

# Využití konceptuálních úloh a grafického znázorňování v úvodním kurzu kvantové fyziky

Zdeňka Koupilová, Petr Kácovský

Katedra didaktiky fyziky MFF UK, Praha

# Osnova

- ❑ motivace pro modifikaci kurzu kvantové mechaniky
- ❑ konceptuální úlohy
  - ❑ PI + JiTT
  - ❑ úlohy
  - ❑ testy
- ❑ grafické znázorňování
- ❑ další plány

# Výuka kvantové fyziky

- osobní motivace
- výuka kvantovky i fyziky mikrosvěta obecněji
- kurz základů kvantové fyziky pro budoucí učitele fyziky
  - NUFY100 Kvantová mechanika
  - NFUF204 Úvod do kvantové mechaniky a kvantové teorie
- současné evropské programy
  - Quantum Flagship (<https://qt.eu/>)
  - GIREP Community on Teaching / Learning Quantum Physics (TLQP)

# Konceptuální úlohy a testy

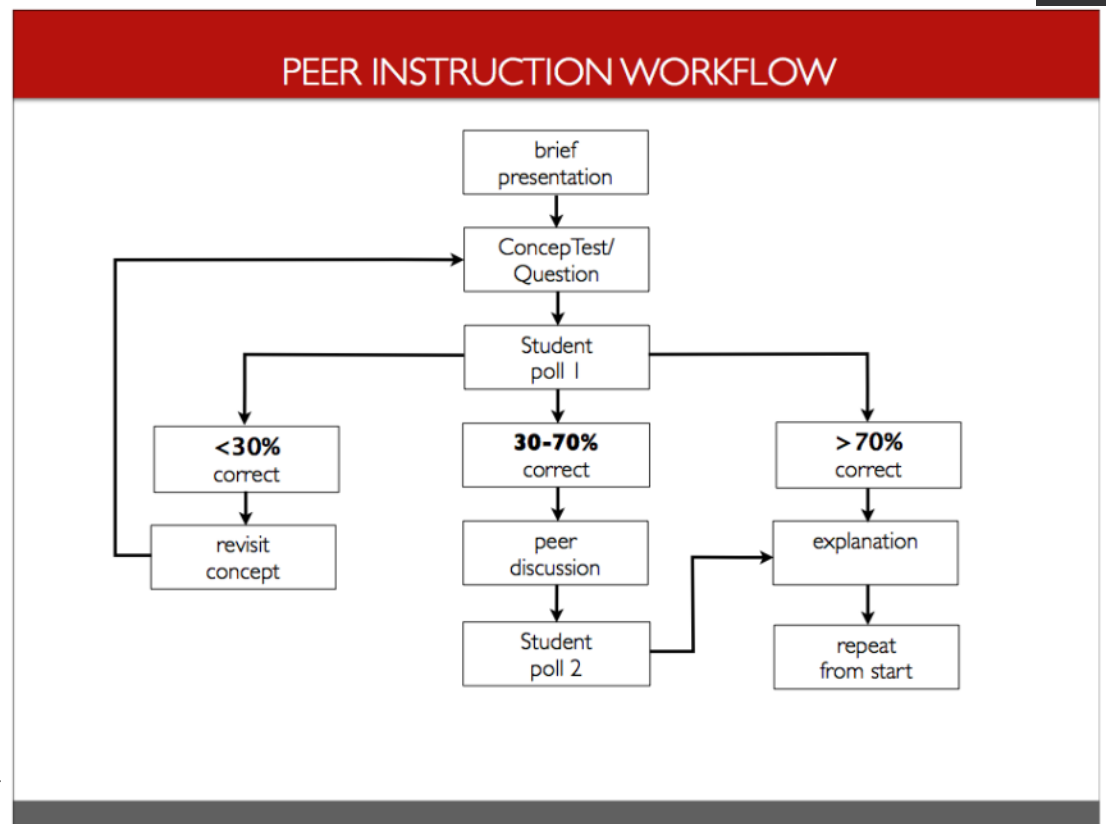
## ConceptTests

- úlohy zaměřené na základní principy, často uzavřené (s výběrem možností)
- Eric Mazur, Harvard University,
  - pro studenty fyzikálních přednášek pro hodně posluchačů ([Mazur, 1997](#))
  - metoda Peer Instruction
- základní / jednoduché myšlenky
- nemohou/nemusí být řešeny výpočtem/rovnicemi
- lze jim vymyslet vhodné možnosti
- jednoduché zadání
- přiměřené (střední) obtížnost

# Peer Instruction

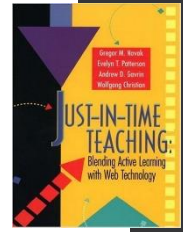
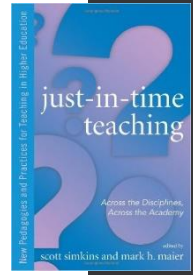
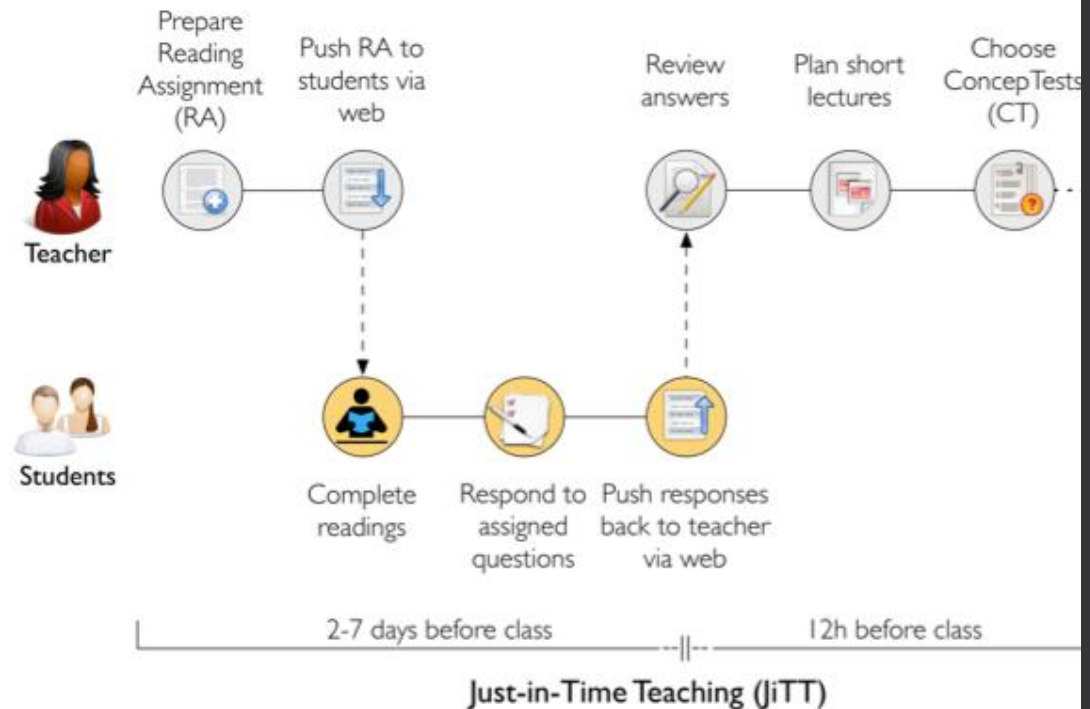


- vysvětlení od spolužáka bývá srozumitelnější
- učení probíhá u studentů všech úrovní
- AHA zážitky



# Just-in-Time Teaching

- G. M. Novak
- active learning – student je aktivní
- zpětná vazba pro vyučujícího
- změna toho, čemu se věnujeme v hodině
- různé typy úloh
  - WarmUps
  - Puzzles
  - GoodFors



# „Naše“ JiTT + PI

- dvě konceptuální otázky a jedna metakognitivní
- zveřejněny několik dní před hodinou (Moodle)
- odpovědi odpoledne / večer před výukou
- hodnotí se snaha, nikoli správnost
- máme malé studijní skupiny, nemusíme se omezovat na uzavřené otázky
- rozechřívací otázky
- opakovací otázky
- ConcepTests
- otázky provokující diskuzi





# Příklady otázek

Označme si 3 vlastní funkce operátoru  $\hat{B}$  nějaké fyzikální veličiny jako  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  a  $\psi_3$ . Necht' jsou ortonormální a platí pro ně

$$\hat{B}\psi_1 = b\psi_1, \quad \hat{B}\psi_2 = 3b\psi_2, \quad \hat{B}\psi_3 = 5b\psi_3,$$

kde  $b$  je reálná konstanta. Provedli jsme asi 10 000 měření (což není málo, ale rozhodně to také není strašně moc). Výsledkem bylo, že nám 6 945x vyšla hodnota  $b$  a 3 055x hodnota  $3b$ .

