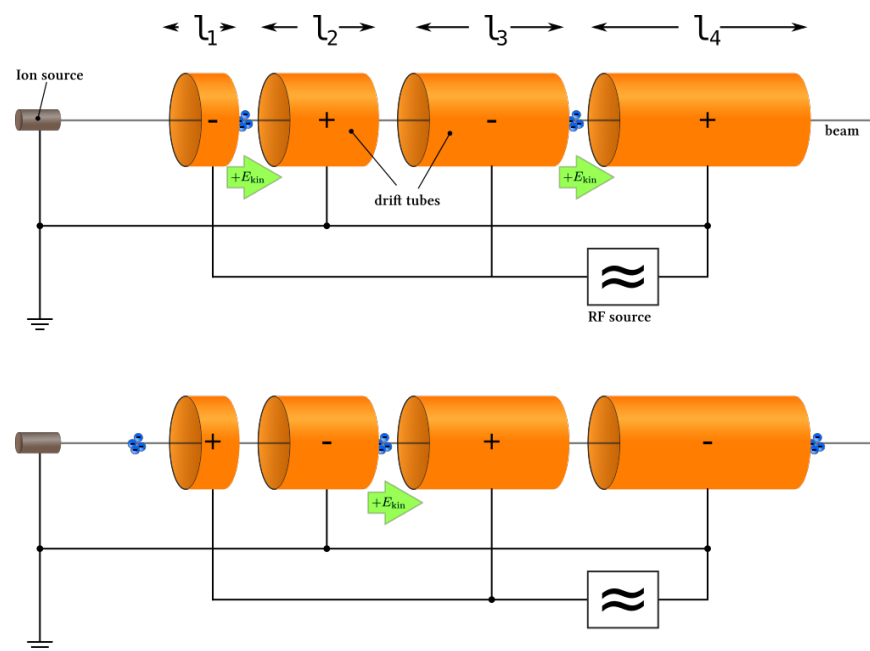
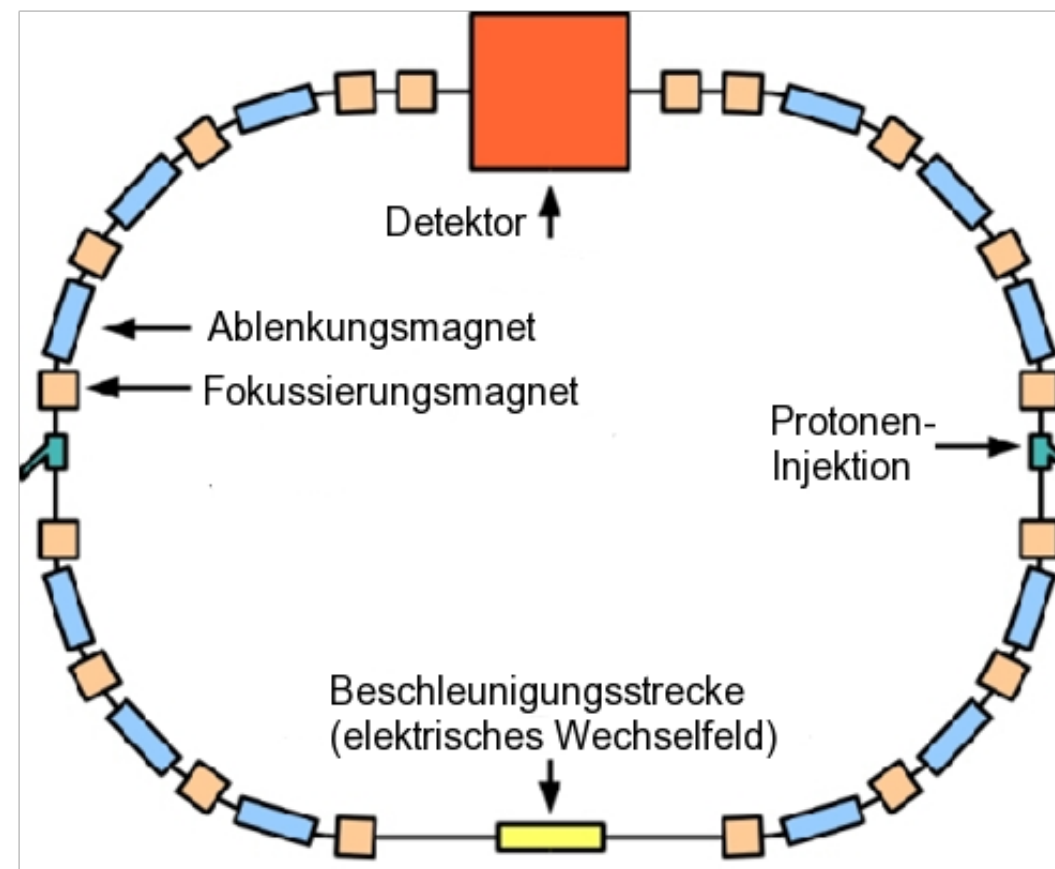


1.3 QUELLEN HOCHENERGETISCHER TEILCHEN



• Beschleunigung beschränkt durch Länge der Strecke

→ Kreis!



- Beschleunigungsstrecke innerhalb eines Ringes erlaubt wiederholte Beschleunigung
 - Beschränkung der erreichbaren Strahlenergie nur noch durch Magnetfeld, das Teilchen auf Kreisbahn halten muss
 - meist 2 gegenläufig beschleunigte Strahlen zur Erhöhung der erreichbaren Schwerpunktsenergie

weitere wichtige Größe eines Beschleunigers:

instantane Luminosität

gibt an, wie häufig Kollisionen stattfinden

→ Beziehung zwischen Wirkungsquerschnitt (\approx Wahrscheinlichkeit) einer bestimmten Reaktion (z.B. $pp \rightarrow H$) und Anzahl d. erwarteter Ereignisse

$$N = \sigma \cdot \int L(t) dt$$

Wirkungsquerschnitt
s. später

effektive Streufläche

Luminosität hängt von
Strahl / Kollisionsparametern ab:

Gauss-Profil

$$L = f \cdot \left(\frac{n_1 \cdot n_2}{A} \right) \rightarrow \text{effekt. Strahlquerschnitt}$$

