖ Ziel der *Person (Teilchen)*:
  - Keine Änderung des *angezeigten Gewichts (Phasenwerts)* unter lokalen Änderung der Eichung
- ❖ *Sensitivität* auf Umeichungen
  - Bestimmt durch *Meßskala (Ladungszahl Z)*
- ❖ Wahrscheinlichkeit der *Nahrungsänderung (Wechselwirkung)*
  - *Häufigkeit der Gewichtskontrolle (Kopplung  $e =: g_e \sqrt{(\hbar c \epsilon_0)}$ )*
- ❖ Zunahme oder Abnahme von *Gewicht (Phase)*
  - in Form von *Nahrung (Eichbosonen: Photonen)*
- ❖ Menge der *Zu- und Abnahme (QM-Amplitude)*
  - Produkt von *Sensitivität \* Häufigkeit (Produkt  $Z * e$ )*



- Sheldon Glashow (\*1932)
- 1950: Bronx High School of Science (selbe Klasse wie Steven Weinberg)
- 1959: Ph.D. in Harvard bei Julian Schwinger (Nobelpreis für QED 1965 mit Feynman und Tomonaga)
- 1961: Vorschlag  $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$   
*Partial Symmetry of Weak Interactions*,  
*Nuclear Physics*, Bd. 22, 1961, S. 579. [Abstract](#)
- Einführung des Schwachen Isospins  $I^W$   
 [ da Quarks unbekannt für (p,n) und (e, $\nu_e$ ) ]  
 analog zum vorher bekannten Starken Isospin  $I^S$
- Ad-hoc Einführung der Elektroschwachen Mischung und des schwachen Mischungswinkels  
*(Diskussion später diese Woche)*
  - Vorhersage des  $Z^0$  („neutrale schwache Ströme“)
  - Photon-Kopplungen so, dass es an Elektr. Ladung und damit nicht an Neutrinos koppelt  
 (keine Erklärung, warum die Natur ausgerechnet diesen Mischungswinkel wählte)
- Probleme mit Teilchenmassen, da Symmetrien nur mit masselosen Teilchen möglich



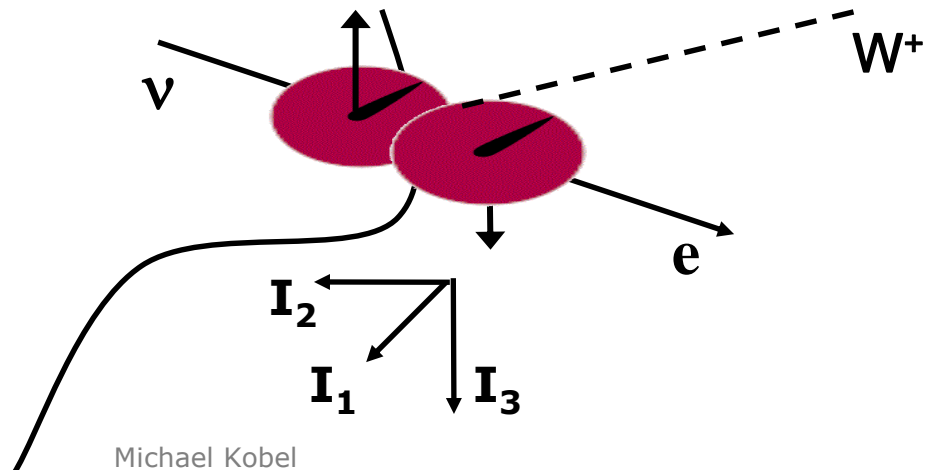
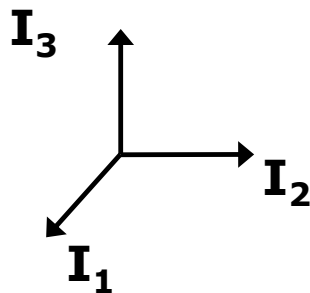
❖ 1961 S.Glashow: Eichung der schwachen Ladung



Neutrino:  $I_3 = 1/2$       Elektron:  $I_3 = -1/2$   
 Proton:  $I_3 = 1/2$       Neutron:  $I_3 = -1/2$

Idee:  $(\nu, e)$  und  $(p, n)$  unterscheiden sich jeweils *nur* durch die „Richtung“ des schwachen Ladungsvektors  $I^W$

❖ lokale Umeichung



- ❖ 1961: GLASHOW (\*1932)
- ❖ 1964: ENGLERT, BROUT, HIGGS  
KIBBLE, GURALNIK, HAGEN (Bilder)
- ❖ 1964: GELL-MANN (\*1929), ZWEIG(\*1937)
- ❖ 1965: HAN, NAMBU (\*1921), GREENBERG
- ❖ 1967: SALAM (1926-96), WEINBERG (\*1933)  
Weinberg: "A model of Leptons"
- ❖ 1973: GROSS, POLITZER, WILCZEK,  
FRITSCH, GELL-MANN, LEUTWYLER, WEINBERG