A.  $\psi = \frac{2}{3}(\psi_1 + \psi_2) + \frac{1}{3}\psi_3.$

B.  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2)$

C.  $\psi = -\frac{99}{100}\psi_1 + \frac{1}{100}\psi_2 + \frac{1}{100}\psi_3.$

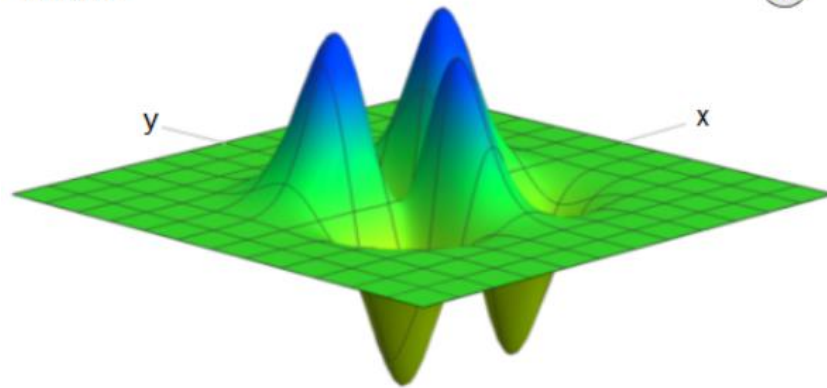
D.  $\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_3.$

E.  $\psi = \psi_2 + \psi_3.$

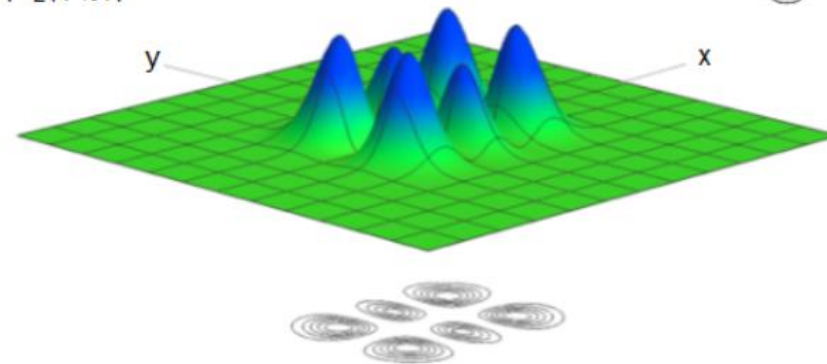
Určete, které z následujících vlnových funkcí mohou principiálně popisovat stav částice před měřením.

Vyberte z nich ty, které to sice v principu mohou být, ale nezdá se to moc pravděpodobné.

$\Psi_{21}(x,y)$



$|\Psi_{21}(x,y)|^2$



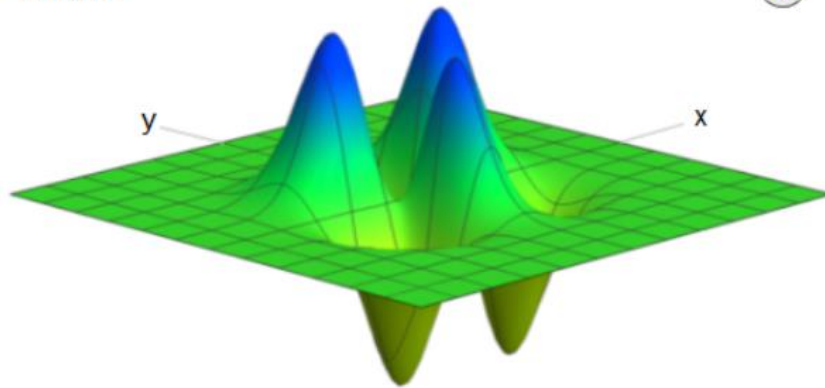
Jedná se o stac.  
řešení:

A) 2D  
obdélníkové  
jámy

B) symetrického  
2D harm.  
oscilátoru

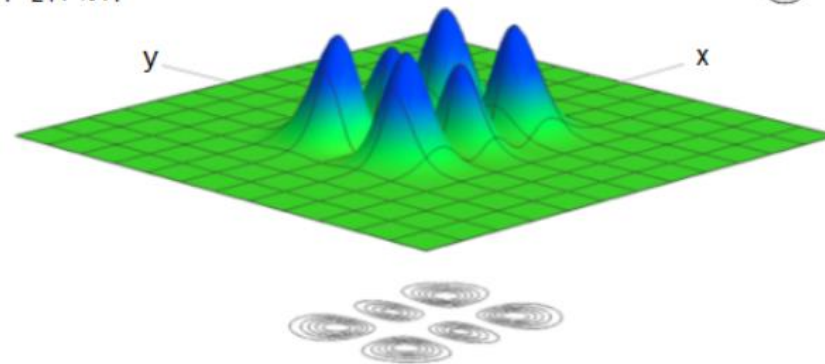
$\Psi_{21}(x,y)$

?



$|\Psi_{21}(x,y)|^2$

?



Jaká jsou kvantová čísla?

A)  $n_x = 3, n_y = 2$

B)  $n_x = 1, n_y = 2$

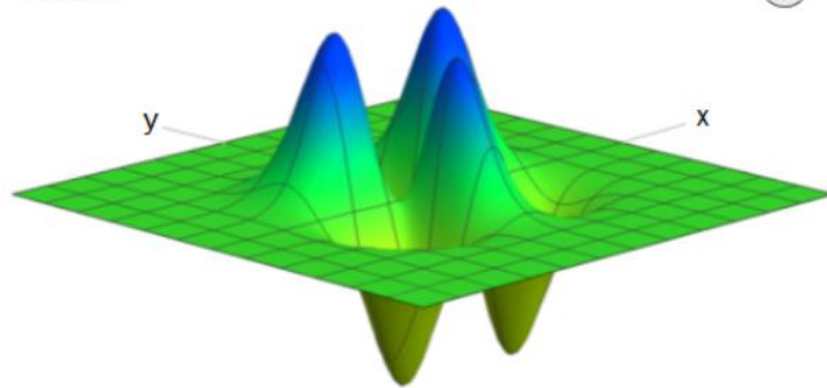
C)  $n_x = 2, n_y = 3$

D)  $n_x = 2, n_y = 1$

Jaká je energie?

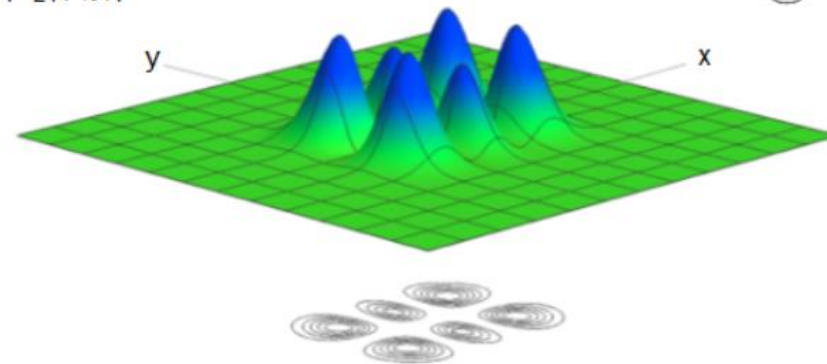
$\Psi_{21}(x,y)$

?



$|\Psi_{21}(x,y)|^2$

?



