

Perguntas e Respostas sobre os raios cósmicos de energia extrema

- Guia do Professor -

Introdução

Os raios cósmicos são um assunto com grande capacidade de interessar e motivar. Estabelecendo pontes entre a física de partículas e a astrofísica, são um percurso natural do infinitamente grande ao infinitamente pequeno. São, além disso, parte da radiação ambiente, e visualizáveis com relativa facilidade. Exemplo disso é a câmara de faíscas construída no LIP para fins pedagógicos e que já foi levada a escolas com esse propósito. A tudo isto se juntam 100 anos de uma história rica e fascinante, celebrados em 2012. Consciente do grande potencial dos raios cósmicos em termos de comunicação, o Observatório Pierre Auger decidiu tornar públicos 1% dos dados que está a recolher desde 2004. Estes dados estão disponíveis na página do “Public Event Explorer” (também referida neste Guia como “página dos dados públicos de Auger”) que é actualizada diariamente.

Este guia destina-se a ser um fio condutor na vossa exploração dos dados públicos de Auger. Foi desenvolvido pela aquipa do LIP que integra o Observatório Pierre Auger para alunos do ensino secundário (16 a 18 anos). Deve ser usado em conjunto com o material disponível nas páginas WEB de Auger, em particular nas páginas de educação. Estas notas pretendem clarificar o âmbito e objectivos do guia, bem como partilhar a experiência já existente da sua utilização e as expectativas para o futuro. Além de trabalhar conceitos fundamentais na área dos raios cósmicos e da física de partículas, esta actividade pretende ser uma oportunidade para estabelecer contacto com um assunto de investigação de ponta (de facto, inúmeras perguntas sobre os raios cósmicos de energia mais alta continuam hoje sem resposta) propondo um tipo de trabalho de investigação próximo da realidade, em que se combinam raciocínios mais formais de lógica dedutiva com o método indutivo, em procuras mais ou menos guiadas. Por outro lado, os conceitos de física apresentados levam naturalmente a ferramentas e conteúdos matemáticos que integram os *Curricula* dos estudantes. O guia pretende assim ser uma ajuda nas disciplinas de Matemática e de Física, ao nível da consolidação das aquisições mais avançadas e porventura menos trabalhadas.

Utilização do guia nas escolas

Desde 2009, o Guia tem sido usado no quadro do programa “Ocupação científica de jovens em férias” do Ciência Viva, em que os alunos passam cerca de duas

semanas num laboratório de investigação, neste caso o LIP, realizando actividades directamente relacionadas com os projectos de investigação do laboratório. O guia é agora, pela primeira vez, proposto como ferramenta de trabalho a ser usada nas escolas, ao longo de todo o ano lectivo. Neste contexto, o apoio directo será evidentemente dado pelos professores. Pareceu-nos, pois, conveniente disponibilizar um guia do professor que facilitasse essa tarefa. Neste novo contexto de utilização, uma relação estreita entre os professores e os investigadores parece-nos indispensável. Será realizada uma acção de formação dirigida aos professores, a decorrer no LIP. Os professores participantes e/ou que tenham alunos a realizar estas actividades beneficiaram, em seguida, de um acompanhamento próximo por parte dos investigadores - via email, SKYPE ou presencial. Por outro lado, o “feedback” dos professores será sem dúvida essencial para a aperfeiçoamento e alargamento das actividades propostas. Parece-nos ainda importante a realização de seminários nas escolas e, em particular, de demonstrações simples que tornem mais concreto o conceito de raio cósmico, evidenciando a sua existência e a possibilidade da sua detecção. Estas demonstrações poderão ser feitas usando a câmara de faíscas do LIP ou outros dispositivos que estejam disponíveis.

Organização do guia

O guia está organizado nas seguintes partes:

1. O espectro dos raios cósmicos
2. Como se desenvolvem os chuveiros de raios cósmicos
3. Como se detectam os chuveiros de raios cósmicos
4. Como se medem os raios cósmicos de energia extrema
5. O que nos dizem estes dados sobre os raios cósmicos de energia extrema

Para cada secção, aqui se resumem objectivos, requisitos prévios e competências a adquirir. De forma muito genérica, as secções 1 e 2 visam a aquisição de conhecimentos gerais sobre os raios cósmicos e a sua detecção. Os raios cósmicos como radiação ambiente (sua natureza, abundâncias e interacção com a atmosfera) são aqui discutidos. A seção 3 apresenta o Observatório Pierre Auger e os métodos de detecção de raios cósmicos nele utilizados. Depois deste trabalho genérico de aquisição dos conceitos e ferramentas necessários (que pode ser feita de forma mais ligeira ou mais completa) a exploração directa dos dados públicos de Auger é feita nas secções 4 e 5. É de salientar que o guia pode ser usado com diferentes níveis de profundidade, cabendo ao professor determinar em que situações é necessário

“saltar” ou simplificar, e em que casos deve ajudar os alunos a ir mais longe, fazendo novas propostas.

1) O espectro dos raios cósmicos

Na secção 1 são introduzidos conceitos básicos sobre raios cósmicos. O espectro de energia dos raios cósmicos é apresentado e explorado. Esta secção pode ser vista como um trabalho de “aquecimento” em que os alunos se familiarizam com os conceitos e o tipo de trabalho que lhes é pedido ao longo do guia, necessitando por isso de um acompanhamento próximo. Do ponto de vista dos conteúdos, além de pretender a familiarização com os raios cósmicos, esta secção lida com conceitos como ordens de grandeza, unidades, fluxos, ângulos sólidos. É de salientar a utilização de gráficos com escalas logarítmicas que, sendo imprescindíveis, podem ser explicadas de forma mais ou menos formal.

2) Como se desenvolvem os chuviros de raios cósmicos

A secção 2 introduz noções básicas sobre partículas e interações e explora modelos simples para descrever o desenvolvimento de chuviros de raios cósmicos na atmosfera. Se trabalhada na totalidade, é sem dúvida a secção mais formal, exigindo alguma matemática de base (logarítmos, exponenciais, trigonometria). De facto, podemos dizer que esta secção segue de perto o que é exigido nos programas aos alunos do 12^o ano, podendo ser vista como um conjunto bem motivado de exercícios. É de notar que alunos com os conhecimentos prévios adequados tendem a apreciar o desafio e o encadeamento lógico, passo a passo, em que se vão compreendendo os chuviros. Nos outros casos, esta secção pode ser “saltada”, reduzida às primeiras alíneas ou necessitar de um “empurrão”. Os conceitos de raios cósmico primário, que chega ao topo da atmosfera, de chuviro ou cascata, e de partícula secundária – partícula do chuviro que chega ao chão e integra, de facto, a radiação ambiente, devem ser transmitidos, ainda que de forma simplificada.

3) Como se detectam os chuviros de raios cósmicos

A secção 3 vem como uma espécie de “intervalo”, a seguir ao maior formalismo da secção anterior – através da realização de actividade mais leves, é uma oportunidade para aprender sobre o Observatório Pierre Auger e explorar o seu sítio web. o conceito de amostragem e as técnicas de detecção são apresentadas. É importante o papel do professor na decisão de ir ou não mais longe – na procura da informação necessária, ou lançando novas propostas a partir daquelas que são feitas.