Frequenz der Paketkollisionen

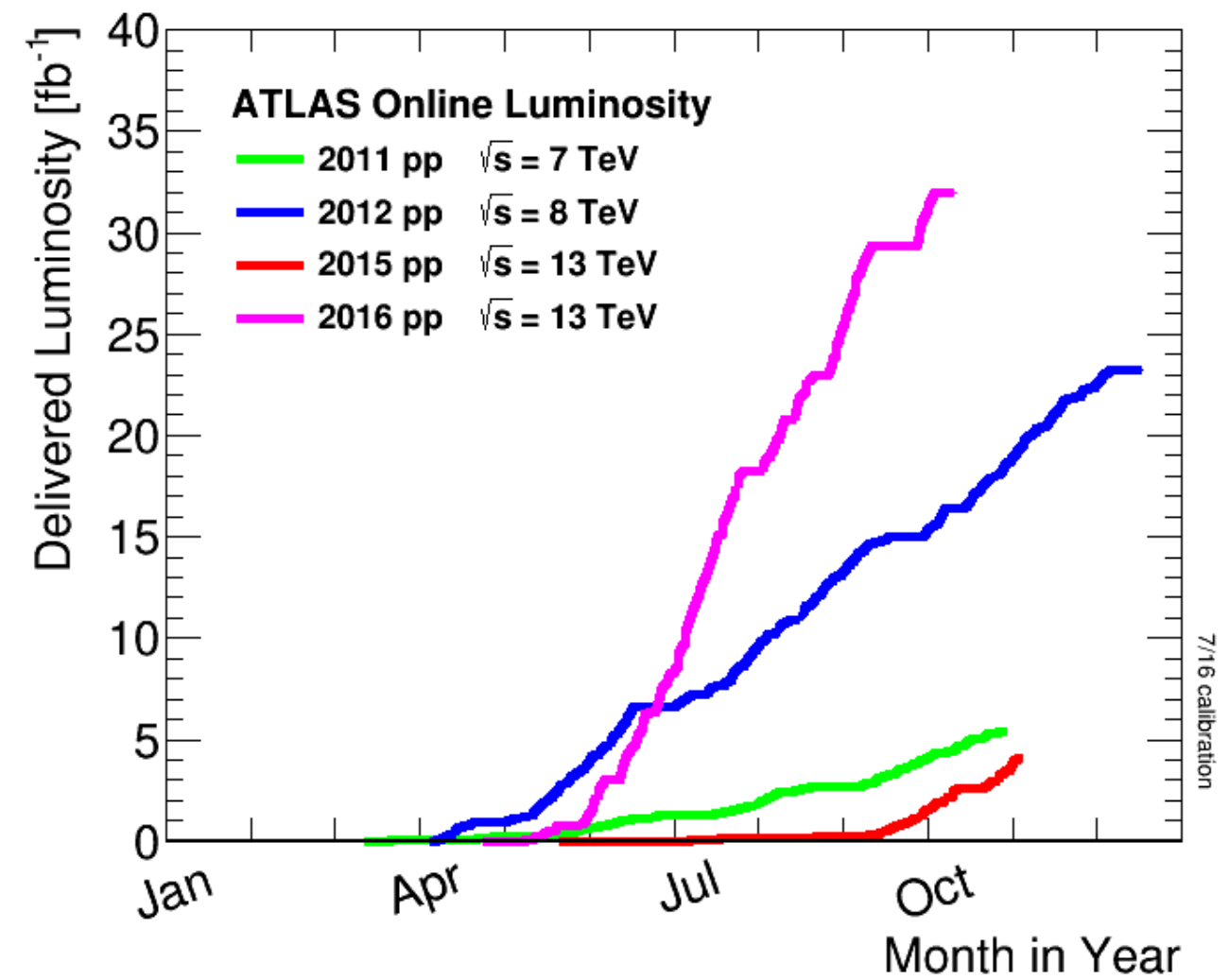
Anzahldichte der Teilchen pro Paket

\downarrow
 $=$

$$f \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{4\pi \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

↳ horizontales / vertikales
RMS des Gauss-Profiles

- integrierte Luminosität $L = \int \mathcal{L}(t) dt$
- \mathcal{L} wird oft nicht direkt berechnet (Profil schwierig), sondern mit Hilfe von Referenzprozesse bestimmt



- Koordinate mit Bezug zur Strahlachse
 - Transversalimpuls
 - Rapidität
- } → Übung

2.3 NICHTRELATIVISTISCHE QUANTENMECHANIK

(→ Kapitel 9.2 in QM-VL von Prof. Strunz)

zeitabhängige Störungstheorie

- Füge Störungs term in Hamiltonian ein, der Übergänge zwischen den sonst asymptotisch freien Zustände $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$ induziert:

$$H(t) = H_0 + V(t) \quad \text{z.B. mit } V(t) = V \cdot \theta(t)$$

(zeitlich konstante Störung)

mit Beschränkung auf 1. Ordnung

↳ "Fermis Goldene Regel" für die Übergangsrate von Zustand $i \rightarrow f$
(initial) (final)

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

Übergangsmatrixelement

$$T_{fi} := \langle f | V | i \rangle$$

Zustandsdichte der erreichbaren Zustände

$$\rho(E_i) = \left. \frac{dn}{dE} \right|_{E_i} \quad \text{in Energiebereich } E_i \rightarrow E_i + dE$$

alternative Schrittweise vor Integration:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn$$

↳ Zahl der Endzustände mit $E_n \in [E, E + dE]$
("Phasenraum")

• nicht-relativistisches Phasenraumelement

für Umwandlung $\vec{P}_{in} \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_N$

$$dn = (2\pi)^3 \delta^3\left(\vec{P}_{in} - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i\right)$$

$$\cdot \prod_{i=1}^N \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3}$$

→ Differential für
N anslaufende Impulse

aus Normierung $\int \psi^\dagger \psi d^3x \stackrel{!}{=} 1$

3.2 WIRKUNGSQUERSCHNITT & FERMI'S GOLDENE REGEL

- Reaktionsrate pro Target-Teilchen hängt von Zahl der einfallenden Teilchen ("Fluss" ϕ [$\frac{1}{m^2 s}$]) und der effektiven Querschnittsfläche der betrachteten Reaktion ab ("Wirkungsquerschnitt" σ)

$$\Gamma_b = \sigma \cdot \phi_a$$

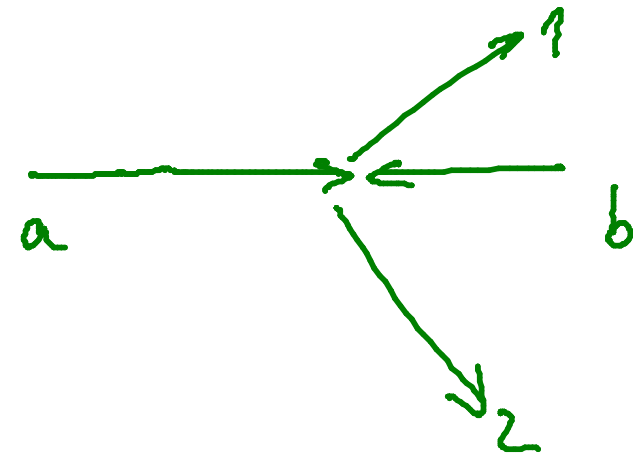
$$\hookrightarrow \sigma = \frac{\Gamma_b}{\phi_a} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Zeiteinheit und Targetteilchen}}{\text{Zahl der einlaufenden Teilchen pro Zeiteinheit}}$$