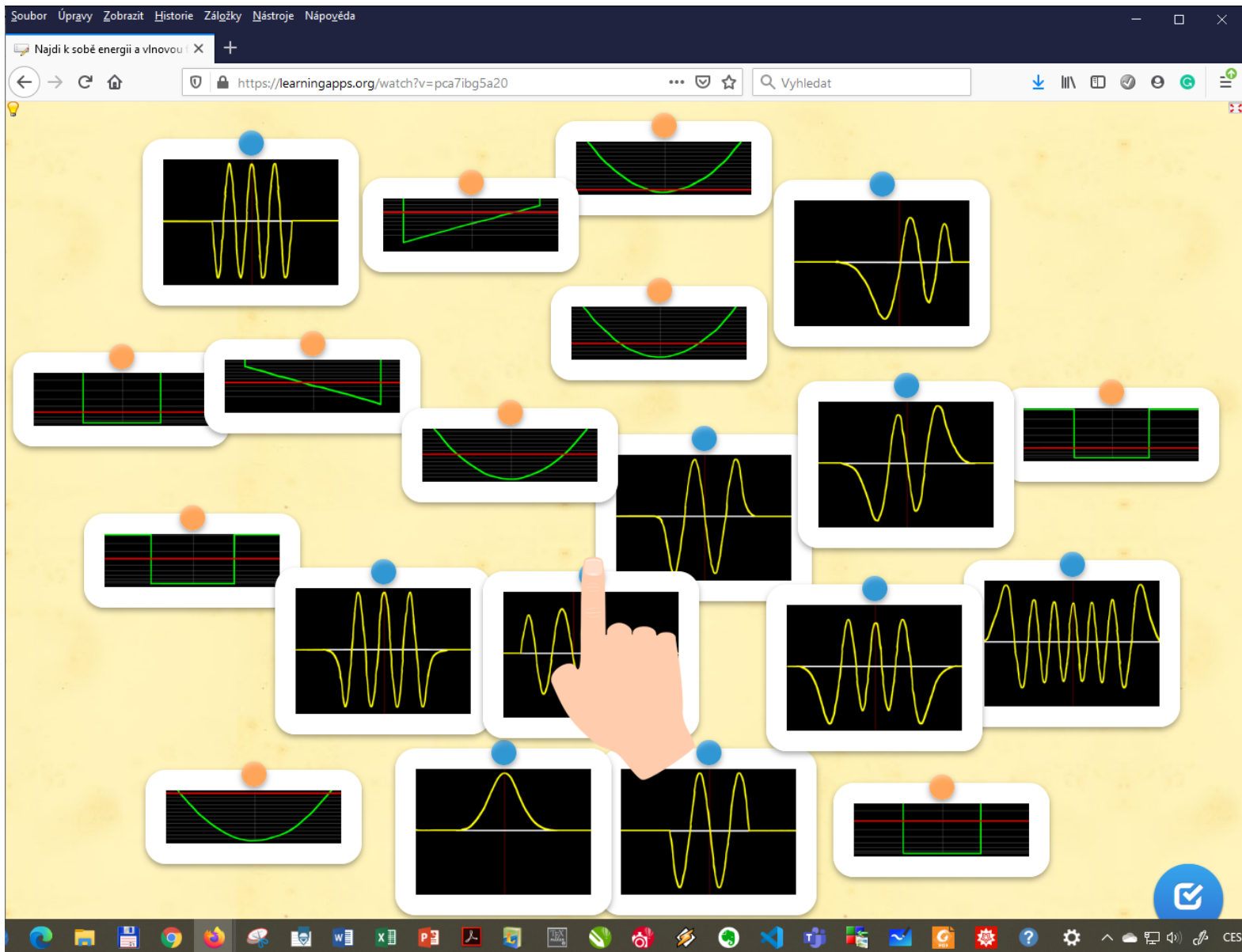
- A)  $E = 6\hbar \omega$
- B)  $E = 5\hbar \omega$
- C)  $E = 4\hbar \omega$
- D)  $E = 13\hbar \omega$
- E)  $E = 3\hbar \omega$
- F) jiná hodnota

Uvažujme následujících osm výroků charakterizující stav jedné částice:

1. Jedná se o vlastní stav operátoru  $\hat{H}$ , tj. stav popsany vlastní funkcí operátoru  $\hat{H}$ .
2. Neurčitost energie částice je v tomto stavu nulová.
3. Jedná se o stav s ostrou hodnotou energie.
4. V tomto stavu se energie částice nemění s její polohou.
5. Pokud v tomto stavu změřím energii a měření budu ihned na té částici opakovat, dostanu v obou měřeních vždy tutéž hodnotu.
6. Změření energie neovlivní popis systému.
7. Tento stav nazýváme stacionární stav.
8. V tomto stavu jsou střední hodnoty časově nezávislých veličin konstantní (bez ohledu na to, zda komutují či nekomutují s hamiltoniánem).

Prozradím vám, že **šest** z těchto **výroků říká totéž**, ale zamíchal se mezi **ně jeden obecně pravdivý** výrok (platí pro jakýkoli stav jedné částice) a **jeden absolutní nesmysl**.



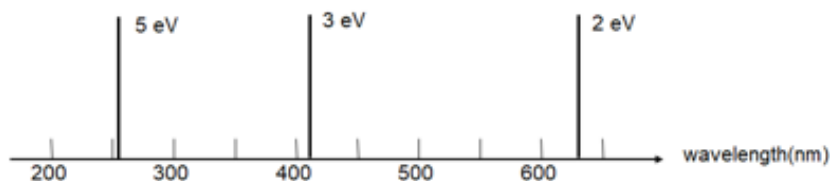


<https://learningapps.org/watch?v=pca7ibg5a20>

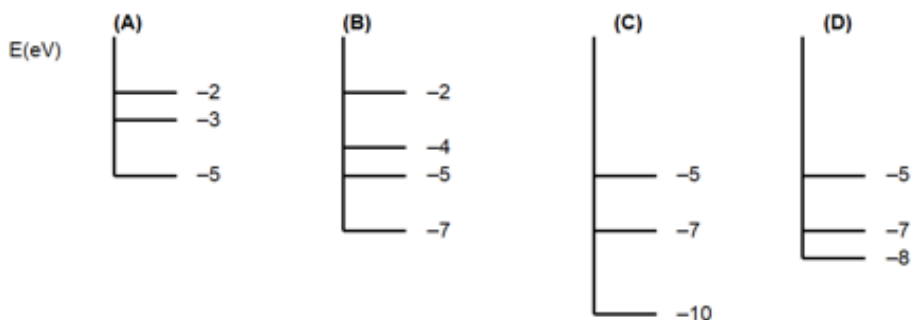
Foton, který byl vyzářen elektronem v nějakém systému (např. v atomu), je důsledkem přechodu elektronu z jedné energetické hladiny na jinou. Energie fotonu se rovná rozdílu energie, kterou elektron měl před vyzářením, a energie, kterou má poté - jinými slovy rozdílu energií příslušných energetických hladin.

### Rozcvička:

Uvažujme, že nějaký "neznámý" atom má spektrum jako na obrázku:



Který ze systémů povolených energií (energetických hladin) odpovídá tomuto spektru? Případně za jakých předpokladů.



**A teď "skutečná" úloha:** Uvažujme úplně jiný "atom", u kterého jsme naměřili těchto 10 spektrálních čar:

4,52 eV; 7,51 eV; 12,06 eV, 15,09 eV, 22,52 eV;  
27,04 eV; 45,00 eV; 60,08 eV; 67,56 eV; 72,02 eV

Vaším úkolem je vymyslet co možná nejjednodušší systém hladin, kterému by toto spektrum mohlo odpovídat. O přesnosti našich spektroskopických měření vypovídá přesnost, s jakou jsou uvedeny energie fotonů jednotlivých čar.

*Poznámka:* Za mnohem cennější než vlastní výsledek považuji postřehy k tomu, jak jste se tento problém pokoušeli řešit. Nad čím jste uvažovali, co jste zkoušeli, co vás napadlo, že se musí brát v úvahu, co může způsobit nejjednoznačnosti, co naopak už je jasně dané, ... Takže lze k diskuzi přispět, i když nenaleznete řešení, které by vás uspokojilo ;-)

Představte si, že neplatí princip nerozlišitelnosti částic. Tj. uvažujeme elektrony jako v principu rozlišitelné (jen jsme třeba zatím neobjevili ten správný způsob odlišení).