4) Como se medem os raios cósmicos de energia extrema

Na secção 4 propõe-se uma análise chuviro a chuviro. A pergunta base é: como é que, a partir do que medimos no chão (que ainda por cima é só uma amostragem) chegamos às características do raio cósmico primário que chegou ao topo da at-

mosfera? Pretende-se que os alunos compreendam as bases da reconstrução dos chuveiros sem entrarem em algoritmos demasiado complexos: que quantidades são medidas directamente em cada tanque? A partir delas, como podemos descobrir a direcção e o ponto de impacto no chão? Que indicações temos sobre a energia da partícula primária? Esta secção é muitas vezes considerada pelos alunos como o desafio mais interessante. Os objectivos precisos e o nível de acompanhamento necessário dependem muito do perfil dos alunos. Um pouco de trigonometria é indispensável.

5) O que nos dizem estes dados sobre os raios cósmicos de energia extrema

Na secção 5, passamos à análise estatística: todos os chuveiros são analisados em conjunto, são feitos gráficos de distribuição de variáveis. O conceito de histograma ou gráfico de frequências é aqui essencial. Material sobre o assunto está disponível no sítio de educação de Auger. Esta análise foi, regra geral, feita usando o Excel - excepto no caso de estudantes familiarizados com outras ferramentas, e que manifestaram o desejo de as utilizar. Nesta secção, aproximamo-nos dos alguns dos resultados de física publicados por Auger. O espectro de energia e as direcções de chegada dos raios cósmicos são os ingredientes fundamentais. É no entanto de notar que a estatística e a gama de energias disponíveis nos dados públicos são limitadas, não sendo possível obter resultados conclusivos em todas as análises. Estes aspectos e as diferenças em relação aos resultados oficiais de Auger são discutidas quando necessário. Por fim, alguns cálculos simples mas realistas são propostos como meio de aprofundar a compreensão e discussão dos resultados, em particular no que diz respeito à origem galáctica ou extra-galáctica dos raios cósmicos de energia mais alta. O conjunto de gráficos e investigações pedidas pretendem ser uma base de trabalho que pode, evidentemente, ser alargada pelo professor.

Links úteis:

- The Pierre Auger Observatory: <http://www.auger.org>
- Public Event Explorer (página dos dados públicos de Auger): <http://auger.colostate.edu/ED>
- Auger education page: http://www.auger.org/education/Auger_Education
- Sobre física de partículas: <http://www.particleadventure.org>

Contactos:

Pedro Abreu (abreu@lip.pt)
Catarina Espírito Santo (catarina@lip.pt)
Sofia Andringa (sofia@lip.pt)
Telefone (LIP): 21 7973880

Resoluções propostas

1) O espectro dos raios cósmicos

1.1) A constante de Avogadro é o número de partículas constituintes ¹ numa amostra por mole de substância, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Fazendo as seguintes aproximações

- i) apenas prótons, neutrões e electrões estão presentes numa maçã;
- ii) o peso dos electrões pode ser desprezado (0.05% do peso dos neutrões e prótons);
- iii) a constante de massa molar para prótons e neutrões é a mesma e é igual a $1 u = 1 \text{ g/mol}$.

podemos calcular o número total de nucleões (prótons+neutrões) como:

$$N_{p+n} = \frac{100[\text{g}]}{1[\text{g/mol}]} \times 6.02 \times 10^{23}[\text{mol}^{-1}] = 6.02 \times 10^{25} \quad (1)$$

Assim, dentro de uma maçã um próton tem em média

$$\langle E \rangle = \frac{10^{19}}{6.02 \times 10^{25}} [\text{eV}] = 1.66 \times 10^{-7} \text{ eV} \quad (2)$$

o que significa que as energias cinéticas dos dois prótons diferem por 26 ordens de grandeza!

1.2) Entre A e B o fluxo diferencial decresce 12 ordens de grandeza (de 10^{-1} para $10^{-13} [\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$) enquanto a energia apenas aumenta 4.5 ordens de grandeza (de 10^2 para $10^{6.5} \text{ GeV}$), o que corresponde a um declive de $-12/4.5 = -2.6$.

Entre B e C o fluxo diferencial decresce 10 ordens de grandeza (de 10^{-13} para $10^{-23} [\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$) enquanto a energia apenas aumenta 3 ordens de grandeza (de $10^{15.5}$ para $10^{18.5} \text{ GeV}$), o que corresponde a um declive de $-10/3 = -3.3$.

Podemos pois dizer que o declive é muito acentuado, com o fluxo a diminuir em média três ordens de grandeza quando $\log_{10}(\text{Energia})$ aumenta de uma unidade.

Admitindo que o fluxo é uma linha recta em escala log-log, o seu declive é dado por:

$$\frac{\Delta \log_{10}(\text{Fluxo})}{\Delta \log_{10}(\text{Energia})} = \frac{-23 - (-1)}{9.5 - 2} = -2.9 \quad (3)$$

¹partículas que não podem ser divididas em constituintes mais pequenos à escala de energia $k \cdot T$ envolvida no processo - essencialmente prótons, neutrões e electrões, em condições normais de pressão e temperatura.

1.3) Para calcular o número de partículas por unidade de área e de tempo precisamos da aceitância angular do observatório (π sr), e da energia e do fluxo diferencial dados na figura 1. Assim, a equação geral é:

$$\text{Fluxo}[\text{m}^2 \cdot \text{s}]^{-1} = \text{Fluxo diferencial}[\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1} \cdot \pi[\text{sr}] \cdot \text{Energia}[\text{GeV}] \quad (4)$$

A) Para Energia= 10^2 GeV, Fluxo diferencial= $10^{-1}[\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$, e temos

$$\text{Fluxo}[\text{m}^2 \cdot \text{s}]^{-1} = 10^{-1} \times 10^2 \times \pi[\text{m}^2 \cdot \text{s}]^{-1} \approx 30[\text{m}^2 \cdot \text{s}]^{-1} \quad (5)$$

B) Para Energia= 3×10^6 GeV, Fluxo diferencial= $10^{-13}[\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$, e temos

$$\text{Fluxo}[\text{m}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} = 10^{-13} \times 3 \times 10^6 \times \pi \times \frac{3600 \times 24 \times 365 \times 25[\text{s}]}{1 \text{ ano}} [\text{m}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} \approx 30 [\text{m}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} \quad (6)$$

C) Para Energia= 3×10^9 GeV, Fluxo diferencial= $10^{-23}[\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$, e temos

$$\text{Fluxo}[\text{km}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} = 10^{-23} \times 3 \times 10^9 \times \pi \times \frac{3.17 \times 10^7 \text{s}}{1 \text{ ano}} \times \frac{10^6 \text{m}^2}{1 \text{ km}^2} [\text{km}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} \approx 3[\text{km}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} \quad (7)$$

1.4) A 1 TeV, o fluxo diferencial é $10^{-4}[\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{Gev} \cdot \text{sr}]^{-1}$. Com uma aceitância efectiva de $0.5 \text{ m}^2 \text{sr}$, o número de partículas esperadas num ano é

$$N_p[\text{ano}]^{-1} = 10^{-4} \times 10^3 \times 0.5 \times \frac{3.16 \times 10^7 \text{s}}{1 \text{ ano}} = 1.58 \times 10^6 [\text{ano}]^{-1} \quad (8)$$

Assim, AMS mede aproximadamente 1.6 milhões de partículas de energy 1 TeV por ano!

