DISCRETE TRANSFORMS IN QUANTUM CHAOS

Bunakov V.E.

Petersburg Nuclear Physics Institute, National Research Center Kurchatov Institute

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КВАНТОВОМ ХАОСЕ

Бунаков В.Е.

Петербургский Институт Ядерной Физики, НИЦ «Курчатовский Институт»

Недостатки современной теории хаоса

Определение: - Хаос в классической системе связан с неустойчивостью траекторий системы к малым вариациям начальных условий. Траектории хаотической системы в фазовом пространстве расходятся по экспоненциальному закону $\exp\{\Lambda t\}$, где Λ – показатель Ляпунова, определяющий скорость этого расхождения. Реальные начальные условия всегда задаются с конечной точностью и положение системы со временем делается совершенно непредсказуемым. Такую полную непредсказуемость движения системы и называют хаосом.

В квантовой механике классические критерии регулярности или хаоса, связанные с понятием траектории, делаются неприменимыми.

Поэтому в настоящее время квантовый хаос принято определять как «динамику квантовых систем, являющихся хаотическими в классическом пределе». Предлагается просто игнорировать вопрос об определении хаоса в квантовой механике, а вместо этого стараться определить свойства квантовых систем, соответствующие хаосу в классических системах. Пока что единственное свойство - для квантовых аналогов хаотических систем распределение расстояний между уровнями близко к закону Вигнера с его характерным отталкиванием между уровнями. В соответствии с этим законом вероятность найти соседний уровень, отличающийся от данного на энергию ε определяется выражением:

$$P(\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon}{2D^2} \exp\left(-\frac{\pi\varepsilon^2}{4D^2}\right)$$

D–среднее расстояние между уровнями. Отталкивание - стремление к нулю вероятности найти соседний уровень при $\varepsilon \to 0$ (т. е. отсутствие вырождения).

Для регулярных систем такого отталкивания не наблюдалось.

В работах:

В. Е. Бунаков, ЯФ **79**, 679 (2016) [Phys. Atom. Nucl.**79**, 995 (2016)].

В. Е. Бунаков, Известия РАН (сер. физ.) **84**, 1187 (2020); [V.E.Bunakov, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **84**, 1390 (2020)].

показано, что закон Вигнера характеризует хаотическую систему только в том случае, когда рассматривается последовательность энергетических уровней с фиксированными значениями квантовых чисел (например спина и четности). Если отбора по спинам и четности не производить, то вигнеровское отталкивание уровней исчезает, хотя система остается хаотической.

Поскольку закон распределения уровней не дает определения признаков регулярной квантовой системы, то оценить степень хаотичности системы невозможно.

Наши предложения – (см. напр.,

V.E. Bunakov, I.B. Ivanov. J. Phys. A: Math. Gen. **35,** 1907 (2002).

В. Е. Бунаков, *ЯФ* **79**, 679 (2016) [Phys. Atom. Nucl.**79**, 995 (2016)].)

использовать для определения классического и квантового хаоса теорему Лиувилля-Арнольда (Liouville–Arnold), хорошо известную в классической механике: система с N степенями свободы регулярна, если у нее есть $M = N$ линейно-независимых первых интегралов движения. Первыми (глобальными) интегралами движения практически являются такие, которые по теореме Нетер (Noether) связаны с симметрией системы (попросту законы сохранения). В отличие от понятия траектории, применимого только в классической механике, понятие симметрии применимо для всех областей физики.

