

COLLECTIVE STATES AND BANDCROSSING IN EVEN CERIUM  
ISOTOPES

A. D. Efimov

ОПИСАНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОЛОС В ЧЕТНЫХ ИЗОТОПАХ  
Ce НА ОСНОВЕ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ВЕРСИИ МВБ1

А. Д. Ефимов

Гос. ун. мор. и реч. флота им. адм. С.О. Макарова;  
ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург.

Санкт-Петербург

2020

Бозонное представление парных фермионных операторов  
 А. Д. Ефимов, ЯФ. **83**, №5, 380 (2020)  
 [A. D. Efimov, Physics of Atomic Nuclei. **83**, No. 5, 651  
 (2020)].

$$\begin{aligned}
 H_{\text{IBM}} = & \varepsilon_d \hat{n}_d + k_1(d^+ \cdot d^+ s s + \text{H.c.}) + k_2 \left( (d^+ d^+)^{(2)} \cdot d s + \text{H.c.} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_L C_L (d^+ d^+)^{(L)} \cdot (d d)^{(L)}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\hat{T}(E2) = e^* (d^+ s + s^+ d + \chi_{E2} d^+ d)^{(2)} + \quad (2)$$

$$+ e_0^* \left( s^+ (d^+ d)^{(0)} d + d^+ (d^+ d)^{(0)} s \right)^{(2)}. \quad (3)$$

Микроскопическое вычисление параметров было реализовано на основе требований, сформулированных в работах Кишимото и Тамуры (1976-1981)

- 1) отображение именно фононов на бозоны
  - 2) учет связи коллективных и неколлективных мод возбуждений
- $D$ – нижайшая квадрупольная мода, подобная МСФ

$$\begin{aligned}
 D_{\mu}^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1,2;\tau=n,p} [\psi_{12} a_1^{+} a_2^{+} + \varphi_{12} a_2 a_1] (j_1 j_2 m_1 m_2 | 2\mu)_{\tau} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{1,2;\tau=n,p;\eta=0,1} z_{12}^{(\eta)} [a_1^{+} a_2^{+} + (-1)^{\eta} a_2 a_1] (j_1 j_2 m_1 m_2 | 2\mu)_{\tau};
 \end{aligned}$$

Далее — требование замкнутости алгебры операторов  $D^{+}$ ,  $D, [D, D^{+}]$ , приводит к соответствию с идеальными  $d$ –бозонами

$$D_{\mu}^{+} \longrightarrow d_{\mu}^{+} \sqrt{1 - \frac{\hat{n}_d}{\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} d_{\mu}^{+} \sqrt{\Omega - \hat{n}_d} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} d_{\mu}^{+} s,$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{5}{3} \sum_{123} \frac{1}{2j_2 + 1} z_{12}^{(0)} z_{12}^{(1)} (z_{23}^{(1)2} + z_{23}^{(0)2}).$$

Структура  $D$  —?

$HD^{+} = \omega D^{+}$  или  $\langle DHD^{+} \rangle = -\omega \langle DD^{+} \rangle \rightarrow \min$  —  
классический метод случайной фазы (МСФ).

Простейшая модификация

$\langle DHD^{+} \rangle \rightarrow (I | H_{\text{IBM}}(\varepsilon_d(\psi, \varphi), \dots) | I) + \Phi_{\varphi}$

$\omega \langle DD^{+} \rangle \rightarrow \omega \langle DD^{+} \rangle + \chi \Sigma \varphi^2 + \dots$  и  $\Sigma \varphi^2$  фиксирована.