Para chuviros de 10^{19} eV, o fluxo por unidade de ângulo sólido é

$$F_p = 10^{-24} \times 10^{10} \times \frac{3.16 \times 10^7 \text{s}}{1 \text{ ano}} = 3.16 \times 10^{-7} [\text{m}^2 \cdot \text{ano} \cdot \text{sr}]^{-1} \quad (9)$$

e a área necessária para medir 100 partículas por ano num detector com aceitância π sr é

$$A = \frac{100}{\pi \times 3.16 \times 10^{-7}} [\text{m}^2] = 100 \text{ km}^2 \quad (10)$$

Para chuviros de 10^{20} eV, o fluxo por unidade de ângulo sólido é

$$F_p = 10^{-27} \times 10^{11} \times \pi \times \frac{3.16 \times 10^7 \text{s}}{1 \text{ ano}} = 10^{-8} [\text{m}^2 \cdot \text{ano}]^{-1} \quad (11)$$

e a área necessária para medir 100 partículas por ano é

$$A = \frac{100}{10^{-8}} [\text{m}^2] = 10^4 \text{ km}^2 \quad (12)$$

1.5) A área do Observatório Pierre Auger é 3000 km^2 , sendo adequada para medir partículas de 10^{19} eV , mas fornece uma estatística reduzida a 10^{20} eV .

Podem-se instrumentar grandes áreas essencialmente de duas formas, ambas usadas em Auger:

i) Fazendo uma amostragem em determinados pontos de uma pequena fracção das partículas que chegam ao chão e procurando a partir daí descobrir a forma da distribuição entre estes pontos;

ii) Usando o facto de que as moléculas de azoto do ar emitem luz quando excitadas pelas partículas do chuveiro, e recolhendo estes fotões no chão.

1.6) A partir da energia A, o fluxo torna-se demasiado baixo para os detectores instalados em satélites, devido às suas áreas reduzidas, que não podem ser muito aumentadas devido ao enorme custo destes instrumentos. A partir da energia B, as partículas incidentes têm energia suficiente para darem origem a chuveiros que podem ser detectados no solo, a altitudes elevadas. Entre A e B, as partículas originam chuveiros mas estes são demasiado pequenos, tanto em número de partículas como em extensão, não sendo detectáveis no solo.

2) Como se desenvolvem os chuveis de raios cósmicos

2.1) Ao nível do mar, a pressão é $1.013 \cdot 10^5$ Pa, de acordo com a figura 5. Como $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, também podemos escrever a pressão ao nível do mar como

$$p_0 = 101300/9.8 \text{ [kg/m}^2] = 1.04 \times 10^4 \text{ [kg/m}^2] \quad (13)$$

Assim, o peso sobre as nossas cabeças ao nível do mar é

$$W = 1.04 \times 10^4 \text{ [kg/m}^2] \times 0.2 \times 0.2 \text{ [m}^2] = 413.5 \text{ kg} \quad (14)$$

Repetindo a cálculo para o Aconcagua, a 6962 m, temos (mais um vez, obtendo p/p_0 na fig. 5):

$$p_{6962} = 0.48 \times 101300/9.8 \text{ [kg/m}^2] = 4.96 \times 10^3 \text{ [kg/m}^2] \quad (15)$$

Assim, o peso sobre as nossas cabeças no cimo do Aconcagua é

$$W = 4962 \times 0.2 \times 0.2 \text{ [kg]} = 198.5 \text{ kg} \quad (16)$$

Em primeira aproximação, a quantidade de atmosfera atravessada depende apenas da direcção da partícula incidente, em particular do seu ângulo com o zenith, sendo a distância percorrida na atmosfera dada por

$$d = \frac{h_{atm}}{\cos(\theta)} \quad (17)$$

onde h_{atm} é a altura da camada de atmosfera atravessada.

2.2) No nível n ,

i) $X = n \cdot d$;

ii) $N = 2^n$;

iii) $E = E_0/2^n$.

2.3) No máximo do chuveiro (depois de um número de interacções n_{max})

i) $E = E_c$, por definição

ii) Como o máximo do chuveiro é atingido quando a energia por partícula é $E = E_c$, e assumindo que todas as partículas têm aproximadamente a mesma energia, conclui-se que

$$N_{max} = \frac{E_0}{E_c} \quad (18)$$

iii) Precisamos de começar por estimar o número de níveis n_{max} até que o chuveiro atinja o máximo. Como $N_{max} = 2^{n_{max}}$, então

$$n_{max} = \frac{\ln N_{max}}{\ln 2} \quad (19)$$

Como $d = \lambda \cdot \ln(2)$

$$X_{max} = n_{max} \cdot d = \frac{\ln N_{max}}{\ln 2} \cdot d = \frac{\ln \left(\frac{E_0}{E_c} \right)}{\ln(2)} \cdot \lambda \cdot \ln(2) = \lambda \cdot \ln \left(\frac{E_0}{E_c} \right) \quad (20)$$

X_{max} cresce com o logaritmo da energia, o que significa um crescimento mais lento do que o crescimento linear de N_{max} .

2.4) Com $E_0 = 10^{19}$ eV,

i) $N_{max} = \frac{10^{19} \text{eV}}{85 \cdot 10^6 \text{eV}} = 1.18 \cdot 10^{11}$ partículas

ii) $X_{max} = 36.7 \cdot \ln(1.18 \cdot 10^{11}) = 935.6$ g/cm²

O Observatório Pierre Auger encontra-se a uma altitude de cerca de 1400 m acima do nível do mar. Na figura 5 podemos ver que isso corresponde a uma pressão de aproximadamente $0.86 \cdot p_0$, sendo então o valor de X do Observatório

$$X[\text{g/cm}^2] = 0.86 \cdot \frac{101300 \text{ N/m}^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 8889.6 \text{ kg/m}^2 = 889.0 \text{ g/cm}^2. \quad (21)$$

Podemos então concluir que em Auger muitos chuveiros de 10^{19} eV chegam ao chão antes de terem atingido o seu número máximo de partículas.

2.5) Exemplos de aproximações feitas no modelo de Heitler e que podem não ser inteiramente válidas:

- d não tem sempre o mesmo valor - não é um número, é uma distribuição de valores. Além disso, a distribuição não é a mesma para a emissão de fótons e a criação de pares electrão-positrão (e mesmo para cada um dos processos depende de vários factores).
- os electrões têm outras formas de interacção além da emissão de fótons

- quando um electrão emite um fotão, a energia não é em geral repartida de igual modo pelos dois
- o raio cósmico primário não é em geral um fotão, pelo que o chuvaeiro não tem apenas componente electromagnética

2.6) Começamos por preencher a tabela notando, que no nível n ,

i) $N_{tot} = 30^n$;

ii) $N_{ch} = 20^n$;

iii) $E = \frac{E_0}{30^n}$;

iii) $E_{ch} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot E_0$.