Jak by vypadaly elektronové obaly atomů?

*Pro jednoduchost klidně uvažujte, že elektrony navzájem neinteragují a že vlastní stavy jsou tzv. „vodíku podobné“, tj. tvarově stejné jako u vodíku, jen pro jinou hodnotu  $Z$ .*

## Diskuze k přednáškám

### Diskuze k prvnímu týdnu (do 24. 2.)

Datum říká, že pondělí 24. 2. v 19:00 je hranice pro vkládání bodovaných příspěvků do diskuze. Diskutovat (= vkládat názory) půjde bez časového omezení i později.

Odpovědi ostatních uvidíte cca 30 minut po vložení vlastní odpovědi. U jednotlivých diskuzí (=otázek) si můžete nastavit, zda chcete dostávat upozornění i na e-mail.

Používáme pro tyto diskuze jiný modul, než jste zvyklí z prvního ročníku, pokud by něco nechodilo (= bylo nastaveno špatně), ozvěte se.

### Diskuze ke druhému týdnu (do 2. 3.)

### Diskuze ke třetímu týdnu (do 9. 3.)

### Diskuze ke 4. týdnu (do 16. 3.)

### Diskuze k 5. týdnu (do 23. 3.)

### Diskuze k 6. týdnu (do 30. 3.)

### Diskuze k 7. týdnu (do 6. 4.)

### Diskuze k 8. a 9. týdnu (do 20. 4.)

### Diskuze k 10. týdnu (do 27. 4.)

### Diskuze k 11. týdnu (do 4. 5.)

### Diskuze k 12. týdnu (do 11. 5.)



# Konceptuální testy

# Přehled konceptuálních testů z kvantové fyziky

- **Quantum Mechanics Concept Assessment (QMCA)**
  - H. Sadaghiani and S. Pollock, [Quantum mechanics concept assessment: Development and validation study](#), Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 11 (1), 010110 (2014).
- **Quantum Mechanics Conceptual Survey (QMCS)**
  - S. McKagan, K. Perkins, and C. Wieman, [Design and validation of the Quantum Mechanics Conceptual Survey](#), Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 6 (2), 020121 (2010).
- **Quantum Mechanics Formalism and Postulates Survey (QMFPS)**
  - E. Marshman and C. Singh, [Validation and administration of a conceptual survey on the formalism and postulates of quantum mechanics](#), Phys. Rev. Phys. Educ. Res. 15 (2), 020128 (2019).
- **Quantum Mechanics Survey (QMS)**
  - G. Zhu and C. Singh, [Surveying students' understanding of quantum mechanics in one spatial dimension](#), Am. J. Phys. 80 (3), 252 (2012).
- **Quantum Physics Conceptual Survey (QPCS)**
  - S. Wuttiprom, M. Sharma, I. Johnston, R. Chitaree, and C. Soankwan, [Development and Use of a Conceptual Survey in Introductory Quantum Physics](#), Int. J. Sci. Educ. 31 (5), 631 (2009).
- **Quantum Mechanics Visualization Instrument (QMVI)**
  - R. Robinett and E. Cataloglu, [Testing the development of student conceptual and visualization understanding in quantum mechanics through the undergraduate career](#), Am. J. Phys. 70 (3), 238 (2002).
- **Quantum Mechanics Assessment Tool (QMAT)**
  - The Colorado Science Education Initiative, The [Adaptable Curricular Exercises for Quantum Mechanics page](#)
- **Quantum Mechanics Concept Inventory (QMCI)**
  - J. Falk, [Developing a quantum mechanics concept inventory](#), Masters, Uppsala University, 2004.

# Přehled konceptuálních testů z kvantové fyziky

- **Quantum Mechanics Concept Assessment (QMCA)**
  - H. Sadaghiani and S. Pollock, [Quantum mechanics concept assessment: Development and validation study](#), Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 11 (1), 010110 (2014).
- **Quantum Mechanics Conceptual Survey (QMCS)**
  - S. McKagan, K. Perkins, and C. Wieman, [Design and validation of the Quantum Mechanics Conceptual Survey](#), Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 6 (2), 020121 (2010).
- **Quantum Mechanics Formalism and Postulates Survey (QMFPS)**
  - E. Marshman and C. Singh, [Validation and administration of a conceptual survey on the formalism and postulates of quantum mechanics](#), Phys. Rev. Phys. Educ. Res. 15 (2), 020128 (2019).
- **Quantum Mechanics Survey (QMS)**
  - G. Zhu and C. Singh, [Surveying students' understanding of quantum mechanics in one spatial dimension](#), Am. J. Phys. 80 (3), 252 (2012).
- **Quantum Physics Conceptual Survey (QPCS)**
  - S. Wuttiprom, M. Sharma, I. Johnston, R. Chitaree, and C. Soankwan, [Development and Use of a Conceptual Survey in Introductory Quantum Physics](#), Int. J. Sci. Educ. 31 (5), 631 (2009).
- **Quantum Mechanics Visualization Instrument (QMVI)**
  - R. Robinett and E. Cataloglu, [Testing the development of student conceptual and visualization understanding in quantum mechanics through the undergraduate career](#), Am. J. Phys. 70 (3), 238 (2002).
- **Quantum Mechanics Assessment Tool (QMAT)**
  - The Colorado Science Education Initiative, The [Adaptable Curricular Exercises for Quantum Mechanics page](#)
- **Quantum Mechanics Concept Inventory (QMCI)**
  - J. Falk, [Developing a quantum mechanics concept inventory](#), Masters, Uppsala University, 2004.

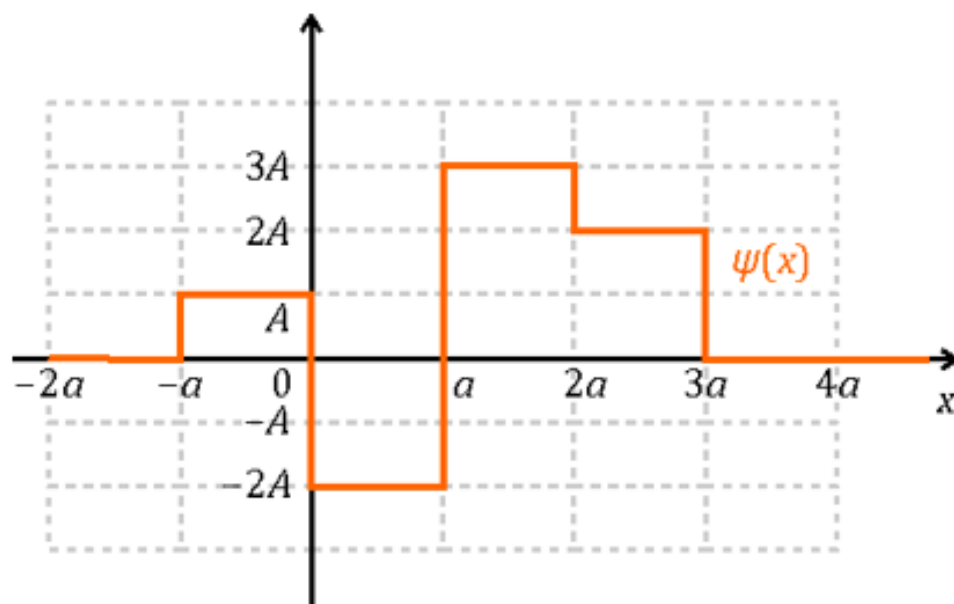
# Quantum Mechanics Visualization Instrument (QMVI)

- propojení pochopení s vizuální stránkou
- single-choice, 25 otázek,
- (neověřený) překlad do češtiny