- experimentell: - Fluss ϕ_a bestimmt durch Luminosität des Strahls, siehe 1.3
- Reaktionsrate aus Zahl der Streuevents pro Zeit

$$\hookrightarrow \sigma = \text{Messgröße}$$

• theoretisch: QM Übergangsrate für $i \rightarrow f$ (z.B. $a+b \rightarrow 1+2$)

→ Fermis Goldene Regel



i) Relativistische Umformulierung

- Normierung der Wellenfunktion $\int \psi \psi^* d^3x \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow \int \psi' \psi'^* d^3x \stackrel{!}{=} 2E$

- Lorentz-invariantes Matrixelement $M_{fi} := \langle f' | V | i' \rangle = (2E_1 \cdot 2E_2 \dots)^{\frac{1}{2}} T_{fi}$

$$\Rightarrow \Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a 2E_b} \int |M_{fi}|^2 \underbrace{\delta(E_a + E_b - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)}_{\text{LIV}} \underbrace{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}}_{\text{Lorentz-inv. Phasenraum-element}}$$

← einziger nicht Lorentz-inv. Term

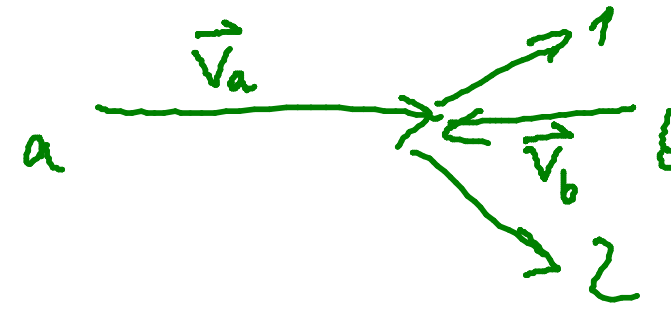
← Lorentz-inv. ME

← Lorentz-inv. Phasenraum-element

↔ für WQ Kombination mit Fluss ϕ

$$d\text{LIPS} = \prod_{i=1}^N \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \prod_{i=1}^N \frac{d^4p_i}{(2\pi)^3} \cdot \delta(p_i^2 - m_i^2)$$

ii) Einlauf der Teilchenfluss



- Fluss $\phi = n_a (v_a + v_b)$

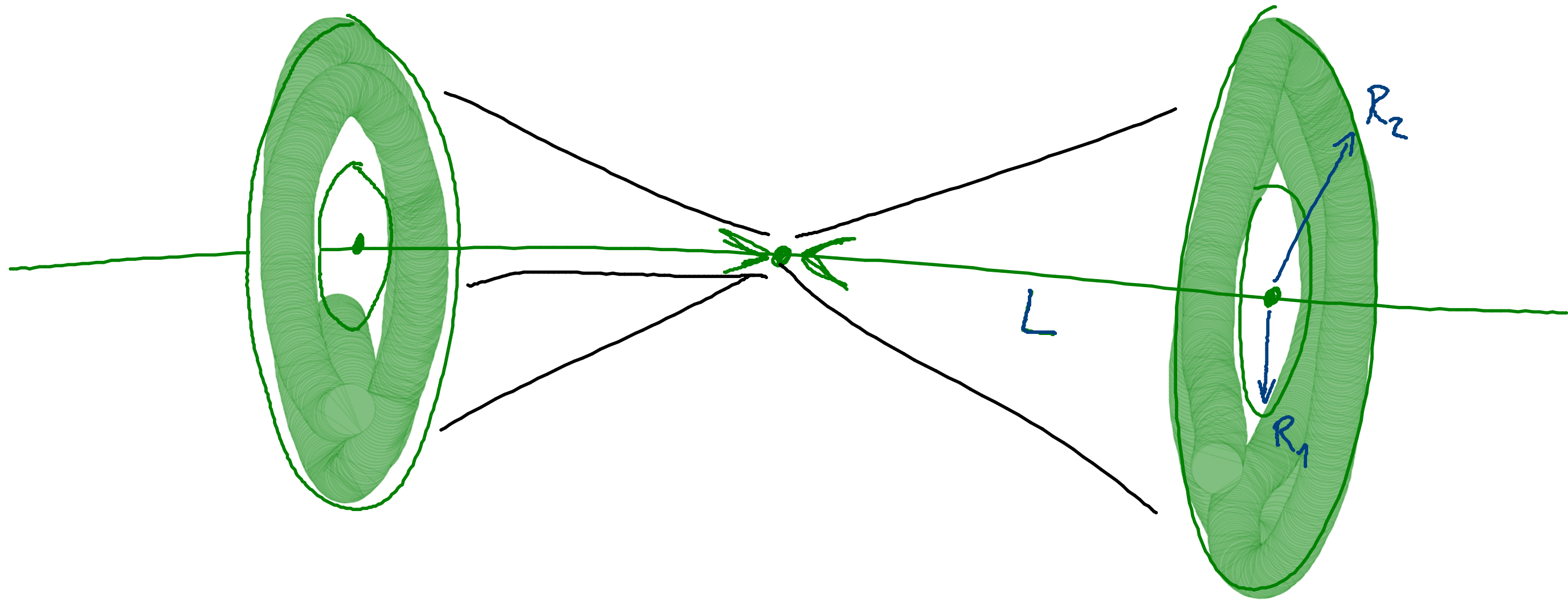
Teilchendichte \swarrow relative Geschwindigkeit \searrow

↳ normiere auf 1 Teilchen pro Einheitsvolumen, $n_a \equiv 1$

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{(v_a + v_b)} = \frac{(2\pi)^4}{2E_a 2E_b (v_a + v_b)} \cdot \int \dots$$