O número de interacções ao fim das quais os piões carregados decaem é dado, em função de E_{dec} e E_0 , por

$$E_{dec} = \frac{E_0}{30^{n_{dec}}} \Leftrightarrow n_{dec} = \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)} \quad (22)$$

O número de muões é então dado por

$$N_\mu = 20^{n_{dec}} = 20^{\frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)}} = \left(20^{\log_{20}\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}\right)^{\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} = \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} \quad (23)$$

2.7) A energia transferida para o chuvaeiro electromagnético é igual à energia total menos a energia dos piões carregados no nível n . Assim, quando a energia por partícula atinge E_{dec} , a fracção de energia no chuvaeiro electromagnético é

$$\frac{E_{el}}{E_0} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n_{dec}} = 1 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{20}\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}\right)^{\frac{\ln(2/3)}{\ln(30)}} = \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{\frac{\ln(2/3)}{\ln(30)}} \approx \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{-1.192} \quad (24)$$

Para chuvaeiros de 10^{19} eV,

$$\frac{E_{el}}{E_0} = \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{-1.192} = \left(\frac{10^{19} \text{ eV}}{20 \cdot 10^6}\right)^{-1.192} = 1 - 0.041 \approx 96\% \quad (25)$$

2.8) Para chuvaeiros iniciados por protões

i)

$$X_{max} = d \cdot n_{dec} = d \cdot \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)} \quad (26)$$

ii)

$$N_{max} = 30^{n_{dec}} = \frac{E_0}{E_{dec}} \quad (27)$$

iii)

$$N_\mu = \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} \quad (28)$$

Para chuueiros iniciados por núcleos de ferro contendo, considerando o modelo da sobreposição 56 protões, cada um com energia $E_0/56$

i)

$$X_{max} = d \cdot n_{dec} = d \cdot \frac{\ln\left(\frac{E_0/56}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)} = d \cdot \frac{\ln\left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)} - d \cdot \frac{\ln(56)}{\ln(30)} \quad (29)$$

ii)

$$N_{max} = 56 \cdot 30^{n_{dec}} = 56 \cdot 30^{\frac{\ln\left(\frac{E_0/56}{E_{dec}}\right)}{\ln(30)}} = 56 \cdot \frac{E_0/56}{E_{dec}} = \frac{E_0}{E_{dec}} \quad (30)$$

iii)

$$N_\mu = 56 \cdot 20^{n_{dec}} = 56 \cdot \left(\frac{E_0/56}{E_{dec}}\right)^{\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} = 56^{1-\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} \cdot \left(\frac{E_0}{E_{dec}}\right)^{\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} \quad (31)$$

Assim, a diferença de X_{max} para chuueiros iniciados por protões e ferros é

$$X_{max}(p) - X_{max}(Fe) = d \cdot \frac{\ln(56)}{\ln(30)} \approx 1.18 \cdot d, \quad (32)$$

enquanto o número máximo de partículas é igual nos dois casos. A razão entre o número de muões nos dois tipos de chuueiros é

$$\frac{N_\mu(Fe)}{N_\mu(p)} = 56^{1-\frac{\ln(20)}{\ln(30)}} \approx 1.616 \quad (33)$$

Podemos então concluir que, no caso dos núcleos de ferro, como temos mais partículas a interagir logo ao início, o chuueiro se desenvolve mais rapidamente, tendo menos níveis (n) e dando origem a mais muões.

2.9) A partir da figura 4, o raio do chuueiro é de cerca de 2500 m, sendo a seu tamanho aproximado no chão $\pi \cdot (2.5 \text{ km})^2 \approx 20 \text{ km}^2$

Um muão produzido a uma altitude de 10 km que atinge o chão a 2.5 km do centro do chuveiro tem um ângulo em relação ao eixo do chuveiro de

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2.5}{10} \right) \approx 14^\circ \quad (34)$$

2.10) Como já vimos, $\lambda = 36.7 \text{ g/cm}^2$ e $E_c = 85 \text{ MeV}$. Assim,

$$r_M [\text{g/cm}^2] = \frac{21\text{MeV}}{85\text{MeV}} \cdot 36.7 \text{ g/cm}^2 = 90.7 \text{ kg/m}^2 \quad (35)$$

Como a densidade do ar a 1400 m é $0.86 \cdot \rho_0$

$$\rho_{1400} = 0.86 \cdot 1.2 \text{ kg/m}^3 = 1.056 \text{ kg/m}^3 \quad (36)$$

e

$$r_M [\text{m}] = \frac{r_M [\text{kg/m}^2]}{\rho_{1400} [\text{kg/m}^3]} = \frac{90.7}{1.056} \text{ m} \approx 86 \text{ m} \quad (37)$$

Em conclusão, embora a área total do chuveiro seja muito grande, a maior parte da energia está concentrada muito perto do centro.

3) Como se detectam os chuueiros de raios cósmicos

3.1) A área do Observatório pode ser calculada como a soma de áreas triangulares e rectangulares que se podem definir no mapa prolongando as linhas horizontais e verticais. Nota que a área de um triângulo rectângulo pode ser calculada como $A = \frac{hyp^2}{4} \times \sin(2\alpha)$, em que *hyp* é o comprimento da hipotenusa e α é um dos ângulos menores (que pode ser sempre 30° excepto no triângulo do canto superior esquerdo, em que pode ser de 15°). Deste modo obtivemos o valor aproximado de $A_{tot} = 2970 \text{ km}^2$.

3.2) O diâmetro de cada tanque é 3.6 m, o que corresponde a uma área de $\pi \cdot 1.8^2 = 10.17 \text{ m}^2$. Como existem cerca de 1600 tanques, a área total ocupada por tanques é

$$A_{tanques} = 10.17 \cdot 1600 \text{ m}^2 = 16272 \text{ m}^2 = 0.0163 \text{ km}^2 \quad (38)$$

Assim, os tanques apenas cobrem aproximadamente $0.0163/3000 = 5.4 \cdot 10^{-6} = 0.00054\%$ da área do Observatório.

3.3) Como vimos, os chuueiros de energia muito alta têm um raio da ordem de 2.5 km no chão. Assim, só precisamos de ter os tanques com um espaçamento suficientemente pequeno para que, quando o chuueiro chega o solo, atinja um número de tanques suficiente para que o chuueiro possa ser reconstruído.

No Observatório Pierre Auger foi escolhido um espaçamento entre tanques de 1.5 km, para que a maioria dos chuueiros de mais alta energia seja visto por pelo menos 5 tanques (simplificando, num raio de 5 km de diâmetro conseguimos ter 3 tanques em cada eixo).

3.4) Se duplicássemos a distância entre tanques, aumentaríamos de um factor 2 tanto a largura como o comprimento do observatório, e de um factor 4 a área total. A nova área do Observatório seria 12000 km^2 .

O fluxo a 10^{20} eV foi calculado em 1.4) como sendo

$$10^{-8}[\text{m}^2 \cdot \text{year}]^{-1} = 10^{-8} \cdot 10^6[\text{km}^2 \text{ year}]^{-1} = 0.01[\text{km}^2 \text{ year}]^{-1} \quad (39)$$

O número esperado de partículas por ano seria então

$$0.01[\text{km}^2 \cdot \text{year}]^{-1} \cdot 12000 \text{ km}^2 = 120 \text{ particles per year} \quad (40)$$

3.5) Para reconstruir chuueiros precisamos de um mínimo de 3 tanques atingidos. A reconstrução melhora substancialmente quando 5 ou mais tanques são usados. Como o raio do chuueiro aumenta com a energia, quando aumentamos a distância entre tanques estamos a diminuir o número de tanques que são atingidos por partículas de um dado chuueiro. Abaixo de uma certa energia, deixaremos de ter sinal em tanques suficientes para que o chuueiro possa ser reconstruído.

Assim, aumentar o espaçamento entre tanques tem o efeito positivo de aumentar a área, e assim o número de chuueiros recolhidos às energias mais altas; e tem o efeito negativo

de aumentar o limiar de energia do Observatório, ou seja, a energia mínima para que um chuvaireo possa ser medido.

Além da distância entre tanques, também a altitude a que se encontra o Observatório é relevante. Observatórios a maiores altitudes são melhores para chuvaireos de energias mais baixas, enquanto menores altitudes são melhores para chuvaireos de energias mais altas, para que o máximo do chuvaireo fique próximo do chão.