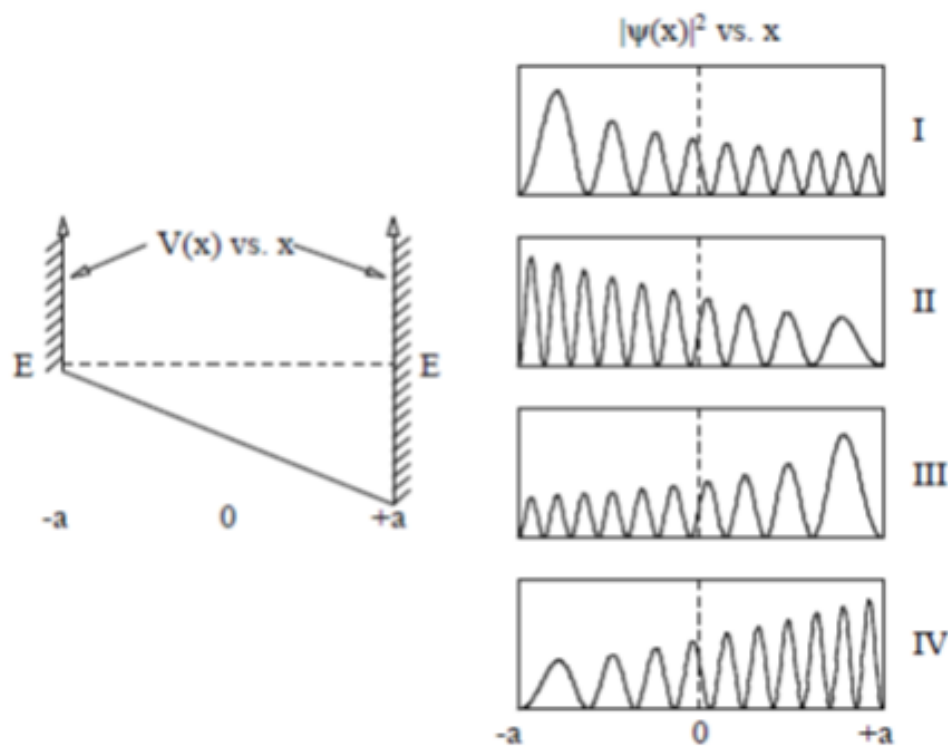
## 6. otázka

Obrázek ukazuje „graf“ (nerealisticky zjednodušené) jednorozměrné vlnové funkce  $\psi(x)$  v závislosti na souřadnici  $x$  v intervalu  $(-2a, +4a)$ . Pro všechny ostatní hodnoty  $x$  je vlnová funkce nulová. Jaká je pravděpodobnost, že naměříme polohu částice v intervalu  $(+2a, +3a)$ , tj. mezi  $x = +2a$  a  $x = +3a$ ?

- (A)  $2/9$
- (B)  $1/6$
- (C)  $1/4$
- (D)  $1/2$
- (E)  $1/3$



## 19. otázka



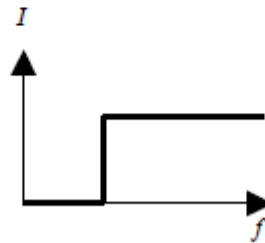
Obrázek vlevo představuje nekonečně hlubokou potenciálovou jámu s neproniknutelnými stěnami v  $x = \pm a$ , ale se skloněným dnem, takže jeden konec jámy je hlouběji než druhý.

Čárkovaná vodorovná čára označuje jednu konkrétní hladinu energie. Který z obrázků napravo (grafy  $|\psi(x)|^2$  v závislosti na souřadnici  $x$ ) nejpravděpodobněji odpovídá této hladině energie? (Svislá čára v obrázcích napravo prochází středem jámy v  $x = 0$ .)

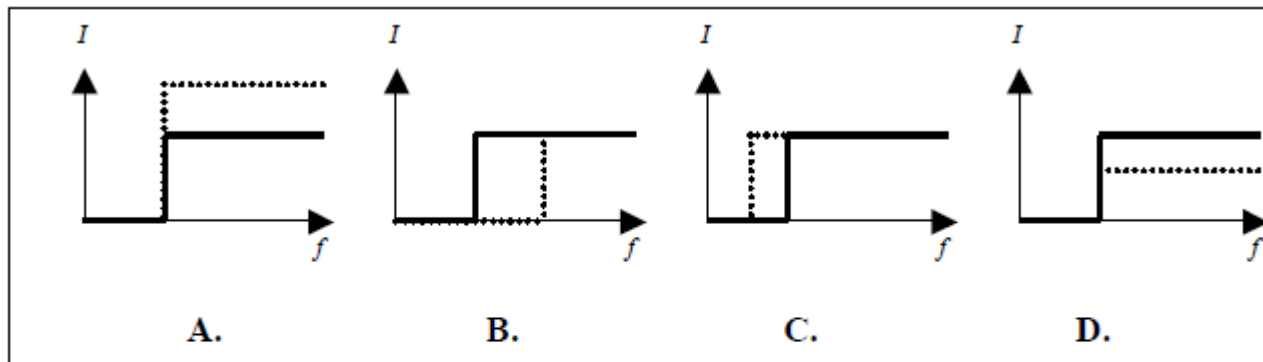
# Quantum Physics Conceptual Survey (QPCS)

- úvodní témata kvantovky
  - fotoefekt
  - dualismus vlna-kulička
  - dvojšterbinový experiment
- pretest – posttest
- 25 otázek, 30 minut, single choice, true/false

In a hypothetical experiment to demonstrate the photoelectric effect, a light source of variable frequency is shone on a photo-sensitive surface. Ejected photoelectrons are collected by an anode. A graph of the resulting photocurrent ( $I$ ) as a function of frequency ( $f$ ) looks like this.



Select your answers to the questions below from these graphs.



Which graph would be most appropriate when,

\_\_\_ 1. the intensity of the light is increased?

\_\_\_ 2. the work function of the surface is increased?

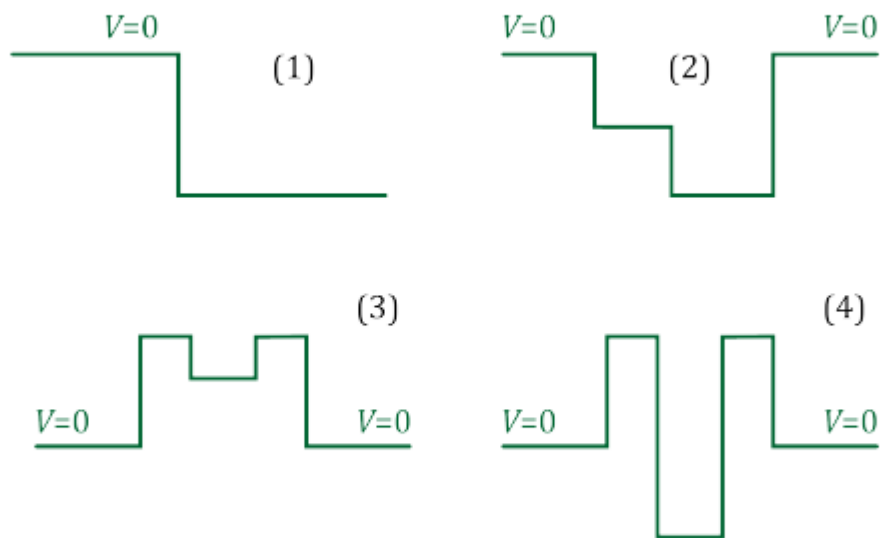
# Quantum Mechanics Survey (QMS)

- To assess students' conceptual understanding of quantum mechanics, specifically their **proficiency with the formalism of quantum mechanics in 1D**.
- Multiple-choice, 31 otázek, 50 minut (originál)
  - vlnová funkce, měření, střední hodnota, časový vývoj, Hamiltonián, pravděpodobnost nalezení,
  - nekonečná jáma, konečná jáma, harmonický oscilátor, tunelový jev
- český překlad, expertní posouzení
- 2016-2019, data od 45 studentů, nestandardizované podmínky, subjektivní hodnocení porozumění slovní zdůvodnění vybraných otázek
- průměrné skóre 38 % odpovídá mezinárodnímu průměru (undegraduate students)

OTÁZKA 13: V čase  $t = 0$  je stav systém I ve stavu  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$ . Nejdříve změříme polohu částice v čase  $t = 0$  s výsledkem  $x_0$ . Bezprostředně po změření polohy změříme energii. Jaký výsledek můžeme získat?