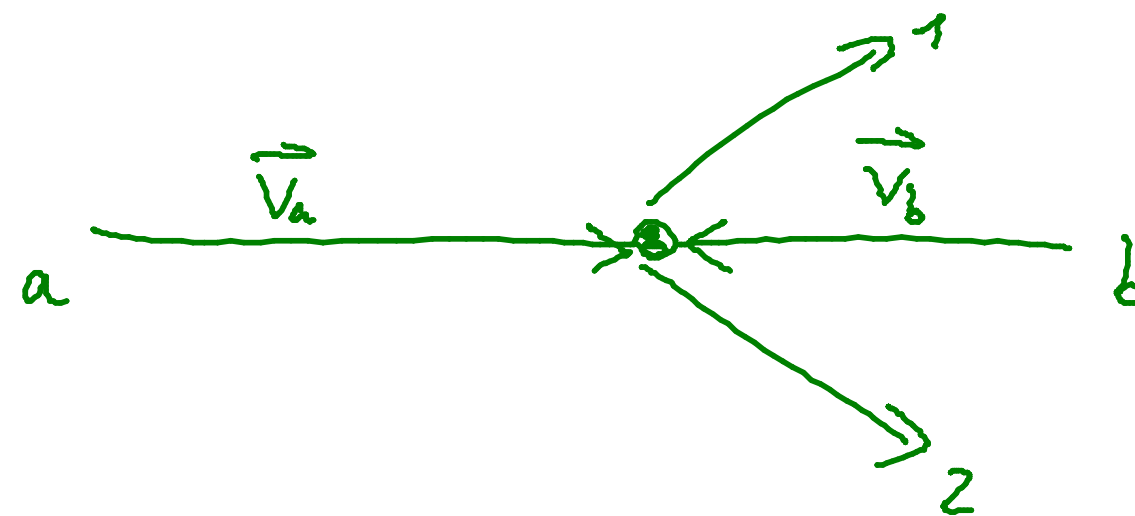
$\equiv F$ (Lorentz-invarianter Flussfaktor)

→ Wirkungsquerschnitt σ als Lorentz-invariante Beschreibung des Streuprozesses
und Messgröße



i) Übergangsrate relativistisch

$$\Gamma_{fi} = \dots$$



ii) Einlaufender Teilchenfluss

$$\phi = n_a \cdot n_b \cdot (|\vec{v}_a| + |\vec{v}_b|)$$

↳ normiere auf 1 Teilchen pro Einheitsvolumen $n_a = n_b = 1$

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{(|\vec{v}_a| + |\vec{v}_b|)} = \frac{(2\pi)^4}{\underbrace{2E_a 2E_b (|\vec{v}_a| + |\vec{v}_b|)}_F} \cdot \int \underbrace{|\mathcal{M}_{fi}|^2}_{ME} \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2) \delta(\vec{p}_a + \vec{p}_b - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \underbrace{\frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdot \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}}_{dLIPS}$$

4.3 FEYNMAN - DIAGRAMME

- Bewegungsgleichung ergibt sich aus folgender Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + iq A_\mu) \psi$$

- ↳ Potential V das wir für Übergangmatrixelemente benötigen:

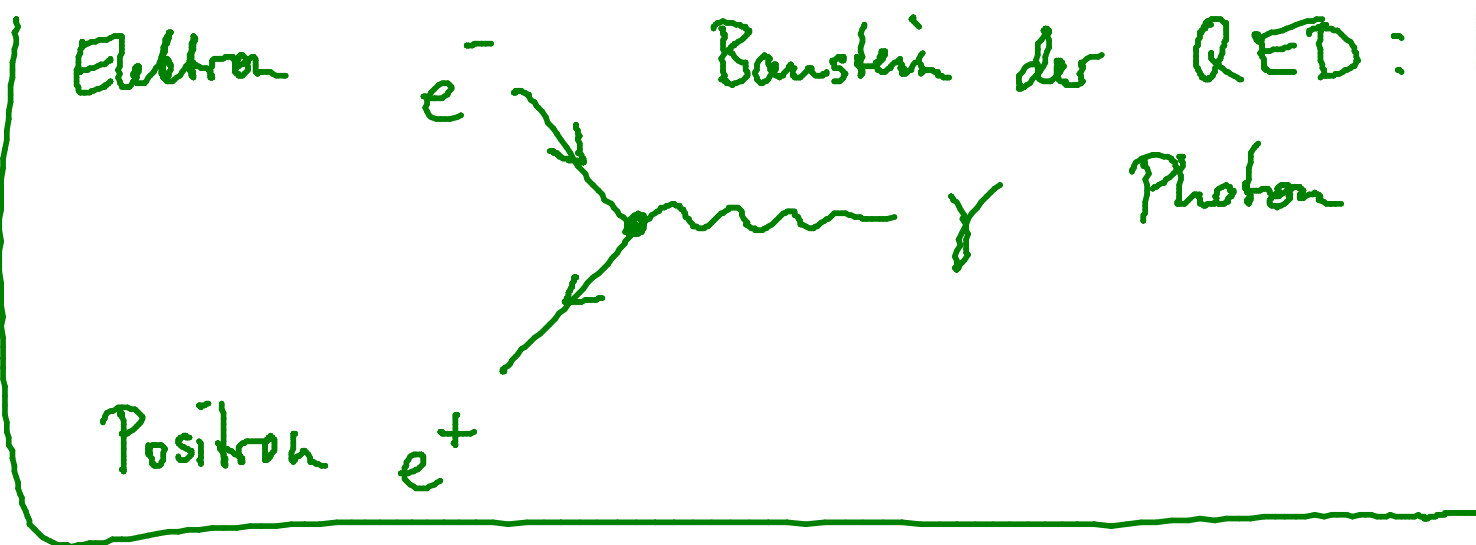
$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = |\langle f | V | i \rangle|^2$$

Wie berechnen wir dieses Matrixelement im WW-Teilchen-Bild?

- Grundidee: (i) Zeichne alle möglichen Diagramme, für die i und f mit bestimmten Bausteinen verbunden werden können. („Feynman-Diagramme“)

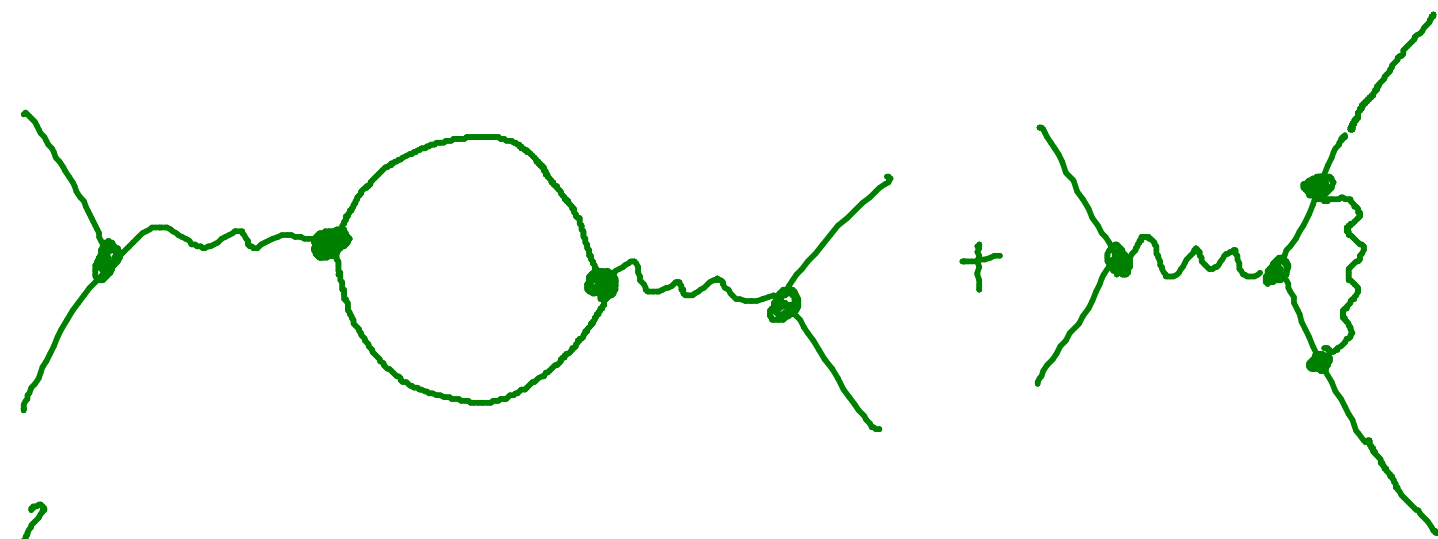
(ii) Diagramm $\xrightarrow[\text{(statt QFT)}]{\text{Kochrezept}}$ komplexe Zahl = \mathcal{M}_{fi}