3.6) Se o ponto de impacto do centro do chuvaireo no chão não estiver dentro da área coberta pelo observatório, podemos ver sinal em alguns tanques, mas o problema será pouco constrangido e a reconstrução difícil. Por exemplo, um chuvaireo de energia relativamente baixa com o ponto de impacto bastante próximo do Observatório, e um outro de energia mais alta e ponto de impacto mais distante, podem originar sinais semelhantes nos tanques. Como distinguir um caso do outro? Como detectamos neste caso apenas um lado do chuvaireo e não sabemos onde se situa o ponto de impacto, será difícil reconstruir bem o chuvaireo.

4) Como se medem os raios cósmicos de energia extrema

4.1) As quantidades medidas directamente nos tanques de Cherenkov são os tempos de chegada das partículas do chuveiro ao tanque e o sinal total (em VEM ¹). As outras quantidades, em particular as coordenadas de posição do tanque (*Easting*, *Northing* e altitude) são conhecidas para cada tanque, independentemente do sinal medido.

4.2) Observando a figura, vemos que é possível calcular o ângulo θ com o eixo vertical com base na informação de tempo dos tanques. Sendo l a distância percorrida pela frente do chuveiro entre os instantes em que atinge dois tanques, o ângulo é dado por

$$\sin(\theta) = \frac{l}{d_{\text{tanques}}} \Leftrightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{0.3[\text{m/ns}] \cdot \Delta t[\text{ns}]}{1500[\text{m}]} \right) \quad (41)$$

onde Δt [ns] é a diferença de tempos entre os tanques. De notar que não temos que considerar a distância aproximada de 1500 m entre tanques - podemos calcular a distância exacta usando a diferença das coordenadas *Easting* e *Northing* dadas no ficheiro. Podemos então preencher a tabela

Evento	ID1	ID2	Δt [ns]	Dist [m]	$\theta_{\text{calc}}[^\circ]$	$\theta_{\text{dado}}[^\circ]$	$\Delta\theta[^\circ]$
8677500	418	413	3585	1498.96	45.85	46.7 ± 0.7	0.85
4796100	576	508	1517	1497.95	17.69	18.0 ± 0.4	0.31

4.3) Preenchemos agora a segunda tabela, usando a mesma expressão que anteriormente

Evento	ID1	ID2	Δt [ns]	Dist [m]	$\theta_{\text{calc}}[^\circ]$	$\theta_{\text{dado}}[^\circ]$	$\Delta\theta[^\circ]$
8677500	411	413	1967	1502.26	23.13	46.7 ± 0.7	23.57
4796100	508	543	377	1504.23	4.31	18.0 ± 0.4	13.69

Torna-se claro que os valores calculados com a nossa fórmula não são compatíveis com os resultados dados no sítio web de Auger...

Ao tentar compreender a diferença entre o caso anterior, em que o cálculo de θ conduzia aos resultados esperados, e o caso presente, em que o cálculo não parece funcionar, podemos notar o seguinte: no primeiro caso, tínhamos escolhido pares de estações definindo uma direcção aproximadamente alinhada com a projecção do eixo do chuveiro no chão. Neste segundo caso isso já não é verdade. De facto, para o mesmo ângulo com o zénite θ existem muitas direcções possíveis, que correspondem a diferentes projecções no chão.

¹ VEM é o sinal deixado por um muão de alta energia atravessando o tanque verticalmente.

Isto é descrito pelo ângulo azimutal ϕ . A direcção do raio cósmico é dada por (θ, ϕ) , e os dois ângulos têm que ser calculados em conjunto, porque dependem um do outro. Só para os mais curiosos, deixamos aqui uma solução aproximada, obtida assumindo que as partículas do chuveiro se deslocam à velocidade da luz no vácuo c , e que a frente do chuveiro é um disco plano:

$$\begin{aligned}\tan \phi &= -\frac{d_{12}\Delta t_{23} \cos \phi_1 - d_{13}\Delta t_{12} \cos \phi_2}{d_{12}\Delta t_{23} \sin \phi_1 - d_{13}\Delta t_{12} \sin \phi_2} \\ \sin \theta &= \frac{c\Delta t_1}{d_{12} \cos(\phi - \phi_1)} = \frac{c\Delta t_2}{d_{23} \cos(\phi - \phi_2)}\end{aligned}$$

4.4) O ponto de impacto do centro do chuveiro é, em primeira aproximação, o baricentro dos tanques no evento, podendo ser calculado fazendo a média das coordenadas dos tanques em cada evento, pesada pelo respectivo sinal em VEM.

Por exemplo, o avanço para norte (a coordenada *Northing*) do ponto de impacto é no Excel dada por:

$$Nor = SUM(Signal[1, T] \cdot North[1, T]) / (SUM(Signal[1, T])) \quad (42)$$

em que T é o número total de tanques no evento.

Escolhendo por exemplo o evento mais visto da página em Outubro de 2012, evento 4128900, obtemos

	Dado [m]	Calc [m]	$\Delta(calc - dado)$ [m]	Diferença total [m]
<i>Easting</i>	479789	480055.6	266.65	311.68
<i>Northing</i>	6073404	6073565	161.38	

Temos, pois, uma diferença apreciável (embora pequena à escala da distância entre tanques) entre a posição calculada por este método e o valor dado na página. Na imagem do chuveiro dada na página, vemos que existem tanques no interior da elipse em que não foi registado sinal. Podemos mesmo calcular o deslocamento relativo esperado no cálculo pelo facto de termos um número diferente de tanques de um lado e de outro de cada eixo. Para chuveiros em que todos os tanques dentro da elipse registaram sinal, podemos repetir os cálculos e verificar que se obtêm resultados bastante precisos.

4.5) A representação esquemática de chuveiros com diferentes ângulos com o zénite e diferentes energias mostra-nos que ambas as características mudam o número de tanques atingidos pelo chuveiro. Para um certo valor fixo de energia, o número de estações aumenta com a inclinação do chuveiro. Da mesma forma, para chuveiros com o mesmo ângulo com o zénite (que podemos seleccionar uma vez reconstruída a direcção) o número de estações com sinal (ou, por outras palavras, o tamanho do chuveiro no chão) dá-nos informação sobre a energia: quando maior a “pegada”, maior a energia do chuveiro.

4.6) Em finais de 2012, os 3 chuveiros de mais alta energia são:

- 15457900: 49.30 EeV, 19 estações 59.4°, Jul 02 2012 08:09
- 10485600: 49.93 EeV, 13 estações 40.2°, Out 26 2010 17:39
- 4128900: 41.07 EeV, 18 estações 54.6°, Out 30 2007 11:14

e os sinais nas estações mais próxima e mais distante são, respectivamente:

- 15457900:

$$S(400) = 1000 [VEM] ; \quad S(3800) \approx 7 [VEM] ; \quad \frac{S(3800)}{S(400)} = 7 \cdot 10^{-3} \quad (43)$$

- 10485600:

$$S(400) = 5000 [VEM] ; \quad S(3200) \approx 4 [VEM] ; \quad \frac{S(3800)}{S(400)} = 8 \cdot 10^{-4} \quad (44)$$

- 4128900:

$$S(500) = 1000 [VEM] ; \quad S(2800) \approx 3 [VEM] ; \quad \frac{S(3800)}{S(400)} = 3 \cdot 10^{-3} \quad (45)$$

Olhando para os tanques com menor sinal estimamos que o limiar de detecção dos tanques seja de cerca de 3 VEM. O tamanho do chuveiro mais energético no chão é aproximadamente $\pi \cdot 4^2 \text{ km}^2 = 50.24 \text{ km}^2$.