В частности это приводит при определении структуры

$D$ -фононов к замене  $e_i + e_j \rightarrow e_i + e_j + \chi$ .

$$\varepsilon_d^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{\eta\tau 12} e_{12} z_{12\tau}^{(\eta)2} - 0.1 \left( 2\kappa_{pn} Q_p Q_n + \sum_{\tau} \left( \kappa Q_{\tau}^2 + G^{(2)} \sum_{\eta} P_{\tau}^{(\eta)2} \right) \right); \quad (4)$$

$$2(k_1 \sqrt{\Omega(\Omega - 1)})^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\eta\tau 12} e_{12} (-1)^{\eta+1} z_{12\tau}^{(\eta)2} - 0.1 \left( 2\kappa_{pn} Q_p Q_n + \sum_{\tau} \left( \kappa Q_{\tau}^2 + G^{(2)} \sum_{\eta} (-1)^{1-\eta} P_{\tau}^{(1-\eta)2} \right) \right) \right\};$$

$$Q_{\tau} = \left( \sum_{12} \langle 1 || q || 2 \rangle (-1)^{\frac{\eta}{2}} L_{12}^{(0)} z_{12}^{(1)} \right)_{\tau};$$

$$P_{\tau}^{(\eta)} = \left( \sum_{12} \langle 1 || q || 2 \rangle (-1)^{\frac{\eta}{2}} M_{12}^{(\eta)} z_{12}^{(1-\eta)} \right)_{\tau}. \quad (5)$$

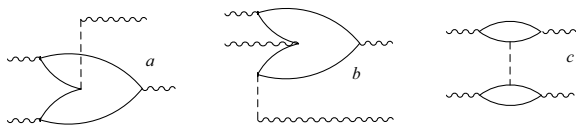


Рис.: Диаграммы, иллюстрирующие члены  $C_L^{(0)}$ .

## Перенормировка параметров

Для учета связи коллективного (состоящего только из  $D$ -фононов) и неколлективного (содержащего дополнительно один из возможных  $B_J$ -фононов) пространств рассматривается расширенная волновая функция

$$\Psi(I) = |\psi_c(I)\rangle + \sum_{i1,c1} \alpha_{i1,c1} \left( B_{i1}^+ \psi_{c1} \right)^{(I)} \rangle, \quad (6)$$

где  $|\psi_c\rangle$  есть волновая функция, содержащая суперпозицию только  $D$ -фононов, которая будет называться функцией коллективного состояния.

Однофононная энергия  $E_1$  с учетом рассматриваемых поправок определяется из уравнения

$$\varepsilon_d^{(0)} - E_1 = R_1(E_1) + R_2(E_1);$$

$$R_1(E_1) = \sum_{ij} \frac{|\langle D|H|B_{ij}^+D^+ \rangle|^2}{\omega_i + \varepsilon_d^{(0)} - E_1};$$

$$R_2(E_1) = \sum_{ij\lambda} \frac{|\langle D|H|B_{ij}^+(D^+D^+)^{(\lambda)} \rangle_n|^2}{\omega_i + 2\varepsilon_d^{(0)} + C_\lambda^{(0)} - E_1},$$

где  $\varepsilon_d^{(0)}$  является оценкой для однобозонной энергии, выраженной через амплитуды только  $D$ -фонона.



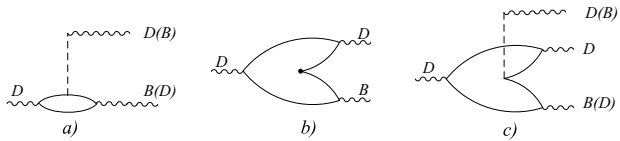


Рис.:

Уравнение для перенормированной двухфононной энергии  $E_2^{(L)}$  с учетом, что невозмущенная энергия определяется как  $2\varepsilon_d^{(0)} + C_L^{(0)}$ , имеет вид

$$2\varepsilon_d^{(0)} + C_L^{(0)} - E_2^{(L)} = R_3^{(L)}(E_2^{(L)}) + R_4^{(L)}(E_2^{(L)}) + R_5^{(L)}(E_2^{(L)}) + R_6^{(L)}(E_2^{(L)}),$$

$$R_k^{(L)}(E_2^{(L)}) = \sum_{ij\lambda} \frac{|\langle (DD)_n^{(L)} | H | B_{ij}^+ ((D^+)^{k-3})^{(\lambda)} \rangle_n|^2}{\omega_i + E^{(k-3)} - E_2^{(L)}}, \quad k = 3, 4, 5, 6$$