Beispiel



$\hookrightarrow |M_{fi}|^2 =$

$+ \dots +$



Problem: Es gibt beliebig viele Diagramme!

Lösung: die komplizierteren Diagramme tragen kaum bei, weil:


$$= -ie\gamma^\mu \sim \sqrt{\alpha} \approx \sqrt{\frac{1}{137}}$$

\Rightarrow mit jedem zusätzliche Vertex wird $|M_{fi}|^2$ um $\frac{1}{137}$ unterdrückt

\Rightarrow „Störungsreihe“ kann abgebrochen werden

• In diesem Kurs: nur Diagramme der niedrigste Ordnung mit der $i \rightarrow f$ möglich ist







• Für jede WW gibt es eigene Bausteine und Regeln

\rightarrow wir betrachte erstmal die für QED

4.3.1 Feynman-Regel der QED


Feynman-Diagramme bestehen aus 3 Teilen:

(i) Äußere Linien (ein- und auslaufende Teilchen einer Streuung)

Art	Diagramm	Formel	→ später (gleich)
einlaufendes Fermion		$u(p)$	
auslaufendes Fermion		$\bar{u}(p)$	
einlaufendes Antifermion		$\bar{v}(p)$	
auslaufendes Antifermion		$v(p)$	
einlaufendes Photon		$\epsilon_\mu(p)$	
auslaufendes Photon		$\epsilon_\mu^*(p)$	

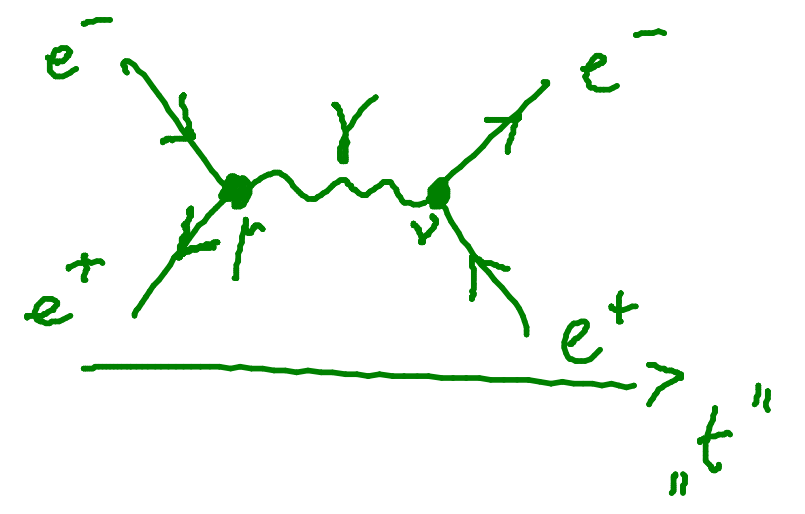
(ii) Innere Linie (intermediäre Teilchen, "Propagatoren")

Photon-Propagator 

Fermion-Propagator 

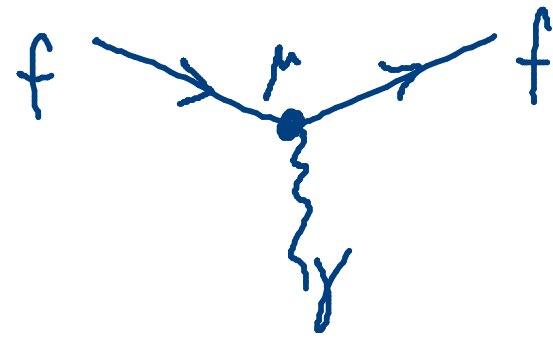
$$-\frac{i g^{\mu\nu}}{p^2}$$

$$(\pm) i \frac{(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2}$$



(iii) Interaktionspunkte („Vertices“)

QED - Vertex



$$-i Q_f e \cdot \gamma^\mu$$

(+ rotierte Varianten \rightarrow \leftarrow \downarrow)

• Berechnung: $-i M_{fi} =$ Produkt der Einzelterme

Achtung: Reihenfolge! (γ -Matrizen, Spinoren)

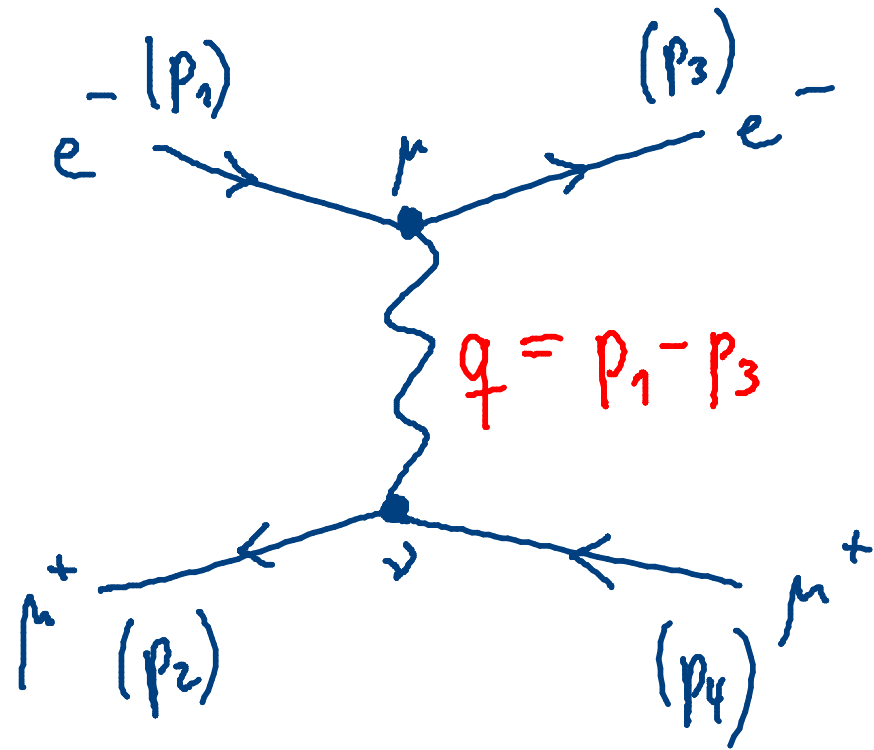
\hookrightarrow jede Fermionenlinie entgegen der Pfeilrichtung „ablaufen“