5) O que nos dizem estes dados sobre os raios cósmicos de energia extrema

5.1) Descarrega o ficheiro `auger_public_****_**_**.txt` da secção “Event Display” do sítio web oficial de Auger e importa-o para o Excel como um ficheiro ASCII (com separação por espaços). Em seguida, define noutra coluna intervalos iguais (os “bins” dos histograma) das variáveis que vamos representar (ϕ , θ e $\cos(\theta)$ neste caso).

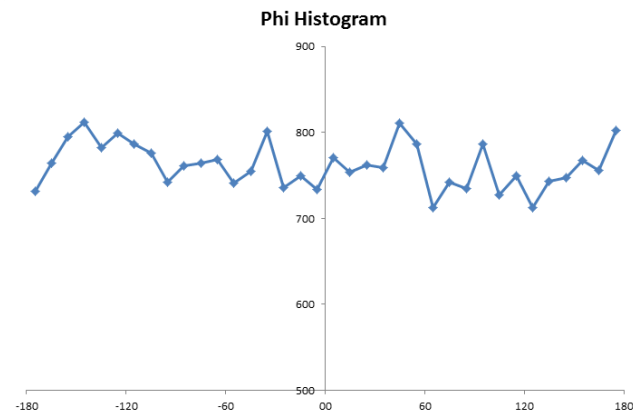


Figura I: Histograma de ϕ para todos os chuviros dos dados públicos de Auger.

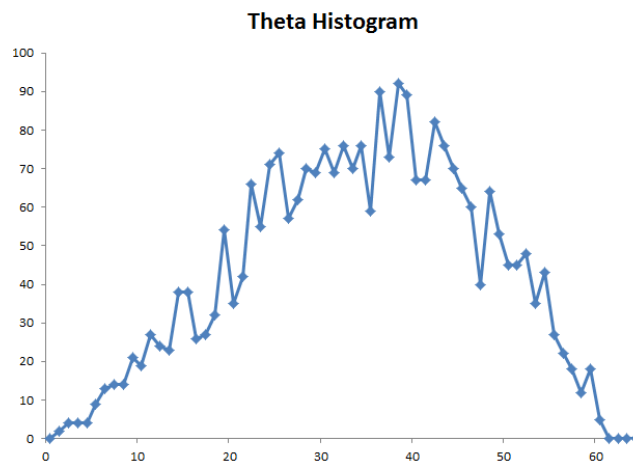


Figura II: Histograma de θ para todos os chuviros dos dados públicos de Auger.

Em seguida, podemos fazer um histograma usando a ferramenta do Excel

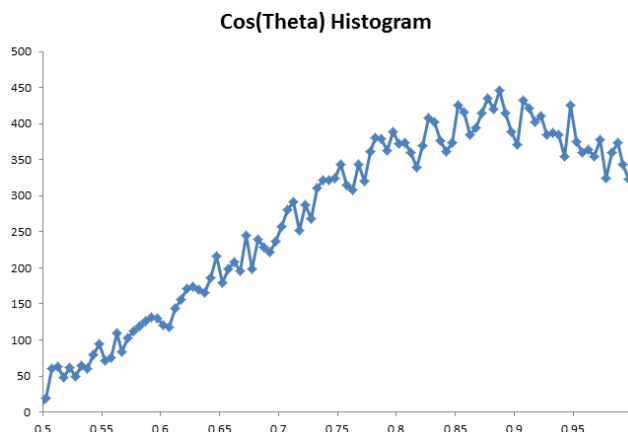


Figura III: Histograma de $\cos(\theta)$ para todos os chuviros dos dados públicos de Auger.

Data→Data Analysis→Histogram

com resultados que devem ter um aspecto semelhante ao das figuras I e II.

Nota que, enquanto o fluxo é constante em ϕ , não é constante em θ . Se olharmos para a definição de ângulo sólido, vemos que este depende linearmente de ϕ e de $\cos(\theta)$ - de facto, é para intervalos iguais de ϕ e de $\cos(\theta)$ (e não de θ) que estamos a olhar para regiões de igual tamanho no céu.

No entanto, fazendo o histograma para $\cos(\theta)$ (figura III) o fluxo continua a não ser constante... Porquê? É de notar que para energias abaixo de 3 EeV o detector não é 100% eficiente (pode “ver” ou não os chuviros que o atingem, conforme a distância a que o centro do chuviro “cai” dos tanques, entre outros factores) e esta eficiência vai depender da inclinação: como os chuviros inclinados atingem uma área maior, terão maior probabilidade de serem detectados. Vão por isso ser detectados mais chuviros inclinados que verticais. Acima de 3 EeV o detector já é plenamente eficiente mesmo para chuviros verticais.

Repetindo o histograma de $\cos(\theta)$ só para os chuviros com energia superior a 3 EeV (figura IV) vemos que, apesar das grandes flutuações de ponto para ponto devidas à baixa estatística, o valor é aproximadamente constante (não existe uma tendência global de variação acentuada).

5.2) Para verificar se estes raios cósmicos vêm do Sol, vamos usar a informação do tempo Unix dada em segundos no ficheiro ASCII e dividir por 3600 para obter o número de horas decorridas desde a meia-noite (UTC) de 1 de Janeiro de 1970.

Em seguida, notando que a Argentina se encontra a UTC-3, subtraímos 3 ao número de horas obtido e calculamos mod_{24} do valor obtido. Assim, no Excel, se o tempo UNIX estiver na coluna F, a hora do dia na Argentina será dada por:

$$= \text{MOD}(F2/(3600) - 3; 24) \quad (46)$$

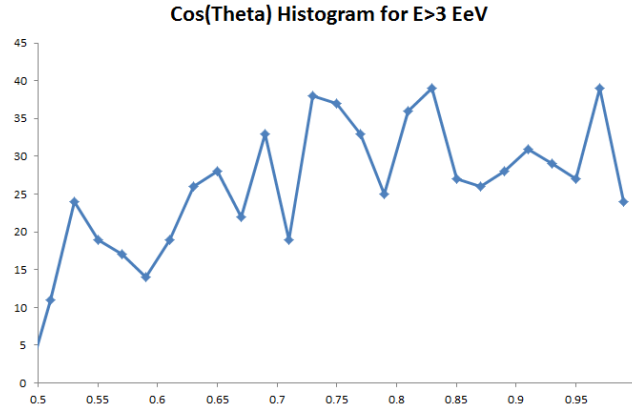


Figura IV: Histograma de $\cos(\theta)$ para chuviros com $E > 3 \text{ EeV}$.

O histograma do número de eventos em função da hora do dia é mostrado na figura V, onde podemos ver que é aproximadamente constante. Não havendo uma variação dia-noite, invalidamos a hipótese de os raios cósmicos de alta energia virem do Sol.

As direcções no céu donde chegam os raios cósmicos observados por Auger são dadas pelas coordenadas de latitude e longitude galácticas (a latitude é definida no plano galáctico e correspondendo os 0° ao centro da galáxia; a longitude é perpendicular a esse plano, correspondendo os $+90^\circ$ ao Pólo Norte). Estas variáveis são mostradas no gráfico da figura VI, bem como no gráfico oficial de Auger (figura VII)

A transformação para coordenadas galácticas está explicada em detalhe nas páginas de Educação do sítio web da Observatório Pierre Auger. Em termos simples, precisamos em primeiro lugar de saber as coordenadas de tempo e de posição sobre a Terra. Ambas são dadas para cada tanque de cada chuviro. Em seguida, é necessário achar a inclinação do eixo da Terra em relação ao eixo central da galáxia (que apenas depende do tempo), assim como a rotação em relação a este eixo (diferente para cada ponto sobre a Terra, e por isso dependente do tempo e da posição).