где  $E^{(0)} = 0$ ,  $E^{(1)} = \varepsilon_d^{(0)}$  – однобозонная энергия,

$E^{(2)} = 2\varepsilon_d^{(0)} + C_\lambda^{(0)}$  – двух  $d$ -бозонная энергия,  $E^{(3)} = E_{3\lambda}^{(0)}$  – энергия трех  $d$ -бозонного состояния, связанного в момент  $\lambda$  и полученная с учетом только  $D$ -фононных амплитуд,  $L = 0, 2, 4$  – мультипольность двухфононного триплета. При вычислении МЭ  $\langle (DD)_n^{(L)} | H | B_{ij}^+ (D^+ D^+ D^+)_n^{(\lambda)} \rangle$  необходимо знать трех  $D$ -фононную нормировку, которая оказалась заметно меньше трех  $d$ -бозонной. Это важно для последующих вычислений.

## Связь коллективных и неколлективных состояний

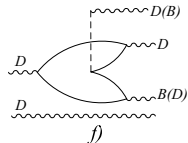
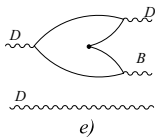
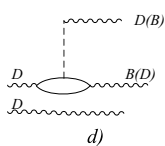
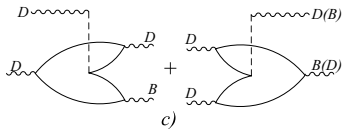
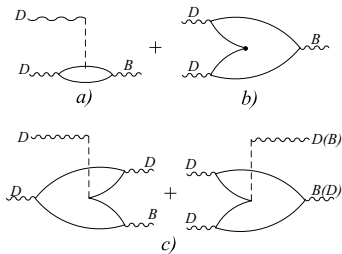
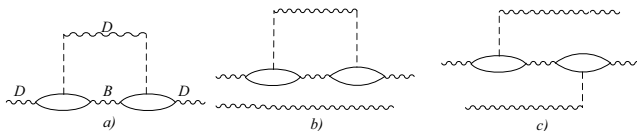


Рис.:



## Дополнительные условия

1 – это нормировка  $D$ -фононов.

2 – Бозонные волновые функции представимы в виде

$$|l\rangle = \sum_{n_d, \nu, \omega_\Delta} \alpha_d(n_d, \nu, \omega_\Delta, l) \frac{1}{\sqrt{(\Omega - n_d)!}} (s^+)^{\Omega - n_d} |n_d, \nu, \omega_\Delta, l\rangle,$$

где  $|n_d, \nu, \omega_\Delta, l\rangle$  есть нормированные функции квадрупольных бозонов, соответствующие неприводимому представлению группы  $SU(5)$  с квантовыми числами, соответствующими числу квадрупольных бозонов ( $n_d$ ), бозонному сениорити ( $\nu$ ), то есть числу квадрупольных бозонов, не связанных в нулевой угловой момент, число троек  $\nu$ , связанных в нулевой угловой момент ( $\omega_\Delta$ ). В этом случае условие нормировки имеет вид

$$\langle l|l\rangle = \sum_{n_d, \nu, \omega_\Delta} \alpha_d^2(n_d, \nu, \omega_\Delta, l) = 1,$$

3 –  $u_1^2 + v_1^2 = 1$

4 – число частиц в среднем через  $\lambda_\tau(l)$ .

5 – Полное число бозонов  $\Omega$  – неизменность и целостность

## Дополнительные условия

Таким образом, мы имеем три набора неизвестных величин: параметры преобразования Боголюбова  $(u, v)$ , фоновые амплитуды  $\psi, \varphi$  или  $z^{(n)}$  и амплитуды  $\{\alpha_D\}$ , характеризующие фоновый состав волновых функций  $|l\rangle$ .

Такой способ определения этих величин приводит к тому, что все три набора параметров оказываются взаимосвязанными и зависящими от спина состояния  $l$ .