4.3.2 Beispiele

$$e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$$



=



1. Fermionlinie (Elektron):

$$\bar{u}(p_3) (+ie\gamma^\mu) u(p_1)$$

2. Fermionlinie (Myon)

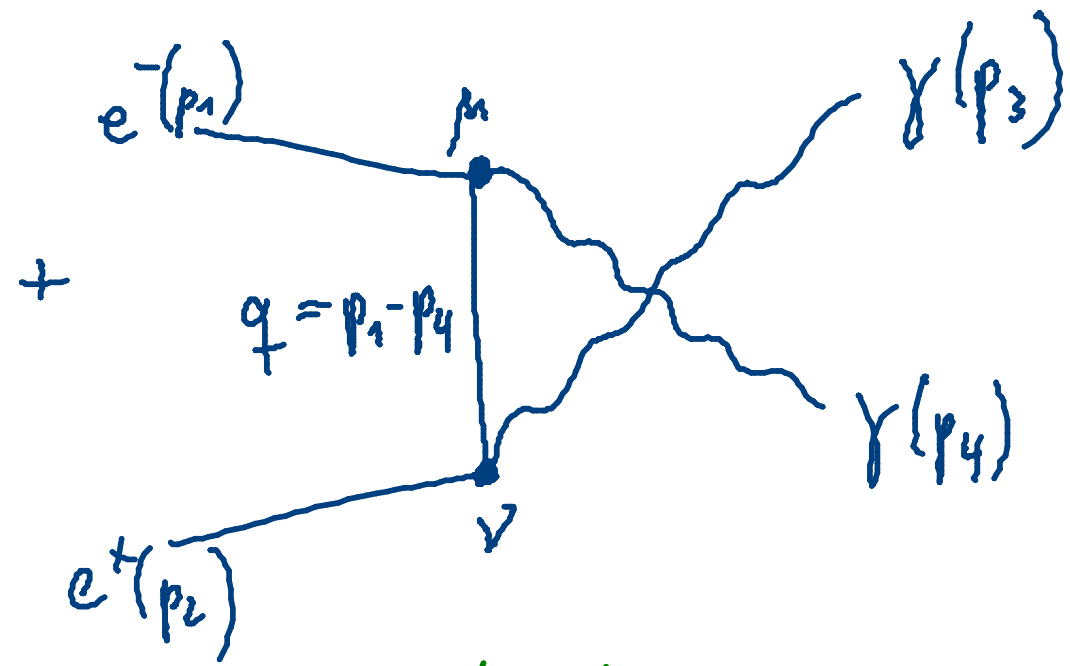
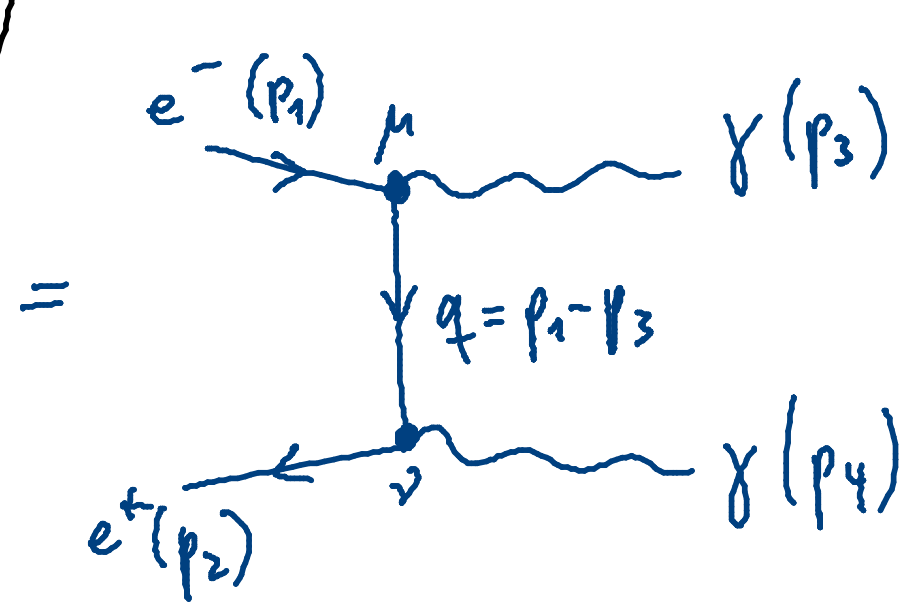
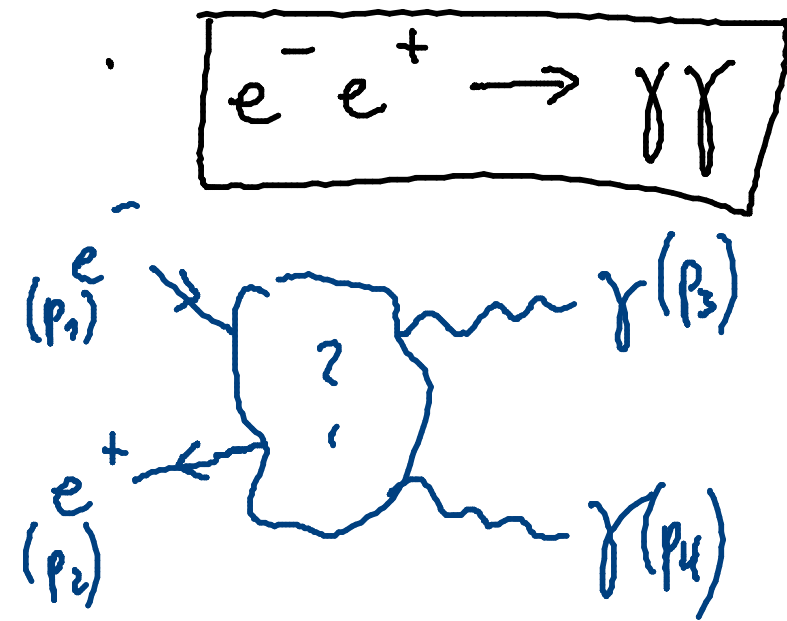
$$\bar{v}(p_2) (+ie\gamma^\nu) v(p_4)$$