- A. Můžeme naměřit pouze hodnoty energie  $E_1$  nebo  $E_2$ .
- B. Můžeme naměřit hodnoty energie  $E_n$ , kde  $n$  je libovolné přirozené číslo.
- C. Můžeme naměřit pouze hodnotu energie  $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ .
- D. Můžeme naměřit hodnoty energie  $E = \sum_{n=1}^{\infty} c_n E_n$ , kde  $c_n$  jsou koeficienty splňující podmínku  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$ .
- E. Žádná z výše uvedených možností není pravdivá.

OTÁZKA 24: Z níže uvedených 1D potenciálů vyberte ty, které povolují jak vázané, tak rozptylové stavy.



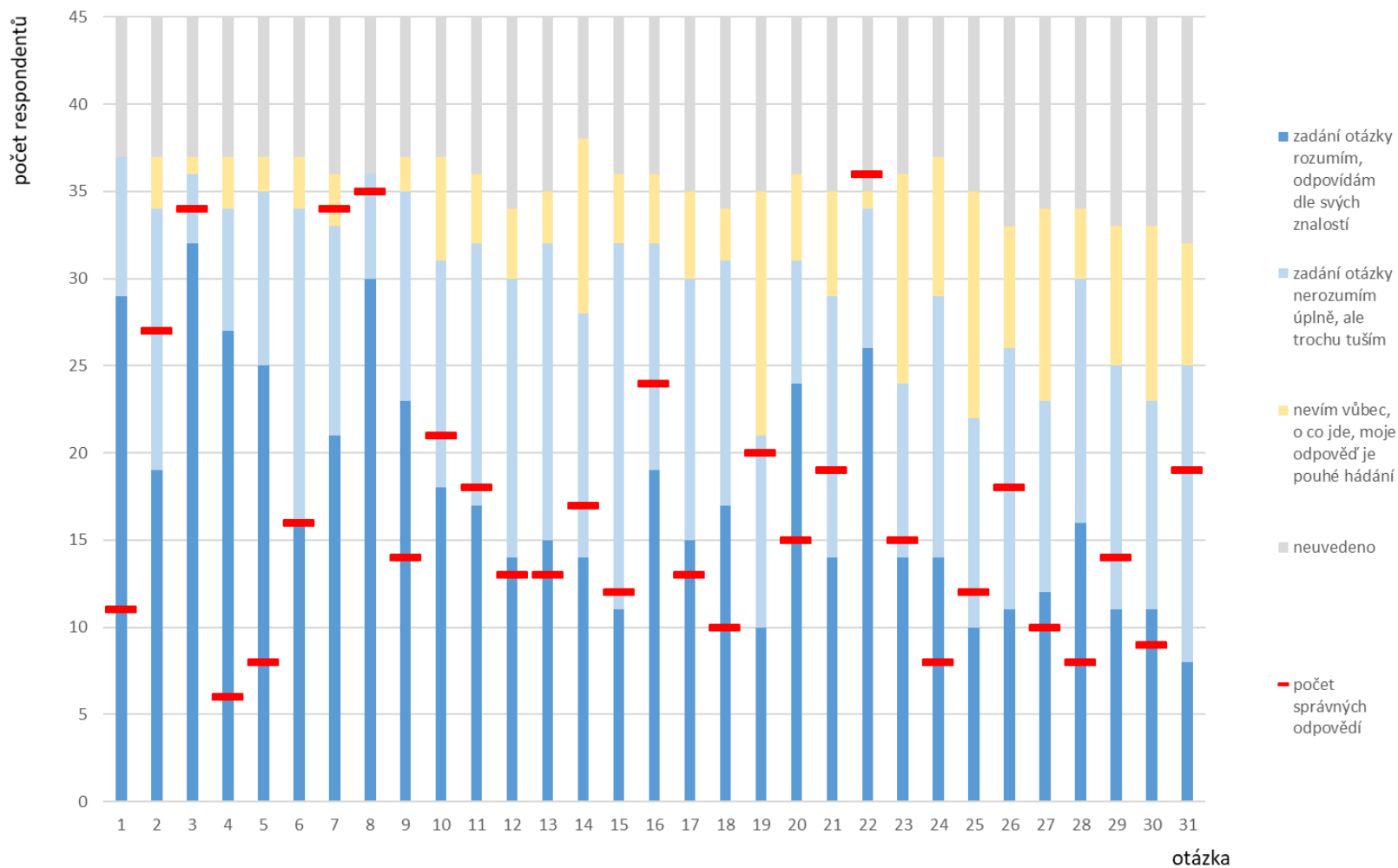
- A. Pouze (1)    B. Pouze (2)    C. (2) a (4)    D. (3) a (4)    E. (2), (3) a (4)

OTÁZKA 25: Víme, že  $e^{ikx}$  je vlnová funkce stacionárního stavu volné částice v jedné dimenzi s hybností  $p = \hbar k$ . Vyberte z následujících tvrzení ta, která jsou pravdivá pro stav volné částice popsaný vlnovou funkcí  $e^{ikx} + e^{-ikx}$ . (V této otázce se nezabývejte normováním vlnových funkcí.)

- (1) Částice je také ve stacionárním stavu.
- (2) Střední hodnota hybnosti částice je nulová.
- (3) Střední hodnota energie částice je nulová.

A. Pouze (1)      B. Pouze (2)      C. Pouze (3)      D. (1) a (2)      E. (1) a (3)

# Získaná data QMS



# Co na to studenti?

- Výhody jsou určitě průběžné opakování látky a zpětná vazba nakolik jsem pochopil látku.
- ... přiměje podívat se na to [probíranou látku] dřív než před testem
- kdyby se nad učivem nezamýšlel průběžně jindy, tak teď aspoň na chvíli musí.
- Učení se vyjadřovat a argumentovat
- Donutí mě to také konzultovat úlohy se spolužáky.
- Takto je to viac osobné ako keď riešime úlohy na papier, potom ich odovzdáme a o týždeň dostaneme opravené, kde je niečo preškrtnuté, niečo odfajknuté a počet bodov.
- ...mám čas premýšlet a hľadať, kedyž neviem na cvičení, tak mi musí niekto poradiť, alebo úlohu nevyriešim..
- Takisto aj tie 2 úlohy sú asi ideálne aj na ten čas, ktorý tu strávime.
- Automatická uzavírka odpovedí mňa donutí urobiť úlohy do daného termínu.
- Nová metodika výuky, jednou treba byť učiteľ, tak je fajn si vyskúšať, ako také pomôcky fungujú

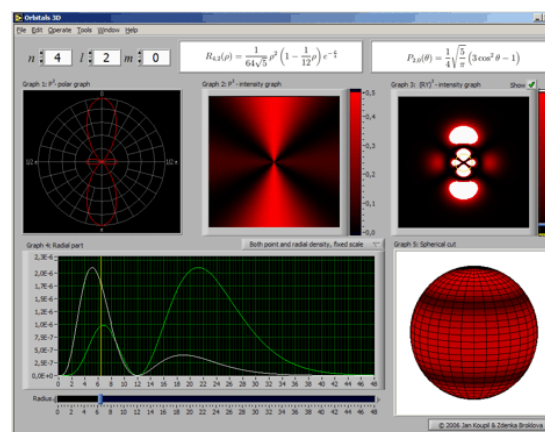
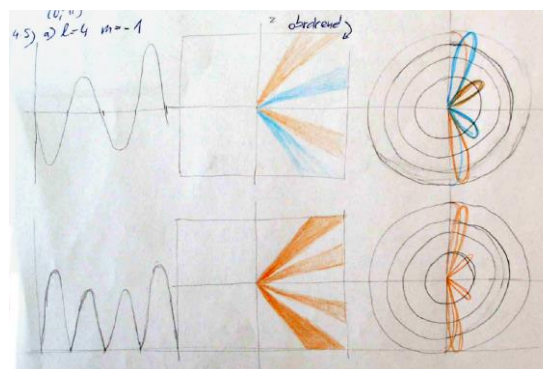
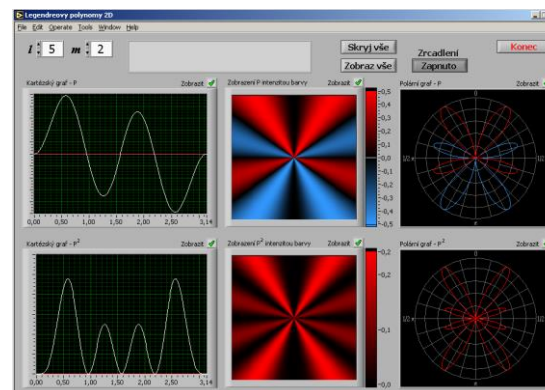
# Grafické znázorňování, aplety