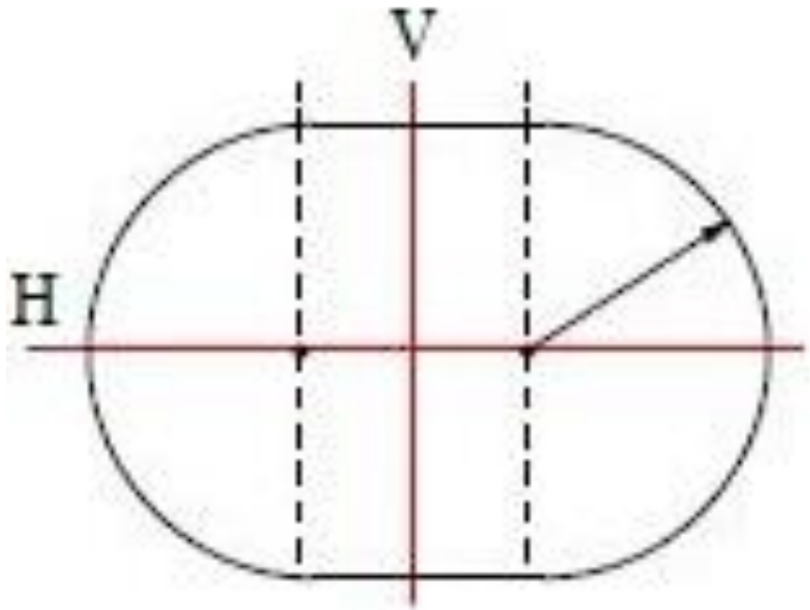
Квантовым аналогом первого интеграла движения является «хорошее» квантовое число (собственное значение оператора, коммутирующего с гамильтонианом системы). Поэтому мы предлагаем считать квантовой регулярной системой такую, гамильтониан которой обладает достаточно высокой симметрией, гарантирующей, что количество хороших квантовых чисел системы M не меньше числа ее степеней свободы N. Если внести в систему возмущающее взаимодействие, которое нарушит ее симметрию и уменьшит число хороших квантовых чисел так, что $M < N$, то система перестанет быть регулярной. Поэтому очень просто отличить квантовую хаотическую систему от регулярной, сравнивая два числа M и N. В качестве количественной меры квантового хаоса мы используем заимствованную из теории нейтронных силовых функций величину Γ_{spr} «размазки» компонент волновой функции регулярного состояния по состояниям той же системы, но в присутствии взаимодействия, нарушающего ее симметрию. В предельном переходе к классической механике величина $\Gamma_{spr}/\hbar$ переходит в показатель Ляпунова Λ.

Вопрос

Однако теорема Нетер доказана лишь для непрерывных преобразований симметрии и все первые интегралы в классической механике связаны именно с такими симметриями. В квантовой механике существует и квантовое число четности по отношению к пространственной инверсии, а такое преобразование дискретно. Следует ли хорошее квантовое число четности включать в число M

первых интегралов при сравнении их с числом степеней свободы N если мы хотим использовать аналог теоремы Лиувилля-Арнольда в квантовом случае?