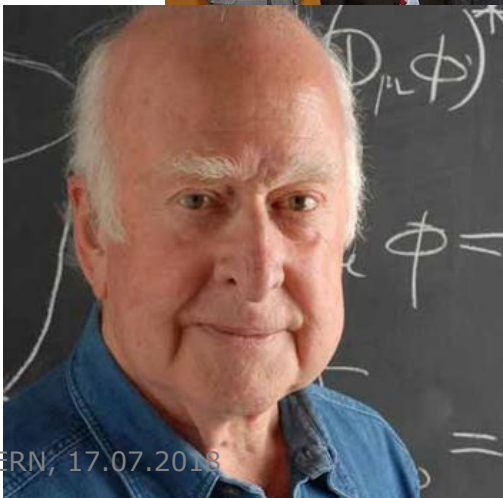
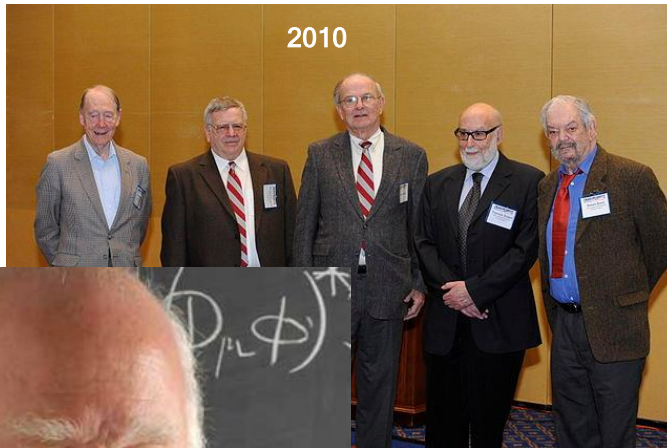
Lokale Elektroschwache Eichsymmetrie  
**Spontane Symmetriebrechung  
zur Massenerzeugung ("Higgs Boson")**

Quarks

Starke "Farb-" Ladung

**Anwendung auf Baustein-Teilchen  
(Nobelpreis 1979 mit Glashow, Foto)**

starker Kopplungsparameter (Nobelpreis 2004)  
und Lokale Eichsymmetrie der starken WW

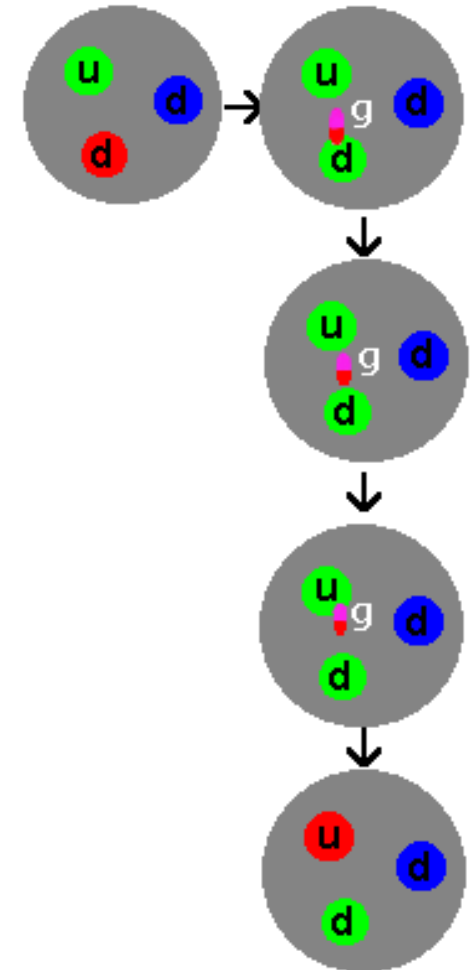
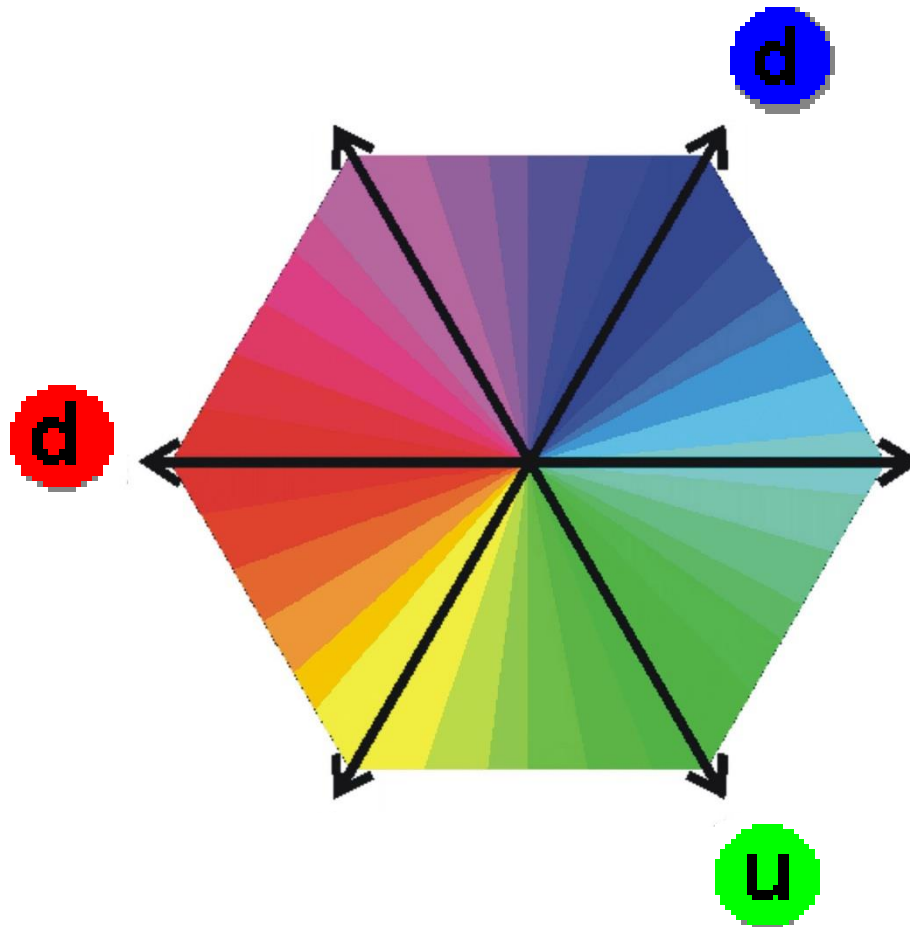


$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu)^2 - \bar{R}\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'B_\mu)R - L\gamma^\mu (\partial_\mu + ig't \cdot \vec{A}_\mu - i\frac{1}{2}g'B_\mu)L$$

$$-\frac{1}{2}|\partial_\mu \varphi - ig\vec{A}_\mu \cdot \vec{t}\varphi + i\frac{1}{2}g'B_\mu \varphi|^2 - G_e (\bar{L}\varphi R + \bar{R}\varphi^\dagger L) - M_1^2 \varphi^\dagger \varphi + h(\varphi^\dagger \varphi)^2. \quad (4)$$