3. Photon - Propagator

$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2}$$

$$(\dots) (\dots) (\dots) (\dots)$$

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \left[\bar{u}(p_3) (ie\gamma^\mu) u(p_1) \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{v}(p_2) (ie\gamma^\nu) v(p_4) \right]$$



$$\begin{aligned}
 -i M_{fi} = & \bar{v}(p_2) (ie\gamma^\nu) \left(-i \frac{\gamma^\alpha (p_1 - p_3)_\alpha + m}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} \right) (ie\gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu^*(p_3) \epsilon_\nu^*(p_4) + \\
 & \bar{v}(p_2) (ie\gamma^\nu) \left(-i \frac{\gamma^\alpha (p_1 - p_4)_\alpha + m}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \right) (ie\gamma^\mu) u(p_1) \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_\nu^*(p_3)
 \end{aligned}$$

Achtung: bei mehreren Diagrammen kohärent addieren:

$$|M|^2 = \left| \mathcal{I} + \mathcal{K} \right|^2 \neq |\mathcal{I}|^2 + |\mathcal{K}|^2$$

4.3.3 Eigenschaften von Feynman-Diagrammen

- "niedrigste Ordnung": Diagramme die den ggf. Anfangs- & Endzustand mit minimaler Zahl von Vertices verbinden
(= geringste Potenz von Kopplungskonstanten α)
- Teilchen/Antiteilchen ergibt sich aus Pfeilrichtung bzgl. der "Zeitachse" (hier: horizontal)
- an allen Vertices gilt Energie/Impulserhaltung & Ladungserhaltung
- innere Linien $\rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2}$ - Terme in Propagatoren

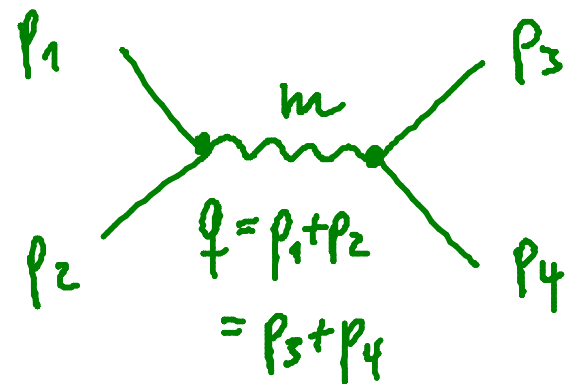
• innere Linien $\rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2 + \dots}$ - Terme in Propagatoren

falls Zusammenhang mit Mandelstam-Variablen $p^2 = s, t, u$ (\rightarrow „s, t, u-Kanal“)

\Rightarrow Besonders groß bei „Resonanz“-Kinematik, d. h. falls $p^2 \approx m^2$

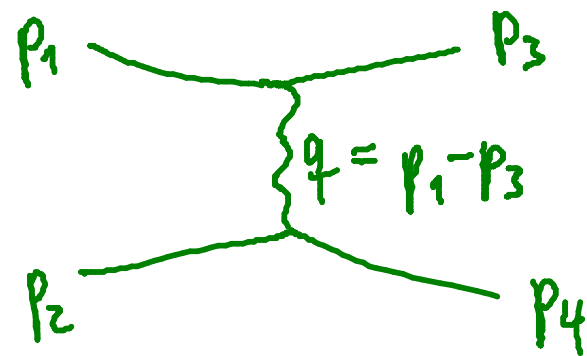
z. B.

s-Kanal



resonant bei $s^2 = (p_3 + p_4)^2 \approx m^2$

t-Kanal



resonant bei $t^2 = (p_1 - p_3)^2 \approx m^2$

• Crossing-Symmetrie

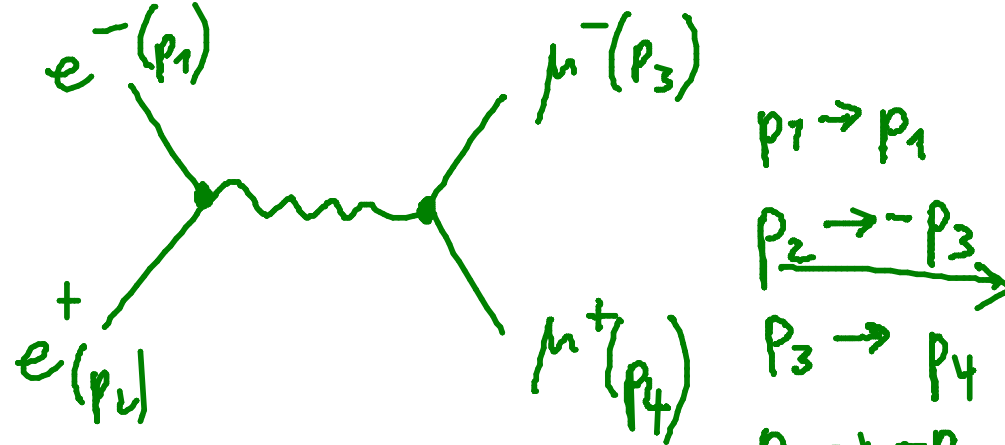
Für erlaubten Prozess $A + B \rightarrow C + D$ sind auch immer alle Prozesse erlaubt, wo Teilchen als Antiteilchen auf die andere Seite geschoben werden

z.B. $A + \bar{C} \rightarrow \bar{B} + D$ oder $A \rightarrow C + D + \bar{B}$

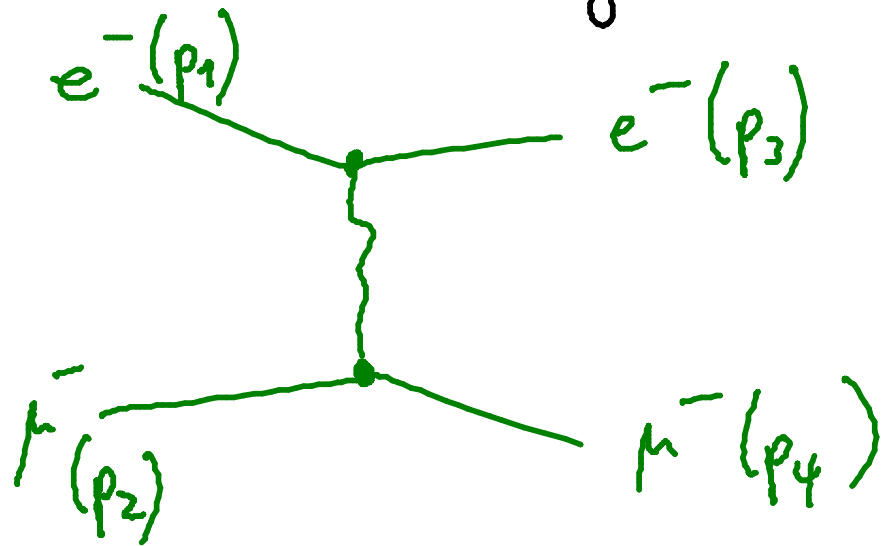
(modulo Kinematik)

$\rightarrow |M|^2$ wiederverwendbar mit entspr. Impulsubstitutionen (≙ Tausch von Mandelstam-Variablen) und -deutung

z.B.