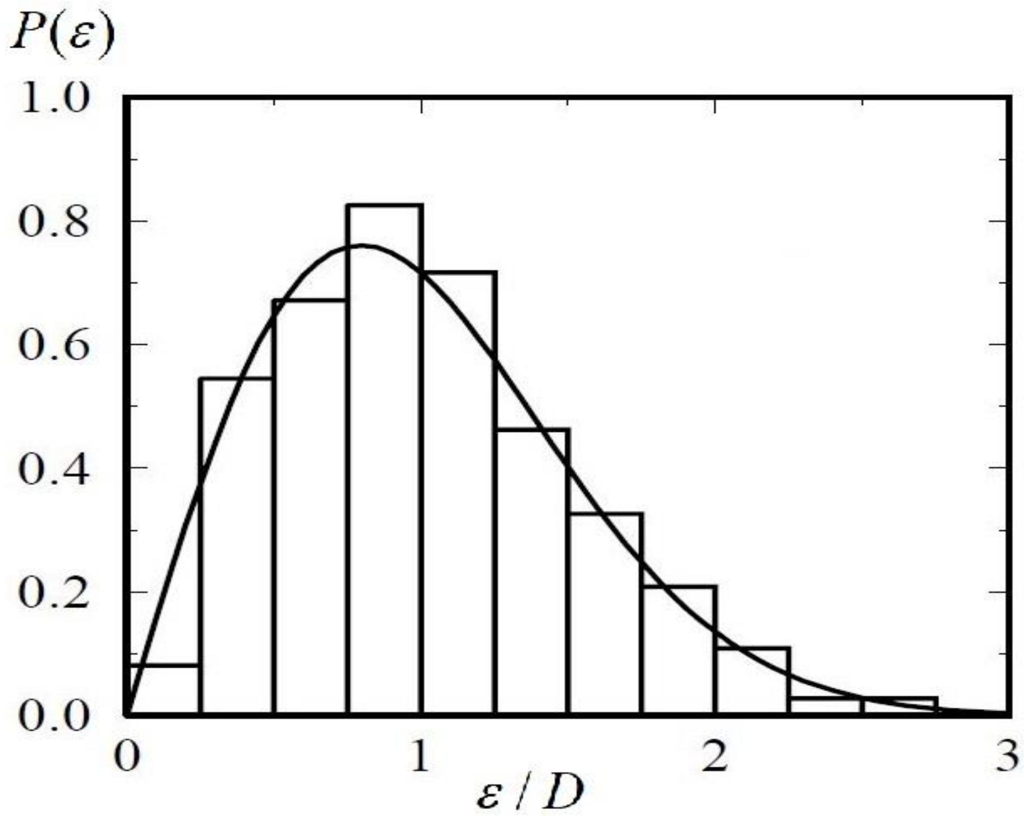
Наводящее соображение -- современное определение квантового хаоса как «динамики квантовых систем, являющихся хаотическими в классическом пределе». Первые интегралы, связанные с симметрией гамильтониана по отношению к непрерывным преобразованиям, сохраняются в предельном переходе от квантовой механики к классической, а квантовое число четности просто исчезает. Но число степеней свободы системы при таком переходе остается неизменным. Значит при использовании аналога теоремы Лиувилля-Арнольда в квантовом случае включать четность в число M первых интегралов не следует. Для подтверждения рассмотрим хорошо изученный случай двумерного биллиарда вида «стадион». Под биллиардом понимается движение материальной точки в плоскости, ограниченной упруго отражающими стенками определенной формы.



В классической механике биллиард вида стадион является самым типичным представителем хаотических систем (при двух степенях свободы эта система имеет только один первый интеграл движения -энергию). В квантовом случае стадион обладает еще и дискретными симметриями по отношению к отражениям относительно двух осей симметрии стадиона (H и V), а, следовательно, двумя хорошими квантовыми числами четности. Энергетические уровни такой квантовой системы распадаются на четыре независимых совокупности, определяемых квантовыми числами четности при отражении относительно каждой из осей симметрии: четно-четную (т. е. четную по отношению к каждой из двух осей), нечетно-четную, четно-нечетную и нечетно-нечетную.

Гистограмма распределения расстояний между уровнями нечетно-нечетной совокупности, полученная в работе I. Kosztin, K. Schulten, Int. Journ. Mod. Phys.

C, **8,** 293 (1997), прекрасно описывается вигнеровским распределением (сплошная линия) с характерным отталкиванием уровней, т.е. единственным общепринятым в настоящее время признаком хаотичности квантовой системы:



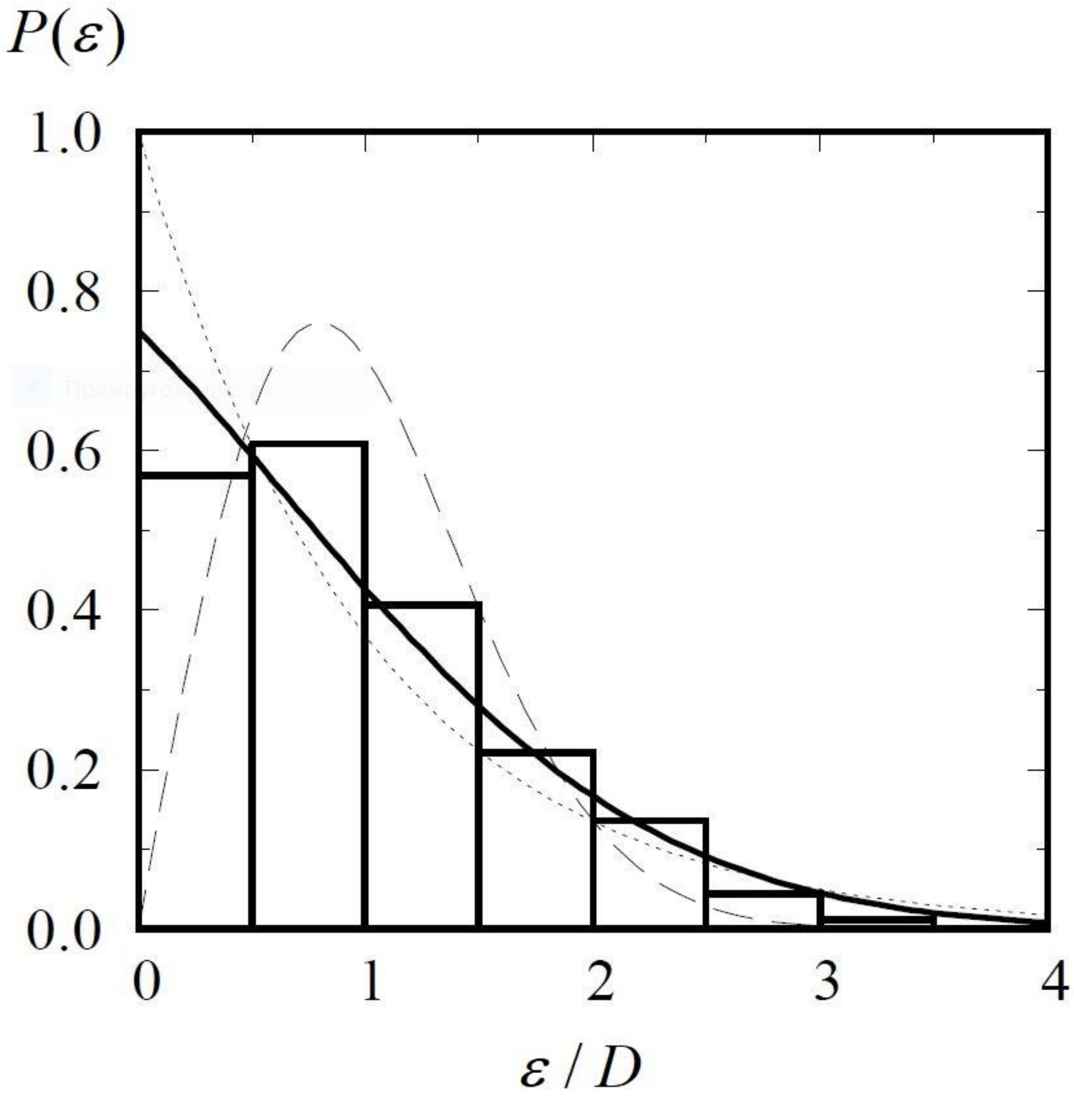
Появление двух чисто квантовых интегралов движения, связанных с симметрией системы относительно дискретных преобразований пространственного отражения, не изменило хаотичности квантовой системы, наблюдавшейся в классическом пределе.

Вывод:

Итак, в приложении теоремы Лиувилля-Арнольда к квантовым системам следует сравнивать число степеней свободы N не с полным числом независимых первых интегралов (хороших квантовых чисел) M, а лишь с числом N_{cl} «классических» первых интегралов системы, свойственных ей в классической механике.

Двойственный характер чисто квантовых первых интегралов:

Если пытаться по-прежнему определять хаотичность квантовой системы по наличию вигнеровского отталкивания в распределении уровней, то придется найти все эти «чисто-квантовые» интегралы движения (спин, четность и т.д.) и отбирать лишь энергетические уровни, с их фиксированным значением. Например, если в рассмотренном квантовом биллиарде «стадион» «свалить в одну кучу» состояния с разными четностями, то получим гистограмму без вигнеровского отталкивания – близко к распределению Пуассона (точечная линия).



$P(\varepsilon)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
1
2
3
4
ε / D