[http://prl.aps.org/pdf/PRL/v19/i21/p1264\\_1](http://prl.aps.org/pdf/PRL/v19/i21/p1264_1)

- ❖ 1973: Gross, Politzer, Wilczek, Nambu, Fritzsche...  
starke WW durch Umeichung der Farbladung





### ❖ Jede Eichsymmetrie wird durch n Ladungsoperatoren T "generiert"

- *Emag Symmetrie mit  $n=1$  durch  $\hat{Z}$   
(1x1 Matrix)*
- *Schwache Isospin Eichsymmetrie mit  $n=3$  durch  $\hat{I}_i := \frac{1}{2} \sigma_i, i=1,2,3$   
 $\sigma_i$  Pauli-Matrizen (2x2)*
- *Starke Eichsymmetrie mit  $n=8$  durch  $\hat{C}_a := \frac{1}{2} \lambda_a, a=1,\dots,8$   
 $\lambda_a$  Gell-Mann-Matrizen (3x3)*

### ❖ Die Ladungen sind Eigenwerte der "Generatoren"

- *z.B.  $I_3(e^-) = -\frac{1}{2}$ , da  $\hat{I}_3 |e^- \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_e \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |e^- \rangle$*
- *Nicht-diagonal Operatoren haben keinen Eigenwert -> nicht messbar*
  - *Schwache Ladung: 1 Eigenwert*
  - *Starke Ladung: 2 Eigenwerte (2-dim Vektor)*

## Die 8 Gell-Mann Matrizen und Leiteroperatoren (Berger, Kap.4)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

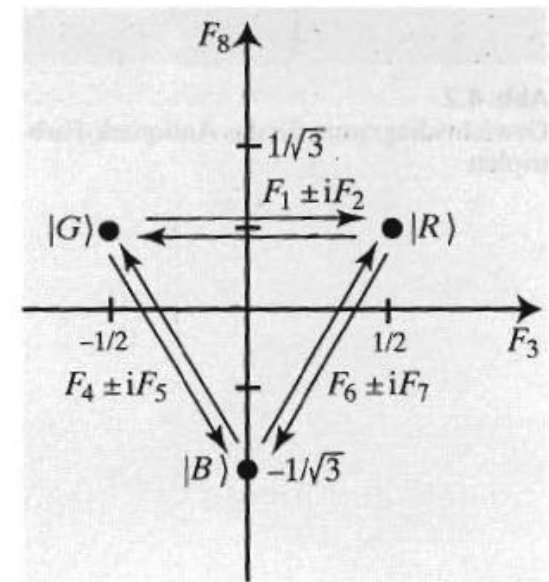
$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentaldarstellung, das Triplet, ist wieder durch die Matrizen der Gruppe selbst gegeben, also gilt für die Generatoren

$$F_i = \lambda_i / 2. \quad (4.15)$$

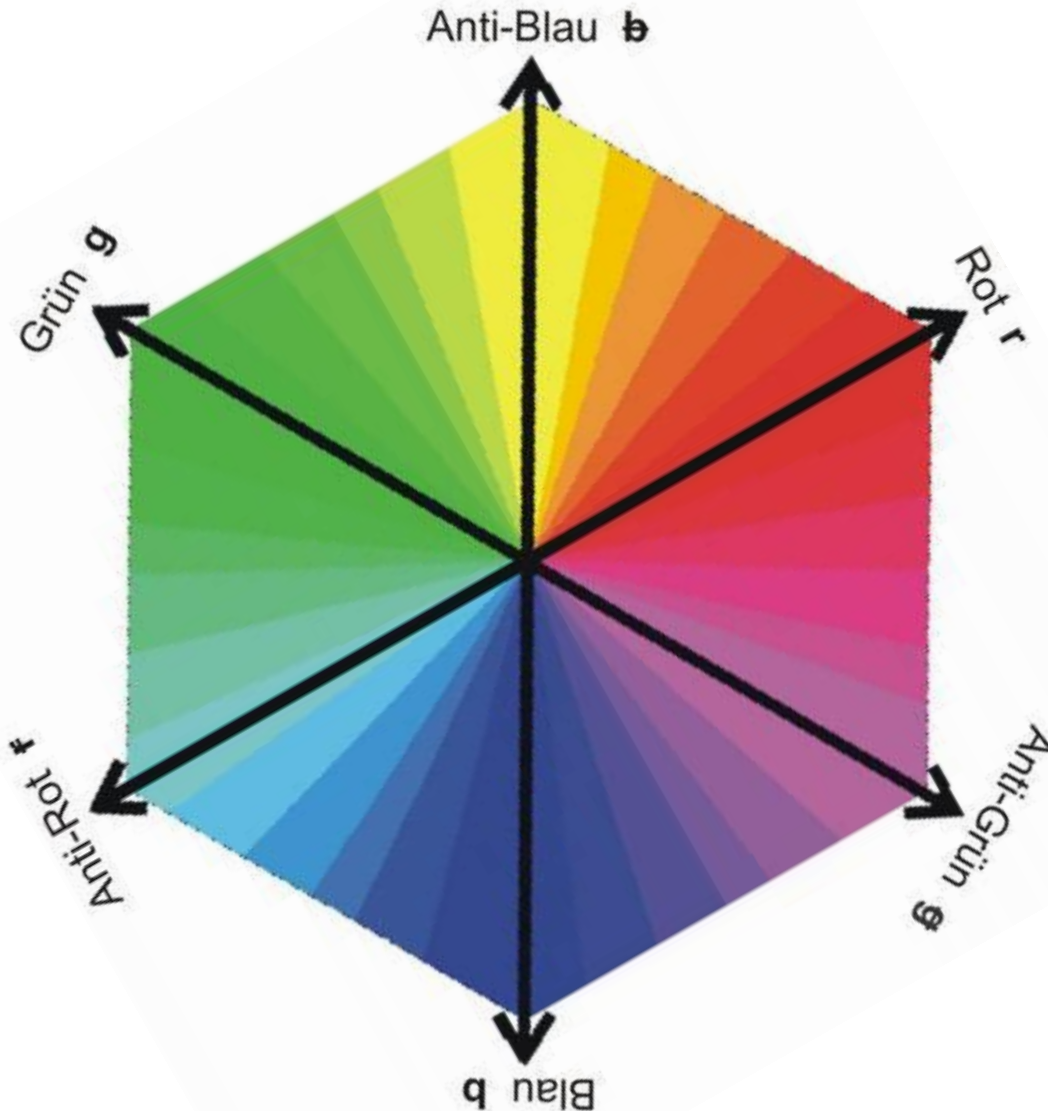
Die zugehörigen Basisvektoren innerhalb des Multipletts, in unserem Fall also die Farbzustände  $|R\rangle$ ,  $|G\rangle$ ,  $|B\rangle$ , unterscheiden sich durch die Eigenwerte zu  $F_3$  und  $F_8$ . Man stellt sie graphisch in einem sog. Gewichtsdiagramm (Abb. 4.1) dar, das entsprechend dem Rang 2 der Gruppe die Ebene ausfüllt.