$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_1 \\ p_2 &\rightarrow -p_3 \\ p_3 &\rightarrow p_4 \\ p_4 &\rightarrow -p_2 \end{aligned}$$



↪ Effekt auf Mandelstam-Variablen

s. Übung

5.2 DIE STARKE WECHSELWIRKUNG: QUANTEN CHROMODYNAMIK

weitere Wechselwirkungen entstehen nach dem gleichen Prinzip,
aber mit anderer Ladung und anderer Eichsymmetrie

QED

q



QCD

$$g_s \cdot \hat{T}_a$$

= 3x3 Matrizen
a = 1...8

$$\hat{T}_a = \frac{1}{2} \hat{\lambda}_a$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(Gell-Mann-Matrizen)

⇒ Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i g_s \hat{T}_a \theta_a(x)} \cdot \psi(x)$$

3x3 Matrix

3 Komponenten!

⇒ stark wechselwirkende Fermionen bekommen zusätzliche Struktur = starke Ladung (Farbladung)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{rot} \\ \psi_{grün} \\ \psi_{blau} \end{pmatrix}$$

• Bedeutung der Eichtransformation? Rotation im „Farb“raum:

$$\lambda_1 \cdot \mathbb{Z}_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}_{\text{grün}}$$

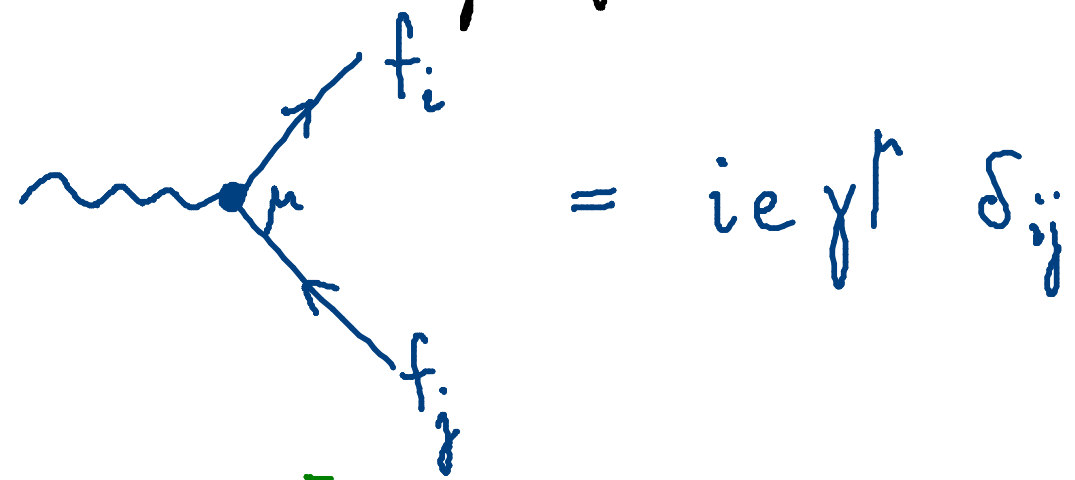
• Ähnlichkeit zum Spin (Pauli-Matrizen): nicht alle $\mathfrak{su}(3)$ -Matrix kommutieren

↳ kompatible Observable hier z.B. λ_3 und λ_8

„dritte Komponente des starken Isospins“
 $\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \hat{\lambda}_3$

„starke Hyperladung“
 $\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$

el.-magn. Wechselwirkung fast unverändert (auch für farbgeladene Fermionen)

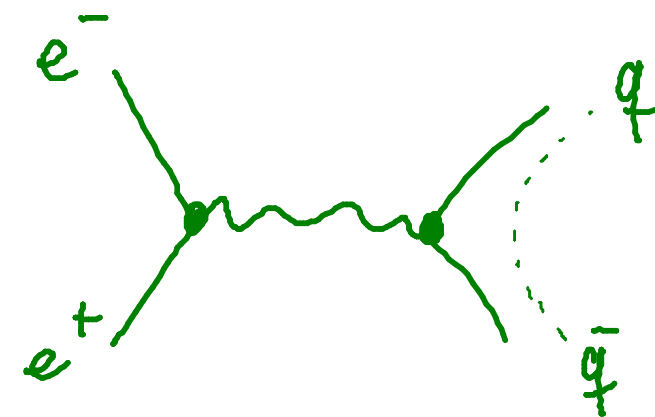
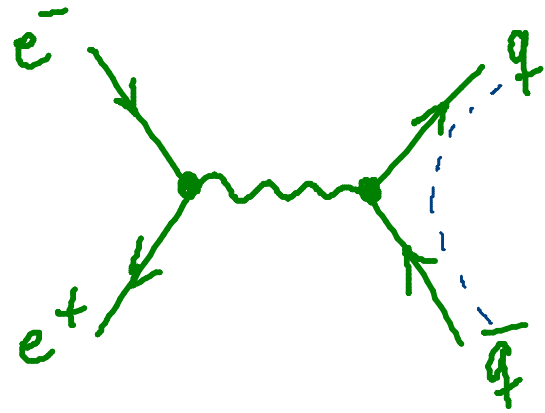
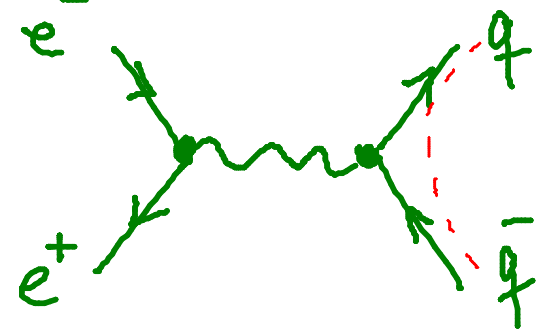


$$= ie\gamma^\mu \delta_{ij}$$

(Erhaltung der Farbladung)

Bsp.:

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$$



ähnlich zu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ aber 3 Farben & andere el. Ladung

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (\text{s. 4.4}) \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) &= 3 \times \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \times \sum_f Q_f^2 \end{aligned} \right.$$

$$R_\mu \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