Возникает задача их взаимного согласования, что оказывается невозможным. Кроме того

$$y_j = 1 - n_j / (j + 1/2),$$

где  $n_j$  есть среднее число квазичастиц на уровне сферического поля  $j$ ,  $y_j$  есть вероятность того, что уровень  $j|l\rangle$  свободен от квазичастиц, т.е.  $0 < y_j < 1$ .

## Дополнительные условия

Достичь самосогласования всех трех определяемых амплитуд ( $z^{(\eta)}$ ,  $u(v)$ ,  $\{\alpha_d\}$ ) оказывается невозможно как при использовании стандартного варианта КМСФ, где амплитуды  $\varphi$  часто оказываются значительными, так и в приближении ТД. Чтобы самосогласование стало возможным, необходимо оставаясь в рамках КМСФ, обеспечить малость амплитуд  $\varphi$ . Выполнение этого условия при фиксированных значениях силовых констант осуществляется введением слагаемого, регулирующего величину суммы квадратов  $\varphi$ :

$$\Phi_{\varphi} \sim \chi\left(\sum_{\tau 12} \varphi_{12\tau}^2 + \frac{1}{2}\right) \sim \chi\left(\sum_{\tau 12} (z_{12}^{(1)2} + z_{12}^{(0)2})_{\tau}\right).$$

$$0.03 < \sum \varphi^2 < 0.05$$

## Дополнительные условия

$$\begin{aligned}
 \Phi' &= -\frac{1}{5}\omega(n_d(l)+5/2) \sum_{\mu} \langle |[D_{\mu}, D_{\mu}^+] | \rangle - \sum_{\tau} \lambda_{\tau} N_{\tau} - \sum_{\tau,j} e_{\tau j} (u_j^2 + v_j^2)_{\tau} \\
 &\quad - E_l \sum_{n_d, v, \omega} \alpha_d^2(n_d, v, \omega, l) + \frac{6}{5} \frac{1}{\Omega(z(\eta))} \omega'(n_d + 5/2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \chi(n_d(l) + 5/2) \sum_{\tau 12} (z_{12}^{(1)2} + z_{12}^{(0)2})_{\tau} - \frac{1}{2} \sum_{\tau 1} ((2j_1 + 1)\eta_1 y_1)_{\tau} \\
 &= -\omega(n_d(l) + 5/2) \sum_{\tau 12} (z_{12}^{(1)} z_{12}^{(0)})_{\tau} - \sum_{\tau} \lambda_{\tau} N_{\tau} - \sum_{\tau,j} e_{\tau j} (u_j^2 + v_j^2)_{\tau} - \\
 &\quad - E_l \sum_{n_d, v, \omega_{\Delta}} \alpha_d^2(n_d, v, \omega_{\Delta}, l) + 2\omega' \sum_{\tau 12} (z_{12}^{(1)} z_{12}^{(0)} n_2^{(1)})_{\tau} \left( n_d(l) + 5/2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \chi(n_d(l) + 5/2) \sum_{\tau 12} (z_{12}^{(1)2} + z_{12}^{(0)2})_{\tau} - \frac{1}{2} \sum_{\tau 1} ((2j_1 + 1)\eta_1 y_1)_{\tau},
 \end{aligned}$$

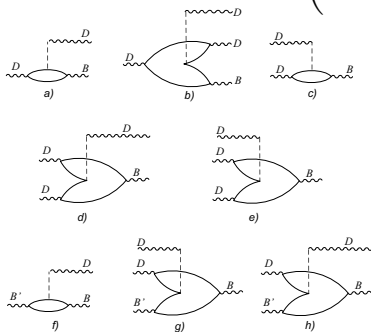
## БОЗОННОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОЛОС<sup>(I)</sup>

$$\Psi(I) = \psi_c(I) + \sum_{i1, c1} \alpha_{i1, c1} | \left( b_{i1}^+ \psi_{c1} \right) \rangle + \dots,$$

$$H_b = H_{b1} + H_{b2}; \quad H_{b1} = H_{\text{IBM}} + \sum_i \omega_i b_i^+ b_i + V^{(1)}; \quad H_{b2} = V^{(2)} + V^{(3)}.$$