Finalmente, definimos um sistema de coordenadas formado pelo plano galáctico e por uma direcção perpendicular, sendo ϕ o ângulo de rotação no plano, com os 0° apontando para o centro da galáxia, e θ o ângulo com o plano, medido em relação ao eixo normal.

5.3) Representando o logaritmo da energia em função do número de eventos obtemos a figura VIII. Em média, $\log_{10}(\text{Energia})$ aumenta linearmente com o número de tanques com sinal. Contudo, o mesmo número de tanques pode corresponder a um intervalo grande de valores de $\log_{10}(\text{Energia})$ dependendo, em particular, do ângulo com o zénite - como podes verificar. Podemos apesar disso afirmar que há uma correlação clara entre o número de tanques e o logaritmo da energia do raio cósmico, sendo esta dependência

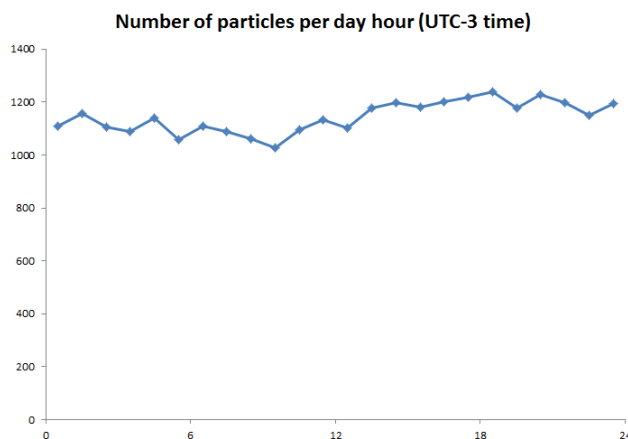


Figura V: Histograma do número de eventos para cada hora do dia em UTC-3 (hora da Argentina).

em primeira aproximação linear.

5.4) Antes de fazer os histogramas, é de notar que neste caso pode ser mais prático usar intervalos (“bins”) de igual tamanho em $\log_{10}(\text{Energia})$ (em EeV) e não em energia. Assim sendo, podemos passar a definir os intervalos no Excel, fazendo depois o histograma do modo explicado anteriormente. Depois, o número de entradas em cada intervalo tem que ser dividido pelo tamanho do intervalo (em EeV), já que estes intervalos são de tamanho variável em energia. O fluxo por energia é mostrado na figura IX. A diminuição para energias mais baixas deve-se ao facto de o Observatório perder eficiência para energias abaixo de 10^{18} eV. Considerando apenas a região do gráfico acima deste valor, vemos que o declive está de acordo com o calculado na secção 1, sendo aproximadamente -2.8. Podemos tornar este facto mais visível multiplicando o fluxo por E^3 e mostrando que temos, para toda a região acima de 10^{18} eV, uma linha praticamente horizontal. É o que vemos nas figuras X (o nosso resultado) e XI (resultado oficial de Auger).

5.5) Uma partícula carregada movendo-se num campo magnético está sujeita a uma força

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (47)$$

Como a direcção da força é um produto externo, vai ser sempre perpendicular tanto a \vec{B} como à velocidade, e a projecção da trajectória das partículas no plano perpendicular a \vec{B} será circular (no espaço, será uma espiral). O raio pode ser calculado usando a força centrípeta

$$\frac{m \cdot v_{\perp}^2}{R} = q \cdot v_{\perp} \cdot B \Leftrightarrow R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} \quad (48)$$

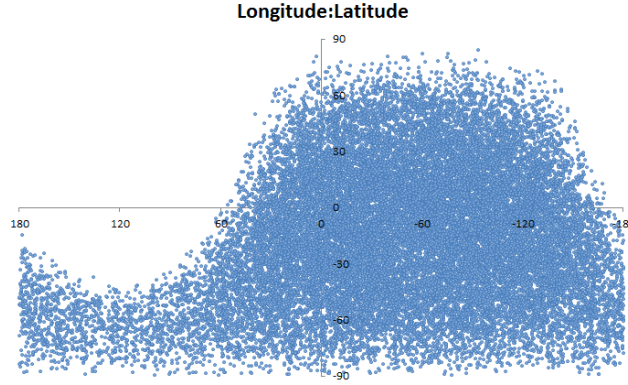


Figura VI: Gráfico Latitude vs Longitude para todos os eventos dos dados públicos de Auger.

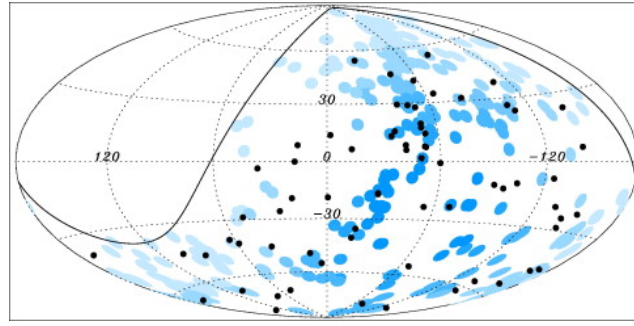


Figura VII: Gráfico de Auger mostrando a região visível do céu, bem como as direcções de chegada dos raios cósmicos de energia mais alta (círculos).

Repare-se que no caso relativista temos que substituir $m \cdot v$ por p , que é dado por

$$p \cdot c = \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = \sqrt{10^{38} \text{eV}^2 - 10^{18} \text{eV}^2} = 10^{19} \text{eV} \approx E \quad (49)$$

para o caso de um protão e usando unidades naturais ($c=1$). Para um núcleo de ferro o resultado vai, a esta energia, ser idêntico, como se pode concluir substituindo m^2 por $56 \cdot 10^9 \text{eV}$ em vez de 10^9eV .

Para os valores dados, notando que $1 \mu\text{G} = 10^{-6} \text{G} = 10^{-10} \text{T}$ e que $1 \text{pc} = 3.26 \text{light-year} = 3 \cdot 10^{16} \text{m}$, e que para ferro $Z = 26$ (embora $A = 56$), temos os seguintes raios de curvatura

i) Protão de 10 PeV ($10 \cdot 10^{15} \text{eV}$)

$$R = \frac{10^{16} [\text{eV}/c]}{1 [\text{e}] \cdot 10^{-10} \text{T}} = \frac{10^{26}}{3 \cdot 10^8} [\text{m}] = 3 \cdot 10^{17} \text{m} \approx \frac{3 \cdot 10^{17} \text{m}}{3 \cdot 10^{16} [\text{m}/\text{pc}]} \text{pc} = 0.01 \text{kpc} \quad (50)$$