Analog zum Vorgehen bei  $SU_2$  faßt man auch bei  $SU_3$  die neben den Eigenwertoperatoren verbleibenden Generatoren zu Leiteroperatoren zusammen. Durch sie kann man Zustände ineinander überführen. Ihre Wirkung läßt sich sehr anschaulich durch die Pfeile in Abb. 4.1 verdeutlichen.



**Abb. 4.1**  
Gewichtsdiagramm für das Quark-Far-triplett





Darstellung der Basisvektoren  $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann verifiziert man mit Hilfe von (4.15) sofort

$$F_3|R\rangle = \frac{1}{2}|R\rangle$$

oder

$$F_8|B\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}}|B\rangle .$$

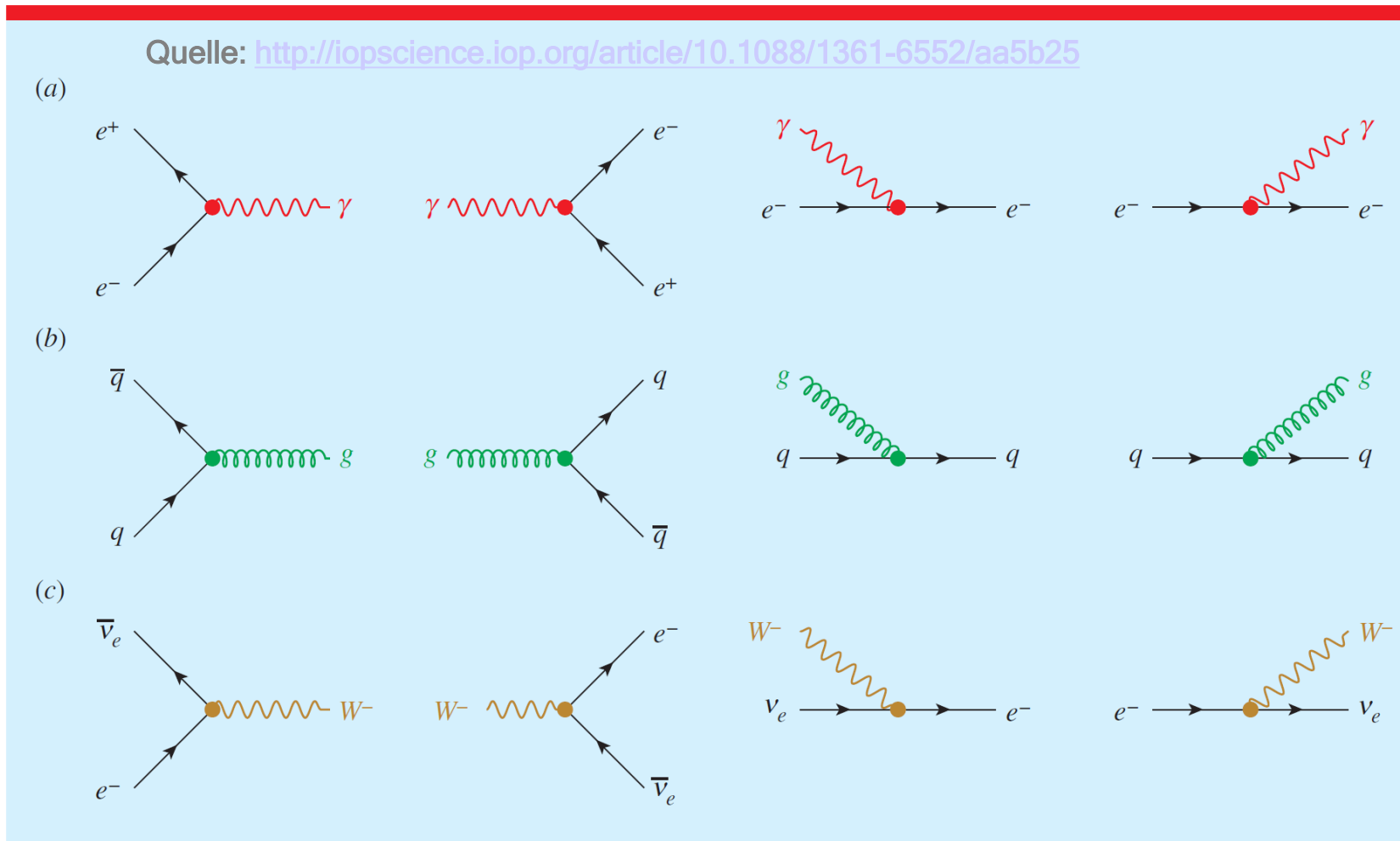
Wirkung der Leiteroperatoren

Als Beispiel wird

$$F_1 + iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Offenbar gilt  $(F_1 + iF_2)|G\rangle = |R\rangle$