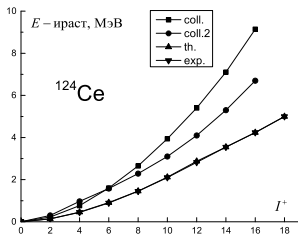
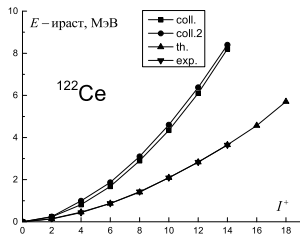
$$V^{(1)} \sim \left( d^+ d + \alpha d^+ d^+ \right)^{(J)} \cdot b_J; \quad (d^+ d d + \beta d^+ d^+ d)^{(J)} \cdot b_J;$$

$$V^{(2)} \sim (d^+ d^+ d^+)^{(J)} \cdot b_J; \quad V^{(3)} \sim (b_{J1}^+ b_{J2})^{(L)} \cdot \left( d^+ + \alpha d^+ d^+ + \beta d^+ d \right)^{(L)}$$



**Рис.:** Граф. представление матр. элем. взаимодей.  $D$ - и  $B$ -фононов. Волнистой линией обозначается фонон, тонкой линией – квазичастица, вертикальной – взаимодей.  $V^{(1)}$  – (a), (b), (c), (d);  $V^{(2)}$  – (e);  $V^{(3)}$  – (f), (g), (h).





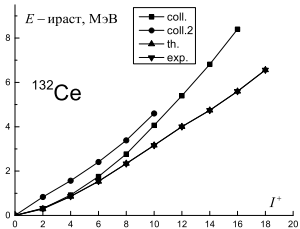
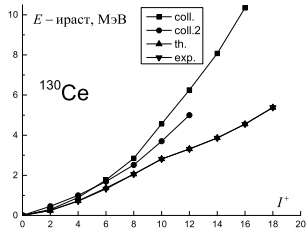
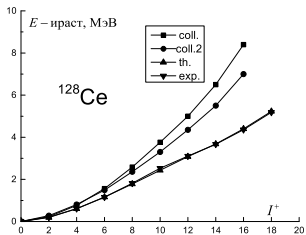
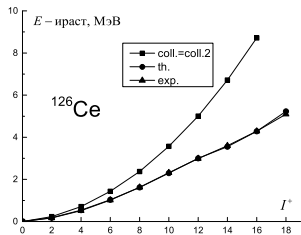


Рис.:

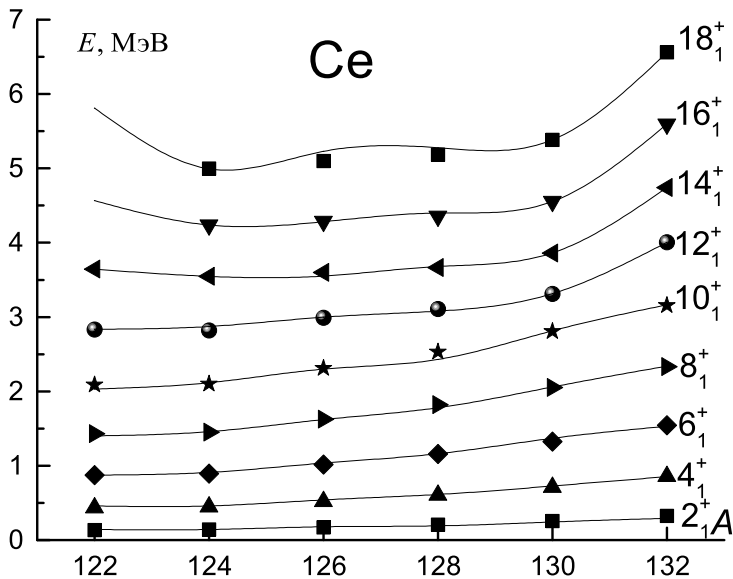
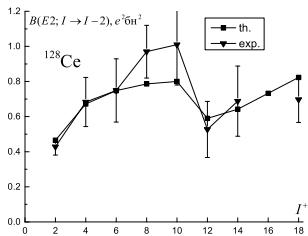
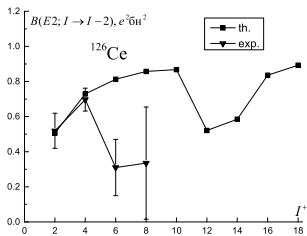
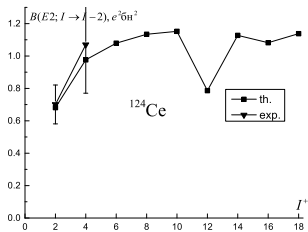
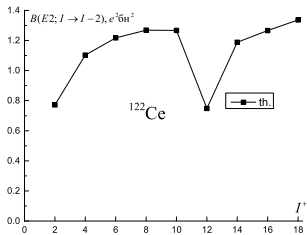
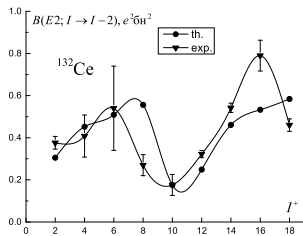
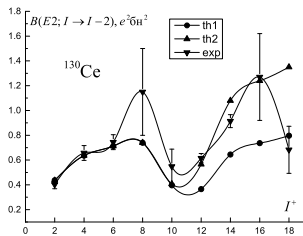