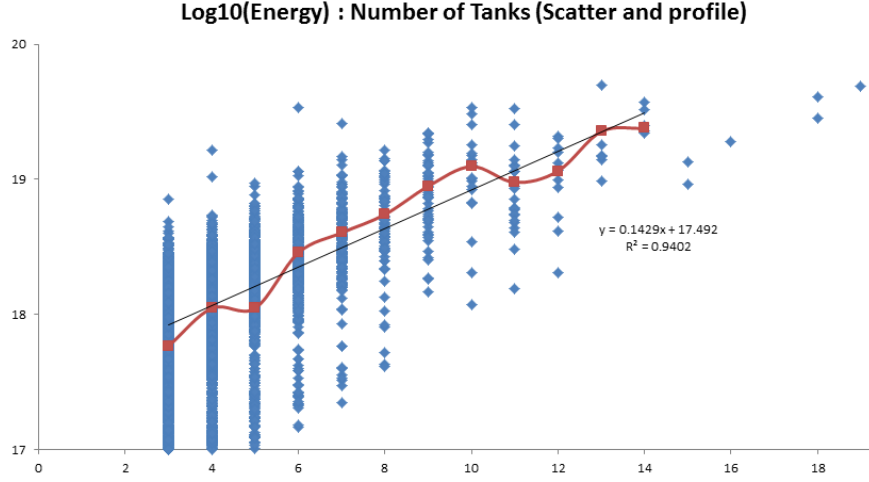


Figura VIII: Todos os valores (representados por estrelas) e valores médios (representados por quadrados) de $\log_{10}(\text{Energia})$ vs. número de tanques. O último quadrado é o valor médio de todos os eventos com 14 ou mais tanques, que são apenas 6.

ii) Protão de 10 EeV ($10 \cdot 10^{18}$ eV)

$$R = \frac{10^{19} [\text{eV}/c]}{1 [e] \cdot 10^{-10} T} \approx \frac{3 \cdot 10^{20} \text{ m}}{3 \cdot 10^{16} [\text{m}/\text{pc}]} \text{ pc} = 10 \text{ kpc} \quad (51)$$

iii) Núcleo de ferro de 10 PeV

$$R = \frac{10^{16} [\text{eV}/c]}{26 [e] \cdot 10^{-10} T} = \frac{10^{26}}{26 \cdot 3 \cdot 10^8} [\text{m}] = 1.1 \cdot 10^{16} \text{ m} \approx 0.00039 \text{ kpc} \quad (52)$$

iv) Núcleo de ferro de 10 EeV

$$R = \frac{10^{19} [\text{eV}/c]}{26 [e] \cdot 10^{-10} T} \approx \frac{1.1 \cdot 10^{19} \text{ m}}{3 \cdot 10^{16} [\text{m}/\text{pc}]} \text{ pc} = 0.39 \text{ kpc} \quad (53)$$

5.6) Se considerarmos o disco de uma galáxia com uma espessura 0.3 kpc, vemos que um núcleo de ferro de 10 EeV pode ter um raio de curvatura superior à dimensão do disco. Protões da mesma energia, com um raio de curvatura de 10 kpc radius, chegam-nos certamente de outras galáxias. A 10 PeV, os raios de curvatura de ambos os tipos de partículas estão perfeitamente contidas dentro da dimensão do plano galáctico, pelo que os raios cósmicos desta energia podem ser de origem galáctica.

5.7) O desvio dos raios cósmicos em relação à sua trajetória original é o resultado de muitos pequenos desvios sofridos ao atravessar os diversos (em intensidade e em

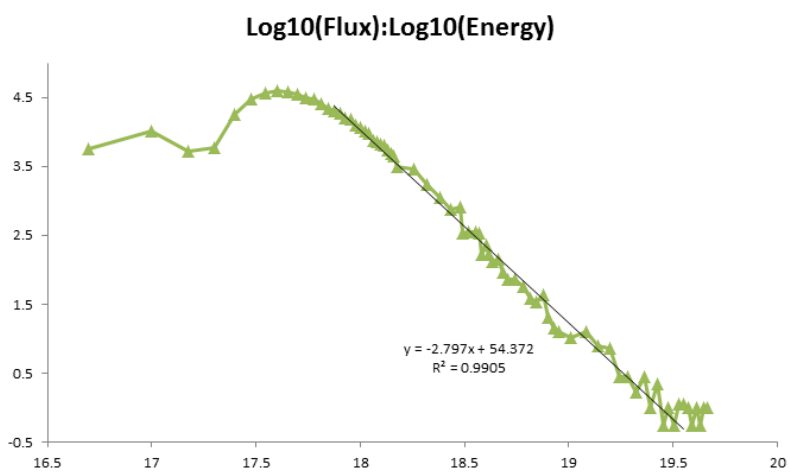


Figura IX: Log10(Fluxo) vs Log10(Energia).

direcção) campos magnéticos que vão encontrando no seu percurso. Em cada instante, a magnitude deste desvio é proporcional a Z . Para iões de ferro teremos então um raio de aproximadamente $26 \cdot 3^\circ = 78^\circ$.

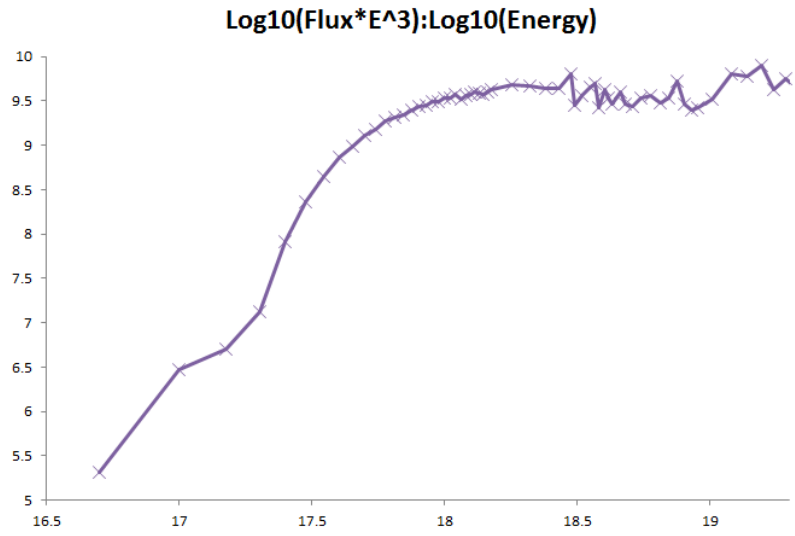


Figura X: $\log_{10}(\text{Fluxo} \cdot E^3)$ vs $\log_{10}(\text{Energia})$.

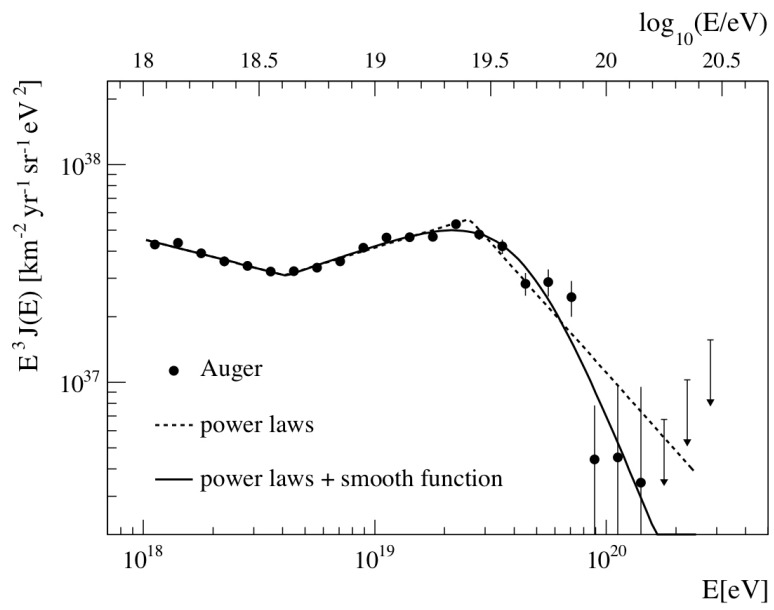


Figura XI: Espectro de energia de Auger.