# Grafické znázorňování

- názornější
- není čas vše počítat
- lze použít i na SŠ
- využití animace pro časový vývoj
- interaktivita
  
- může být ale zavádějící

# Orbitaly

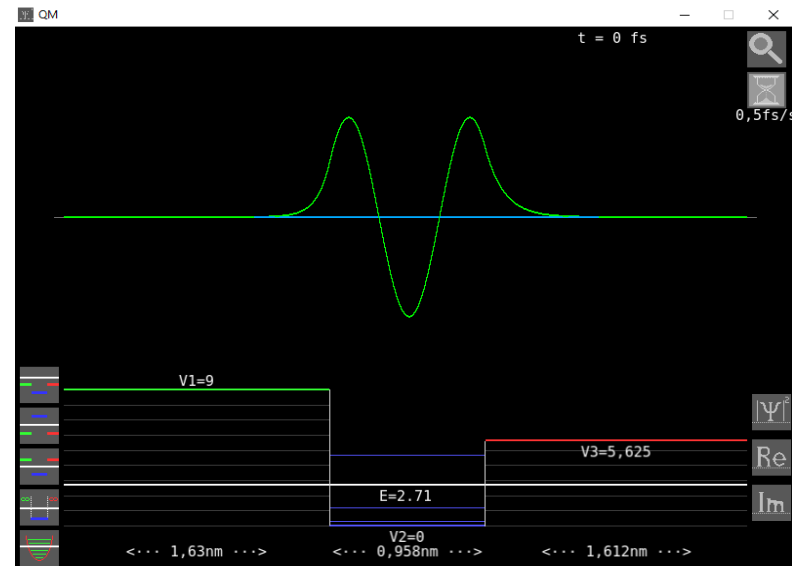
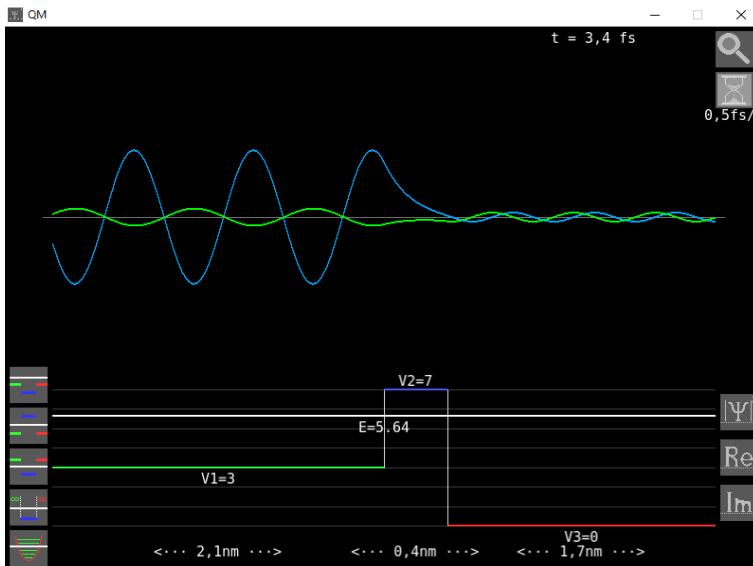
- první projekt, 2006
- 4 programy, LabView
- pracovní sešit, cca 30 úloh
- aktivní učení, Kolbův cyklu, scaffolding
- součást kurzu od roku 2007
- cca 80 vyplněných sešitů
  - studenti oceňují názornost, hravost, postupné budování představy orbitalů atomu vodíku
- používáno i na SŠ



<http://kdf.mff.cuni.cz/~koupilova/orbitals/>

# 1D kvantové potenciály

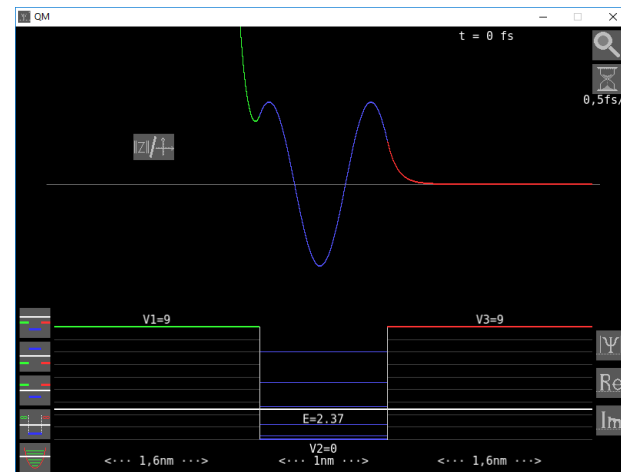
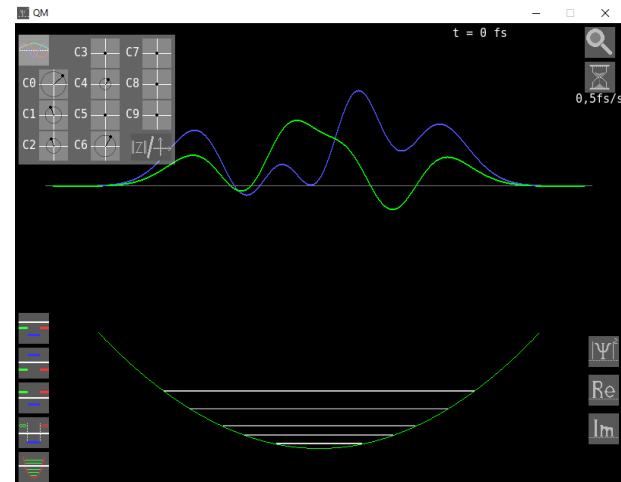
- applety v Javě (např. physlets) již nejsou podporované a bylo těžké najít adekvátní náhradu
- programoval: Tomáš Škraban (student kurzu QM)



<http://fyzweb.cz/materialy/qm-potencialy/>

# 1D kvantové potenciály

- kvantový schod (stupeň) a bariéra, konečná a nekonečná pravoúhlá jáma, harmonický oscilátor
  - matematické řešení Schrödingerovy rovnice
  - reálná a imaginární část vlnové funkce, hustota pravděpodobnosti
  - vázané stavy, rozptylové stavy, superpozice vázaných stavů
  - časový vývoj
- neintuitivní ovládání



<http://fyzweb.cz/materialy/qm-potencialy/>

# Aplety PhET

**Fotoelektrický efekt (1.10)**

Soubor Možnosti Nápověda

Intenzita 0%

400 nm

UV IR

Cil: Sodík

Zobrazit pouze elektrony s nejvyšší energií

Grafy

Proud vs napětí baterie

Proud vs intenzita světla

Energie elektronů vs frekvence světla

Proud: 0.000

0.00 V

**Stern-Gerlach Experiment**

počet magnetů: 2

počet částic: 0

Obnovit

vysílá atom

automatická úroveň

zpomalit rychle

Vynulovat počítadlo

orientace otáček

+z ↑

+x ←

-z ↓

náhodný xz

0 0

zvuk

**Quantum Bound States (1.08.01)**

File Colors Help

One Well Two Wells (Molecular Bonding) Many Wells (Band Structure)

Energy chart

Potential Well: Square

Configure Potential...

Superposition State

Show magnifying glass (10x)

Bottom chart

Display:

Probability Density

Wave Function

Wave function views:

real part

imaginary part

magnitude

phase 0 2π

Particle Mass: 1.00 m<sub>e</sub>

0.50m<sub>e</sub> 1.10m<sub>e</sub>

Reset All

Help!

0.0 fs

normal fast

$\Psi_T(x,t)$

**Quantum Tunneling and Wave Packets (1.12)**

File Colors Help

Energy (eV)

Wave Function

Probability Density

R=0.15

T=0.85

Potential: barrierWell

Show energy values

Show reflection and transmission probabilities

Electron Wave Function view:

real part

imaginary part

magnitude

phase 0 2π

Direction of incoming wave:

←

Electron Wave Function form:

wave packet

plane wave

Incoming/Reflected waves:

sum  separate

Reset All

Help!