Рис.:





Параметризация ослабления взаимодействия состояний  $|B^+D^{+n'}\rangle$  и  $|D^{+n}\rangle$ -состояний

$$\langle D^{n'}B|H|D^{+n}\rangle \rightarrow \varsigma \langle D^{n'}B|H|D^{+n}\rangle, \quad (7)$$

Данный параметр используется как при перенормировке бозонных параметров, так и при рассмотрении явного учета взаимодействия коллективных и высокоспиновых неколлективных состояний при пересечении полос.

Если принять, что при наличии  $B$ -фона  $D$ -фонон становится  $D'$ -фононом. Отличие связано как с фоновыми амплитудами, так и параметрами сверхтекучести. Пусть

$$\xi = \langle D'|D^+\rangle, \quad (8)$$

тогда можно предположить, что  $\varsigma = \xi^{n_d(l)}$ .

# Параметризация ослабления взаимодействия

. Следует отметить, что в деформированных ядрах зависимость  $n_d(I)$  оказывается достаточно плавной, в то время как  $\langle C_4(I) \rangle$  для ираст-полос испытывает существенный рост.

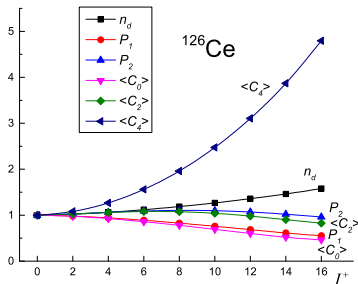


Рис.: Бозонные средние для  $^{126}\text{Ce}$  в зависимости от спина коллективных состояний в относительных единицах относительно основного состояния  $0^+$ , для которого они соответственно равны 5.93, 5.35,  $-12.61$ , 5.12, 5.04, 7.0172 и  $\Omega = 25$ .

Поэтому была принята модель

$$\zeta = \xi^{n_d + P_1 + \beta(\langle C_4(I) \rangle - \langle C_4(0) \rangle)}. \quad (9)$$

Для  $^{126}\text{Ce}$  и  $^{130}\text{Ce}$  было принято  $\xi = 0.9733$ ,  $\beta = 0.19$  и  $\xi = 0.945$ ,  $\beta = 0.40$  соответственно.

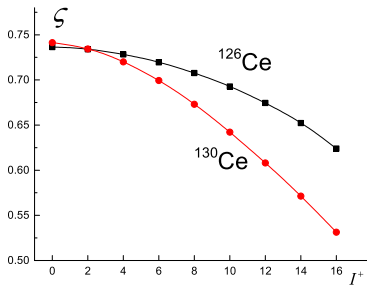


Рис.: Значения  $\zeta(I)$  для  $^{126,130}\text{Ce}$  с учетом бозонных средних.



