Heterotic and bosonic string amplitudes from scattering equations

Fei Teng

Departement of Physics and Astronomy, Uppsala University, Sweden

UPPSALA UNIVERSITET

Summary of results

- Any rational analytic string integrand with $SL(2)$ weight two can be reduced to a logarithmic function (only $d\log$ singularity at boundaries) via integration-by-parts relations.
- The logarithmic function is also the CHY integrand for a field-theory amplitude that reproduces the string amplitude after double copy with the Z integral.
- Applying to heterotic/open-bosonic string, we find
  - a recursive expansion of the string integrand that lands on a logarithmic function.
  - a closed formula for the CHY integrand of $(DF)^2 + \mathrm{YM} + \phi^3$ theory.

The set-up

- The string integrand, where $\mathcal{K}(\bar{z})$ is a type-I correlator,

$$\text{open-bosonic:} \qquad \mathcal{M}_n(\rho) = \int_\rho d\mu^{\text{string}} \mathcal{I}_n^{\text{string}}(z)\,,$$

$$\text{heterotic:} \qquad \mathcal{M}_n = \int |d\mu^{\text{string}}|^2 \mathcal{I}_n^{\text{string}}(z)\,\mathcal{K}(\bar{z})\,.$$

- For r gluons and $m+1$ traces:

$$\mathcal{I}_n^{\text{string}} = R(i_1,\ldots,i_r)\prod_{j=1}^{m+1}\mathrm{PT}(W_i)\,,$$

$$R(i_1,\ldots,i_r) = \sum_{(I)(J)\ldots(K)\in S_r} \mathcal{R}_{(I)}\mathcal{R}_{(J)}\ldots\mathcal{R}_{(K)}\,,$$

$$\mathcal{R}_{(i)} = \sum_{j\neq i}\frac{\epsilon_i\cdot k_j}{z_{ij}}\,, \qquad \mathcal{R}_{(ij)} = \frac{\epsilon_i\cdot\epsilon_j}{\alpha' z_{ij}^2}\,, \qquad \mathcal{R}_{(I)} = 0 \text{ otherwise}\,.$$

String integrand recursive expansion

- **Main formula:**

$$R(i_1,\ldots,i_r)\prod_{j=1}^{m+1}\mathrm{PT}(W_j) \overset{\text{IBP}}{\cong} \frac{\mathrm{PT}(W_{m+1})}{\prod_{j=1}^{m}(1-s_{W_j})}\left[\alpha'^m \mathcal{T}_{W_{m+1}}(i_1,\ldots,i_r,W_1,\ldots,W_m) - \sum_{\substack{\mathsf{A}\in\mathbb{P}[i_1,\ldots,i_r,W_1\ldots W_m]\\ |\mathsf{A}|<r+m}} (-1)^{|\mathsf{A}|}\mathcal{J}[\mathsf{A}]\right]. \tag{1}$$

- $\mathcal{T}_{W_{m+1}}$ is the logarithmic form CHY integrand for Yang-Mills-scalar amplitudes.
- Given a partition A that contains s singleton blocks, in which t of them are gluons and the rest traces, $\mathsf{A} = \{\mathsf{a}_1,\ldots\mathsf{a}_t,\mathsf{b}_{t+1},\ldots,\mathsf{b}_s,\mathsf{A}_{s+1},\ldots\mathsf{A}_{|\mathsf{A}|}\}$,

$$\mathcal{J}[\mathsf{A}] = (-1)^t R(\mathsf{a}_1,\ldots,\mathsf{a}_t)\left[\prod_{j=t+1}^{s}(s_{\mathsf{b}_j}-1)\,\mathrm{PT}(\mathsf{b}_j)\right]\left[\prod_{j=s+1}^{|\mathsf{A}|}\mathcal{S}_0(\mathsf{A}_j)\right]. \tag{2}$$

- $\mathcal{S}_0(\mathsf{A}_j)$ fuses the gluons and traces in A_j into a single trace. Each $\mathcal{J}[\mathsf{A}]$ is a string integrand with less traces or gluons.