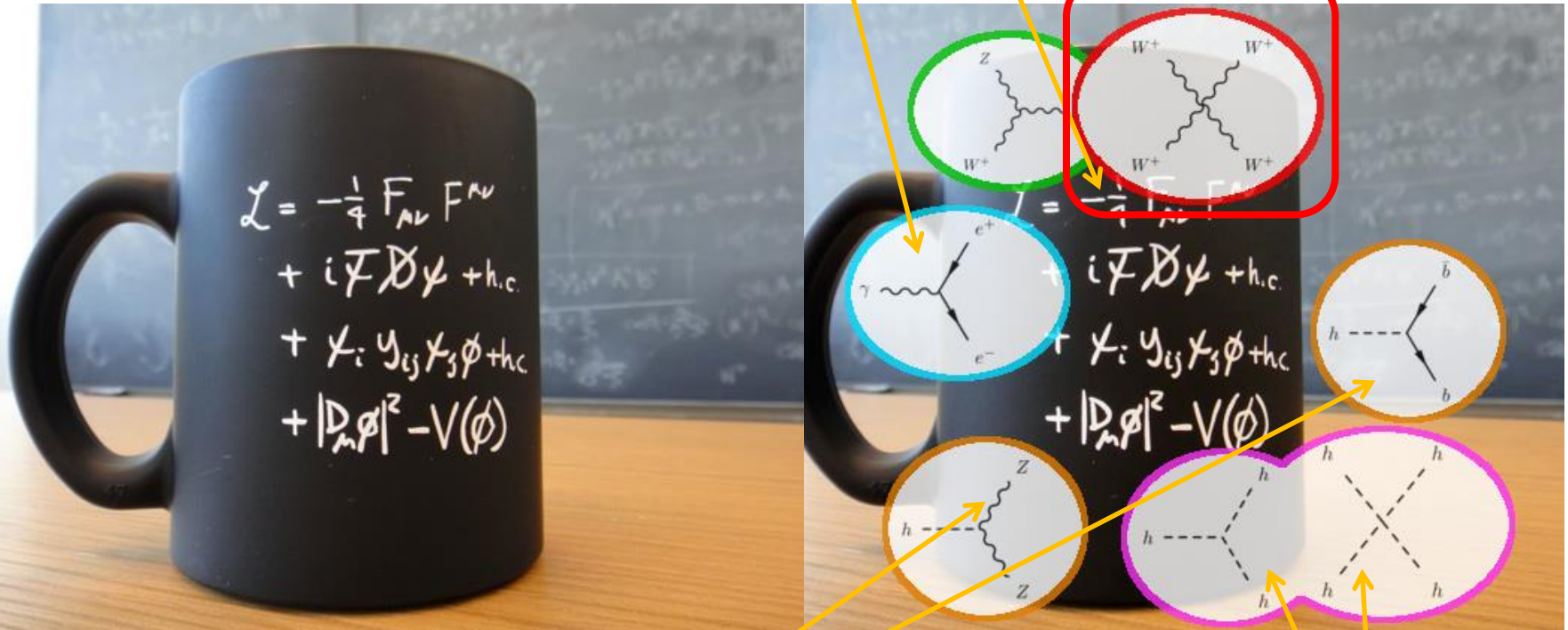
- ❖ Freie Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  nicht invariant unter **\*lokalen\*** Eichtransf.
- ❖ Invarianz nur möglich, wenn "Eichbosonen"  $V_\mu$  vorhanden  
 $V_\mu =$  Gluonen  $G_{a\mu}$ ,  $a=1,\dots,8$ , Weakonen  $W_{i\mu}$ ,  $i=1,2,3$ , Photon  $A_\mu$
- ❖ Zahl der Eichbosonen = Zahl der Generatoren  $T$  der Symmetrie
  - Emag:  $\hat{Z}$
  - Schwach:  $\hat{I}_i$   $i=1,2,3$
  - Stark:  $\hat{C}_a$   $a=1,\dots,8$
- ❖ Eichbosonen haben **\*Wechselwirkung\*** mit Materiemultipletts
  - einfaches "Rezept" zur Erfüllung der Symmetrien:  
 Ersetze die Ableitung  $\partial_\mu$  durch  $D_\mu = \partial_\mu - \iota g \Sigma T V_\mu$   
*z.B. Elektromagnetismus*  $D_\mu = \partial_\mu - \iota g_{em} Z A_\mu$   
*Schwache Wechselwirkung*  $D_\mu = \partial_\mu - \iota g_W \Sigma I_i W_{i\mu}$



**Figure 4.** Basic vertices of the electromagnetic interaction (a), strong interaction (b), and weak interaction (c). From left to right: examples of annihilation, pair production, absorption, and emission.