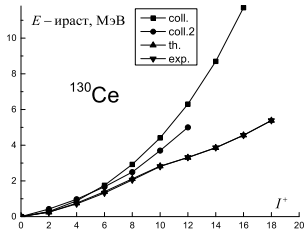
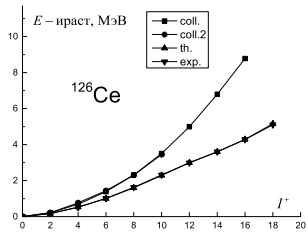


Рис.:

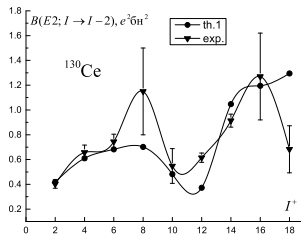
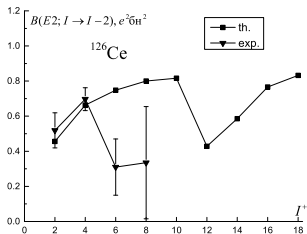


Рис.: Теоретические и экспериментальные значения вероятностей E2-переходов внутри ираст-полос. Для  $^{130}\text{Ce}$  теоретический расчет соответствует наличию усиливающего фактора оператора между компонентами волновых функций явно содержащих неколлективные фононы в 1.3 раза.

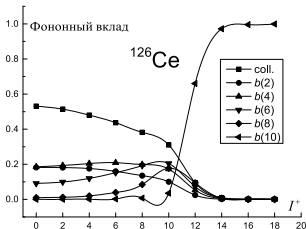
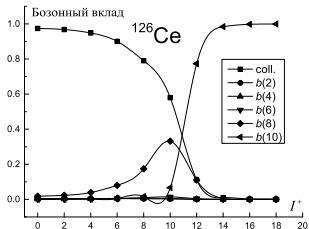
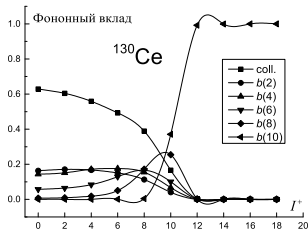
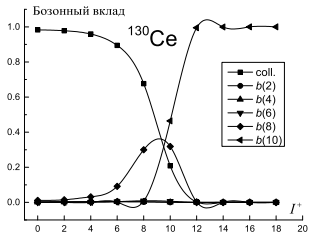


Рис.: Бозонный и фононный состав волновых функций для  $^{130}\text{Ce}$ .  
 "Coll" – только  $d$ -бозонный или  $D$ -фононный состав. Под  $b(J)$   
 понимается прочие бозоны (фононы).



**Рис.:** Бозонный и фононный состав волновых функций для  $^{130}\text{Ce}$ .  
 "Coll" – только  $d$ -бозонный или  $D$ -фононный состав. Под  $b(J)$  понимается прочие бозоны (фононы).

## Бозонное описание пересечения полос

**Таблица:** Параметры, используемые в расчетах. Все величины безразмерны;  $\kappa_1 = -0.6\kappa_0$ ; это приводит к  $\kappa_{nn} = \kappa_{pp} = 0.4\kappa_0$ ;  $\kappa_{pn} = 1.6\kappa_0$ ; коэффициент  $\alpha_{1s}$  соответствует усилению спин-орбитального расщепления в среднем поле

$A$	$G^{(2)}$	$\kappa_{nn}$	$\kappa_{np}$	$\alpha_{1s}$	$\sum \varphi^2 / \sum \psi^2$
122	1.4	0.42	1.86	1.274	0.017
124	1.4	0.40	1.6	1.274	0.01
126	1.4	0.39	1.56	1.274	0.017
128	1.4	0.40	1.6	1.174	0.01
130	1.4	0.40	1.6	1.174	0.007
132	1.4	0.40	1.6	1.074	0.012