Multitrace CHY integrand for $(DF)^2 + \mathrm{YM} + \phi^3$

- Partition $\mathbb{P}$ and total partition $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{P}[\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\}] = \Big\{\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\}\},\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\},\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2\},\mathsf{a}_3\},\{\{\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_1\},\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_2\}\Big\}\,,$$

$$\mathbb{T}[\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\}] = \Big\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\},\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2\},\mathsf{a}_3\},\{\{\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_1\},\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_2\},\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\}\},\{\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2\},\mathsf{a}_3\}\},\{\{\{\mathsf{a}_2,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_1\}\},\{\{\{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_3\},\mathsf{a}_2\}\}\Big\}\,.$$

- If $\mathsf{A}_i = \{\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\ldots,\mathsf{a}_r\}$ contains only singleton blocks, we define

$$\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}_i) = \mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{a}_1,\mathsf{a}_2,\ldots,\mathsf{a}_r) = \frac{1}{1-s_{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\cdots\mathsf{a}_r}}\sum_{\pi\in S_r/\mathbb{Z}_r}\langle\mathsf{a}_{\pi(1)},\mathsf{a}_{\pi(2)},\ldots,\mathsf{a}_{\pi(r)}\rangle\,, \qquad \mathcal{S}_0(\mathsf{A}_i) = \sum_{\pi\in S_r/\mathbb{Z}_r}\langle\mathsf{a}_{\pi(1)},\mathsf{a}_{\pi(2)},\ldots,\mathsf{a}_{\pi(r)}\rangle\,,$$

$$\mathcal{S}_{\alpha'}(W) = \mathcal{S}_0(W) = s_W \mathrm{PT}(W)\,, \qquad \mathcal{S}_{\alpha'}(i) = \mathcal{S}_0(i) = -C_i\,.$$

- If A_i contains nested curly brackets, say $\mathsf{A}_i = \{\mathsf{A}'_1,\mathsf{A}'_2,\ldots,\mathsf{A}'_j,\mathsf{a}_{j+1},\ldots,\mathsf{a}_r\}$,

$$\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}_i) = \mathcal{S}_{\alpha'}\big(\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}'_1),\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}'_2),\ldots,\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}'_j),\mathsf{a}_{j+1},\ldots,\mathsf{a}_r\big)\,.$$

- Fusion of traces and gluons, where $z_{b_1,\mathsf{G}_1,a_2} = z_{b_1 i_1}z_{i_1 i_2}\cdots z_{i_s a_2}$ and $(f_{\mathsf{G}_1})_{\mu\nu} = (f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_s})_{\mu\nu}$,

$$\langle W_1,W_2,\ldots,W_r\rangle = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}\sum_{a_i,b_i\in W_i}\frac{s_{b_i a_{i+1}}z_{b_i a_i}}{z_{b_i a_{i+1}}}\mathrm{PT}(W_i)\right], \qquad \langle W_1,\overbrace{i_1,\ldots,i_s}^{\mathsf{G}_1},\ldots,W_r,\overbrace{j_1,\ldots,j_\ell}^{\mathsf{G}_r}\rangle = \frac{\alpha'^r}{2}\left[\prod_{i=1}^{r}\sum_{a_i,b_i\in W_i}\frac{(k_{b_i}\cdot f_{\mathsf{G}_i}\cdot k_{a_{i+1}})z_{b_i a_i}}{z_{b_i,\mathsf{G}_i,a_{i+1}}}\mathrm{PT}(W_i)\right].$$

- **The CHY integrand:**

$$\mathcal{I}_n^{\text{CHY}}(W_1,\ldots,W_{m+1},i_1,\ldots,i_r) = \frac{\mathrm{PT}(W_{m+1})}{\prod_{i=1}^{m}(1-s_{W_i})}\sum_{\mathsf{A}\in\mathbb{T}[W_1\ldots W_m,i_1\ldots i_r]}(-1)^{|\mathsf{A}|}\prod_{j=1}^{|\mathsf{A}|}\mathcal{S}_{\alpha'}(\mathsf{A}_j)\,. \tag{3}$$

 fei.teng@physics.uu.se