Wechselwirkungen zwischen  
**Boten und Bausteinen**

**Botenteilchen unter sich:**  
 → emag Wellen, Confinement, VBS...

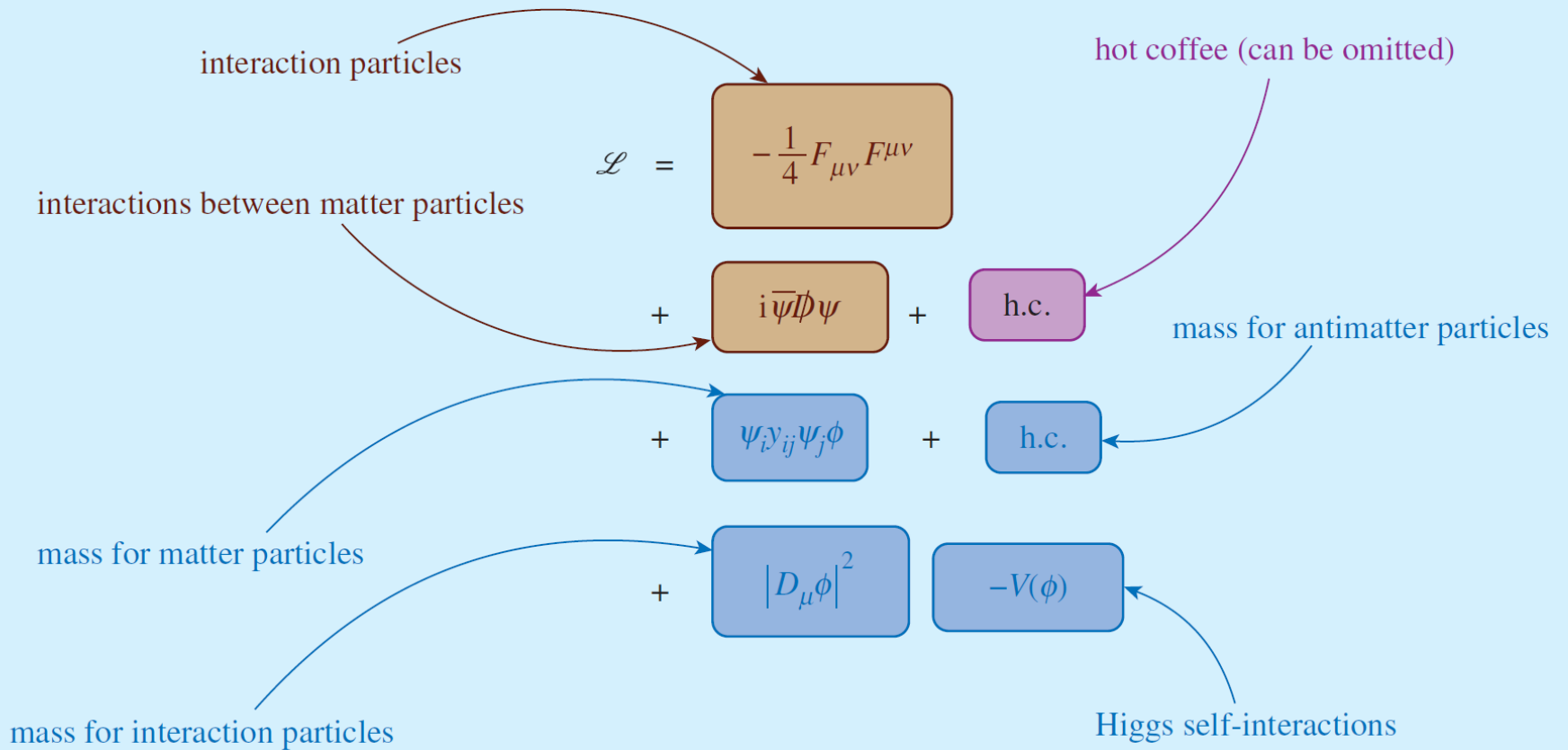


<http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/>

**Higgs mit Bausteinen und Boten**

Massen der Bausteine und Botenteilchen  
 Erzeugung und Zerfälle des Higgs Teilchens

**Higgsteilchen unter sich**  
 noch nicht beobachtet



## ❖ Feldstärketensor, siehe

[https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetischer\\_Feldst%C3%A4rketensor](https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetischer_Feldst%C3%A4rketensor)

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist  
gewöhnlich definiert durch das **Vektorpotential**:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

z. B. mit dem klassischen Vektorpotential

$$A^\mu = \left( \phi/c, \vec{A} \right)$$

Diese Definition ist auch für die  
**Quantenelektrodynamik** gültig. Dort ist einfach nur  
das Vektorpotential operatorwertig. Es ist ein  
Spezialfall der **Feldstärketensor**-Definition einer  
allgemeinen **Eichtheorie**.

Die Matrixdarstellung des Feldstärketensors ist  
*koordinatenabhängig*. In einer flachen Raumzeit (also  
mit **Minkowski-Metrik**) und **kartesischen** Koordinaten  
kann der kontravariante Feldstärketensor  
geschrieben werden als:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Theorien von früher und heute
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
- 5. ZUSAMMENFASSUNG UND BEDEUTUNG**

### ❖ Aufstellung der Terme der Lagrangedichte:

- Natur verlangt ihre Invarianz unter 3 „lokalen Umeichungen“  
-> 3 lokale Eichsymmetrien
- Jede Symmetrie lässt sich nur mit Hilfe von Wechselwirkungstermen in der Lagrangedichte erfüllen  
**-> lok. Eichsymmetrie ist „Ursache“ der Wechselwirkungen !**

### ❖ Bedeutung der Terme in der Lagrangedichte:

- Jedem Term entspricht entweder  
→ kinetische Energie freier Teilchen  
→ Wechselwirkung (Vertex) zwischen Teilchen
- Terme (=Vertices), die die Eichsymmetrie nicht erfüllen, sind verboten und damit auch Prozesse, die diese erfordern.
- Bewegungsgleichungen (Dirac, Klein-Gordon, Maxwell,...) folgen aus Prinzip minimaler Wirkung



- ❖ Aus Axiomen des Standardmodells
  - 3 Symmetrien mit je 1 freien Kopplungsparameter  $\alpha$
  - Spontane Brechung 1 Symmetrie durch das BEHiggs-Feld (mind. 21 weitere freie Parameter)
  
- ❖ ergibt sich theoretische Vorhersagekraft für
  - Anzahl und \*alle\* Eigenschaften der Botenteilchen (daher konnte Glashow das  $Z^0$  voraussagen)
  - Erlaubte und verbotene Prozesse mit Wahrscheinlichkeiten und Winkelverteilungen
  - Energie (Abstands-)abhängigkeit der Kopplungsparameter  $\alpha$
  
- ❖ wobei als rein experimenteller Input nicht vorhersagbar sind
  - freie Parameter
  - Objekte (Materieteilchen-Multipletts) auf die die Symmetrien wirken

## Why are all the interactions so similar in their structure?

*There are a number of possibilities:*

❖ *The first is the limited imagination of physicists:*

*When we see a new phenomenon, we try to fit it in the frame-work we already have - until we have made enough experiments we don't know that it doesn't work...*

*It's because physicists have only been able to think of the same damn thing, over and over again.*

❖ *Another possibility is that it is the same damn thing over and over again - that Nature has only one way of doing things, and She repeats her story from time to time.*

❖ *A third possibility is that things look similar because they are aspects of the same thing - some larger picture underneath...*

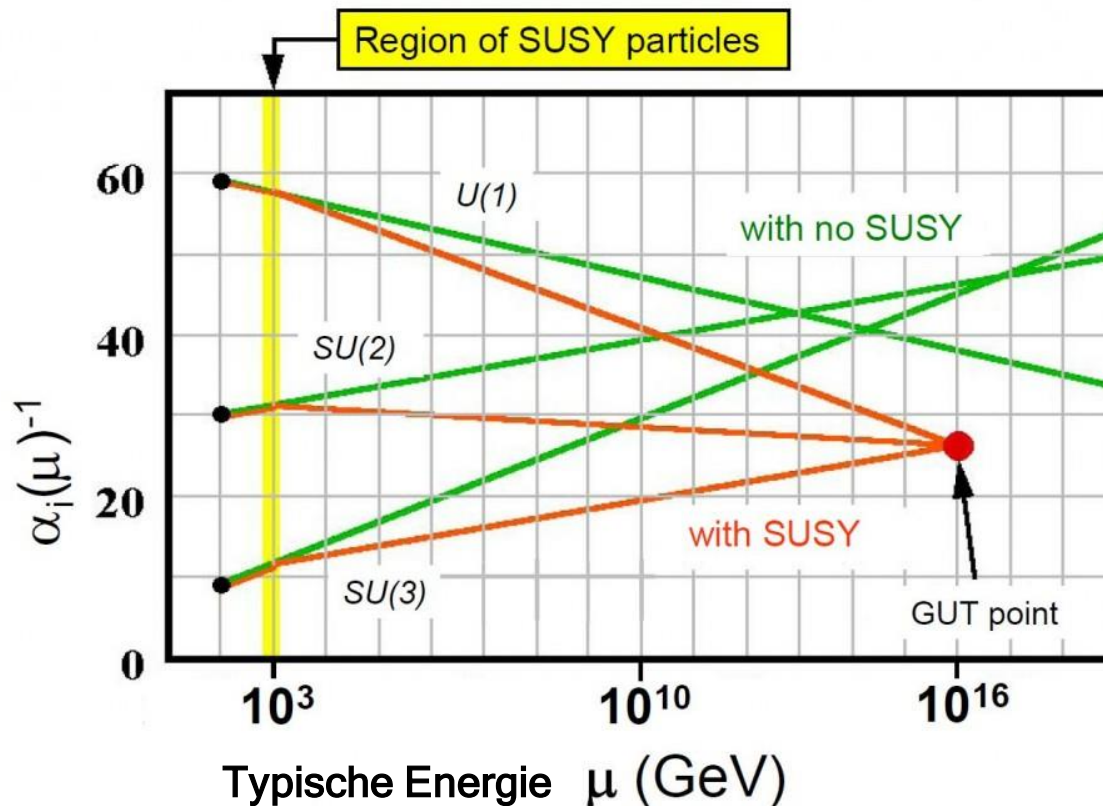
Richard. P. Feynman, "The strange theory of light and matter"

Princeton University Press, 1985

"Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie"

CERN, 17.07.2018 Piper Taschenbuch, 9,95€ Michael Kobel

- ❖ Kopplungsparameter  $\alpha$  nähern sich bei hoher Energie an  
→ alle Kräfte haben ähnliche Stärke
- ❖ Zeichen für einen gemeinsamen Ursprung aller Wechselwirkungen?



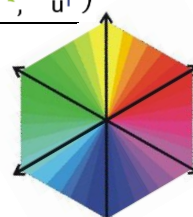
<http://sites.uci.edu/energyobserver/2012/12/02/update-on-some-higgs-blog-entries/>

- ❖ Klappt sogar noch besser mit Supersymmetrie!

# ANHANG

## Übersicht Wechselwirkungen und Eichbosonen

### ❖ Eichsymmetrien mit masselosen Eichbosonen (ungebrochen)

Eichsymmetrie	QED $U(1)_Z$	QCD $SU(3)_c$
	abelsch	nicht- abelsch
$D_\mu$	$\partial_\mu + ie\hat{Z} A_\mu$	$\partial_\mu + ig_s C_a G_{a\mu}$
Kopplung	$g_{em}=0.3$ (= e nat. Einh. )	$g_s = 1.2$
Generatoren	1: $\hat{Z}$ (1x1)	8 : $C_a$ (3x3)
Eichfelder	$A_\mu$	$G_{a\mu}, a = 1, \dots, 8$
Eichbosonen	Photon $\gamma$	Gluonen $g_{1\dots 8}$
Wirkt auf Teilchenmultiplett	(e), ( $\mu$ ), ( $\tau$ ), (u), (c), (t), (d), (s), (b)	$(u^{\rightarrow}, u^{\leftarrow}, u^{\uparrow})$ $(d^{\rightarrow}, d^{\leftarrow}, d^{\uparrow})$ $(\bar{u}^{\rightarrow}, \bar{u}^{\leftarrow}, \bar{u}^{\uparrow})$ $(\bar{d}^{\rightarrow}, \bar{d}^{\leftarrow}, \bar{d}^{\uparrow})$
Ladungen	Elektrische Ladung -1, -1, -1, +2/3, -1/3, -1/3, ...	Starke Farb- ladung 

❖ Schwache Eichsymmetrien: ungebrochen nur bis  $\sim 10^{-10}$  s nach dem Urknall

Eichsymmetrie	$U(1)_Y$	("QFD") $SU(2)_I$
	abelsch	nicht- abelsch
$D_\mu$	$\partial_\mu + ig_Y \hat{Y}^W B_\mu$	$\partial_\mu + ig_W I_i W_{i\mu}$
Kopplung	$g_Y = 0.36$	$g_W = 0.63$
Generatoren	1: $\hat{Y}^W$ (1x1)	3 : $I_i$ (2x2)
Eichfelder	$B_\mu$	$W_{i\mu}, i = 1, \dots, 3$
Eichbosonen	B-Boson	Weakonen $W^+, W^-, W_3^0$
Wirkt auf Teilchenmultipllett	$(e), (\mu), (\tau), (v_e), (v_\mu), (v_\tau),$ $(u), (c), (t), (d), (s), (b)$	$\begin{pmatrix} v_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$
Ladungen	Schwache Hyperladung $Y^W = Q - I_3$	Schwache Isospin-Ladung $I_3 = \begin{pmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

❖ nach Symmetriebrechung im Brout-Englert-Higgs Feld  $B^0$  und  $W^0$  vermischt zu  $Z^0$  und  $\gamma$  in "elektroschwacher Wechselwirkung"

- ❖ **Theoretiker** schlagen neue(n) Term(e) in  $\mathcal{L}$  vor
  - (Meist) motiviert von neuen Ideen / Erklärungen
- ❖ **Experimentalphysiker** simulieren Effekt in Detektor+ Daten
  - suchen danach, bzw schließen diesen Term aus

- ❖ Beispiel Diplomarbeit in Dresden 2013  
**Constanze Hasterok**, Optimization of the Search for Contributions of Anomalous Quartic Gauge Couplings to Vector Boson Scattering at the Large Hadron Collider  
<https://cds.cern.ch/record/1647794/files/CERN-THESIS-2013-273.pdf>

- Neuer „aQGC“ Beitrag zum WWWW-vertex



$$\mathcal{L}_1 = \alpha_1 g g' \text{tr}[\Sigma \mathbf{B}_{\mu\nu} \Sigma^\dagger \mathbf{W}^{\mu\nu}], \quad (2.41)$$

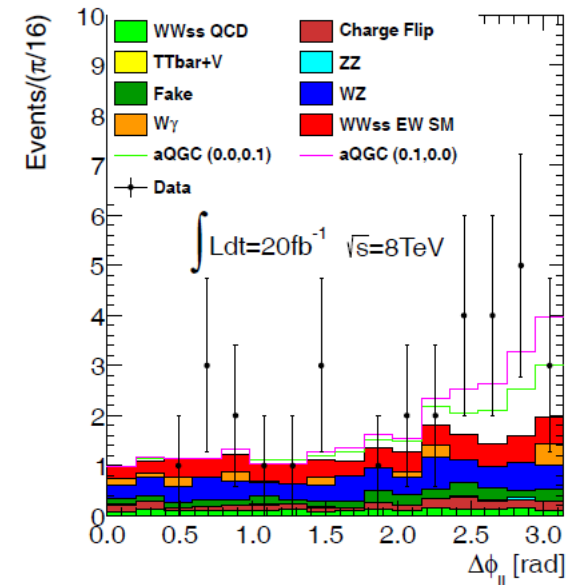
$$\mathcal{L}_2 = i\alpha_2 g' \text{tr}[\Sigma \mathbf{B}_{\mu\nu} \Sigma^\dagger [V^\mu, V^\nu]], \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}_3 = i\alpha_3 g \text{tr}[\mathbf{W}_{\mu\nu} [V^\mu, V^\nu]], \quad (2.43)$$

$$\mathcal{L}_4 = \alpha_4 (\text{tr}[V_\mu V_\nu])^2, \quad \text{and} \quad (2.44)$$

$$\mathcal{L}_5 = \alpha_5 (\text{tr}[V_\mu V^\mu])^2. \quad (2.45)$$

In this work, anomalous coupling parameters shall be constrained in the measurement of the scattering of two  $W$  bosons with equal electric charge.  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  modify only triple gauge couplings. Hence, they are not relevant for our process of interest.  $\mathcal{L}_3$  modifies triple and quartic gauge couplings and  $\mathcal{L}_4$  and  $\mathcal{L}_5$  modify only quartic gauge couplings [29].





❖ 3 Typen von **Ladungen** generieren 3 Symmetrie Gruppen:

- $SU(3)_C \otimes SU(2)_I \otimes U(1)_Y$
- Diese „lokalen Eichsymmetrien“ verlangen (!) **Wechselwirkungen**,  
(sonst können die lokalen Symmetrien nicht erfüllt werden)

❖ Je 1 freien **Kopplungsparameter** (Stärke) für jede Wechselwirkung  
(genaue Werte abhängig vom jeweiligen Energieübertrag)

- $\frac{1}{\alpha_s} = 5$     $\frac{1}{\alpha_W} = 29$     $\frac{1}{\alpha_Y} = 108$       vor Kondensation des BEH-Feldes
- $\frac{1}{\alpha_{em}} = \frac{1}{\alpha_W} + \frac{1}{\alpha_Y} = 137$       nach Kondensation des BEH Feldes

❖ **Brout-Englert-Higgs (BEH) Mechanismus** bei  $10^{-12}$ s nach Urknall

- Kondensation eines allgegenwärtigen BEH-Feldes
- Spontane Brechung der schwachen Eichsymmetrien
- Elektroschwache Mischung von  $(B^0, W^0)$  zu  $(Z^0, \gamma)$
- Generierung der Massen von  $W^+$ ,  $W^-$  und  $Z^0$
- Mischung der Fermionen und Generierung ihrer Massen

❖ **Gravitation**