<https://phet.colorado.edu/cs/simulations/filter?subjects=quantum-phenomena>

# Quantum Visualisation Project (QuVis)

- Antje Kohle a její tým, University of St. Andrews
- 47 html5 simulací, 68 flash simulací
- <https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/>
- tématické řazení
- 2 úrovně

The screenshot displays the QuVis website interface. At the top, the header reads "QuVis The Quantum Mechanics Visualisation Project" with the University of St Andrews logo. Below the header is a navigation bar with links for "Home", "Search for simulations", "About", "For instructors", "Research", "Donate", and "News".

The main content area is divided into several sections:

- Simulation Types:** "HTML5 Simulations (Suitable for Tablet and PC)" and "Flash Simulations (Suitable for PC)".
- Sort:** "Newest" and "Alphabetical".
- Topic:** A list of topics with checkboxes, including "All Topics", "Classical systems", "Single photon experiments", "Linear algebra", "One dimensional potentials", "Two dimensional potentials", "Multiple particles", "Spin angular momentum", "Entanglement", "Fundamental concepts", and "Quantum information".
- Level:** "All Levels", "Introductory", and "Advanced".
- Simulation Grid:** A grid of simulation thumbnails, each with a title and a brief description. Visible titles include:
  - Degenerate Perturbation Theory
  - Photons, Particles & Waves
  - The Finite Well
  - Half-harmonic Oscillator
  - Bloch Sphere Measurement
  - Bloch Time Development
  - Bloch Sphere
  - Time Development
  - Block on a Track

# QuVis v češtině

- <http://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/>
- budoucí učitelé – česká terminologie
- hotovo 17, rozpracováno 3, plán celkem 30 apletů
- doplnit o posloupnosti úloh / úkolů

**Animace** **Úkoly** **QuVis**

### Pravděpodobnost nalezení kostky v jámě

Hustota pravděpodobnosti teoreticky  
 $P_1(x) = 0.070 \text{ m}^{-1} < P_2(x) = 0.109 \text{ m}^{-1}$   
 1: Vlevo Pravděpodobnost teoreticky 2: Vpravo  
 $P_{\text{právo}} = 0.56 > P_{\text{leva}} = 0.44$

Simulace zobrazuje krychli o hmotnosti 1 kg a celkové energii 30 J. Měra se pohybuje bez tření. Pohyblivá zadní stěna je nastavená tak, aby byla rovinná. Jak měříme srážku výtlačí k nalezení hustoty pravděpodobnosti nalezení výtlačí? Jaké je rozdíly mezi pravděpodobností z hustoty pravděpodobnosti? Trvalé držení můžete změnit posunem čar nalezení, děláte nebo do slavní. Pro více informací klikněte na "2". Nezapomínejte vyřešit úkoly!

**Ovládní**  
 Vymazat histogram Zaprout simulaci Stop Přidat 500 snímků

**Ovládní zobrazení**  
 Histogram počtu snímků  
 Histogram hustoty pravděpodob.  
 Teoreticky průběh hustoty pravděpodob. (Miska srážky je jas k níže podle směru k měřovacímu)  
 Teoretické hodnoty hustoty pravděpodob. a pravděpodobnosti

**Animace** **QuVis**

### Časový vývoj stavů částice v nekonečné jámě

Vlnová funkce  $1/\sqrt{2}(\psi_1(x)e^{-i(2n+0.22)t} + \psi_2(x)e^{-i(2n+0.87)t})$   
 Komplexní rovina v bodě  $x_0 = 0.25L$   
 Tento aplet zobrazuje časový vývoj prvních dvou vlastních stavů částice v nekonečné jámě a také jejich superpozice. Časový vývoj vlastních stavů je dán vztahem  $\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t}$  a lze ho znázornit jako rotaci prostorové části vlnové funkce  $\psi_n(x)$  v komplexní rovině.

Hustota pravděpodobnosti  $|\psi|^2$

**Hlavní ovládní**  
 Zobrazit  $\psi(x_0)$  Bod  $x_0 = 0.25L$  0.95L  
 Zobrazit graf hustoty pravděpodobnosti  $|\psi(x)|^2$

**Nastavit**  $t = 0$  **Stop**  krok zpět  O krok vpřed

**Animace** **Vysvětlení** **QuVis**

### Superponované vs. smíšené stavy

**Počet měření**  
 Celk. počet měření:  $N_{\text{celk}} = 2100$   
 Změřeno  $S_x = +\hbar/2$ :  $N_+ = 407$   
 Změřeno  $S_x = -\hbar/2$ :  $N_- = 1693$   
 Vynulovat měření

**Jaké částice vstupují do SGP?**  
 1: Vlastní stav pro  $S_x = +\hbar/2$   
 2: Vlastní stav pro  $S_x = -\hbar/2$   
 50% [1], 50% [2] Smíšený stav  
  $1/\sqrt{2}(|1\rangle + |2\rangle)$  Superpozice  
 Neznámý stav vstupujících částic (1)  
 Neznámý stav vstupujících částic (2)

**Co zobrazit?**  
 Pravděpodobnost  
 Graf pravděpodobnosti

**Pravděpodobnosti**  
 Z experimentu (číslo)  $S_x$ : Teoreticky  
 $P_+ = N_+ / N_{\text{celk}} = 0.194$  ?  
 $P_- = N_- / N_{\text{celk}} = 0.806$  ?

**Graf pravděpodobnosti**  
 Počet 1 částic  
 Souvislý proud částic  
 Počet naráz 100 částic

**Animace** **Úkoly** **QuVis**

### Vlastní stavy energie ve dvoudimenzionálním kvantovém oscilátoru

Aplet zobrazuje vlastní stavy energie pro částici ve dvouosém měřném harmonickém oscilátoru. Potenciální energie je zobrazena  $V = 1/2 m \omega^2 (x^2 + y^2)$ , kde  $m$  je hmotnost částice a parametr  $\omega$  určuje průběh potenciální energie (jako u analogie úhlové frekvence oscilátoru). Hamiltonián se dá rozdělit na dvě části – první část závisí jen na souřadnici  $x$ , druhá na souřadnici  $y$  – každou část lze řešit samostatně jako jednodimenzionální problém. Vlastní stavy je jednoduše určen pomocí dvou kvantových čísel  $n_x$  a  $n_y$ .

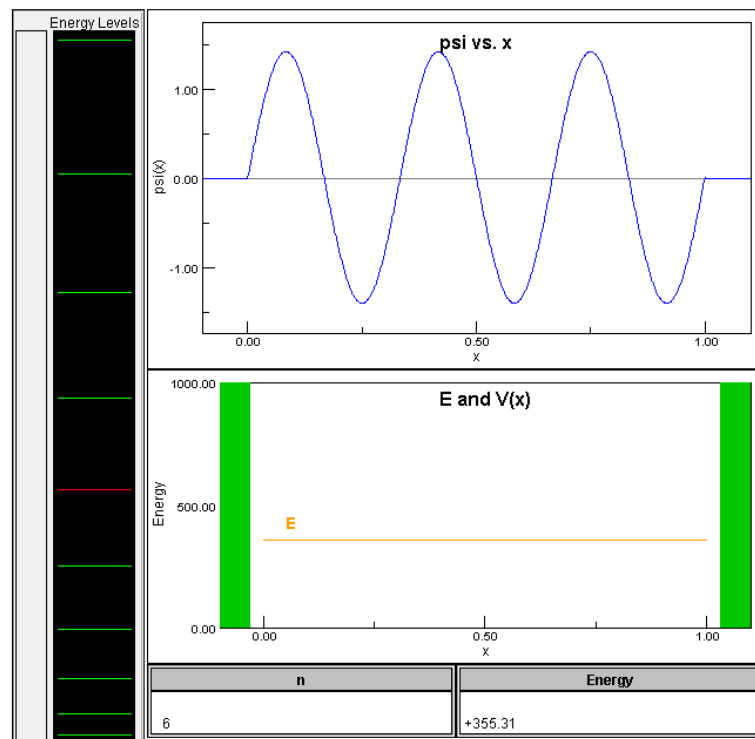
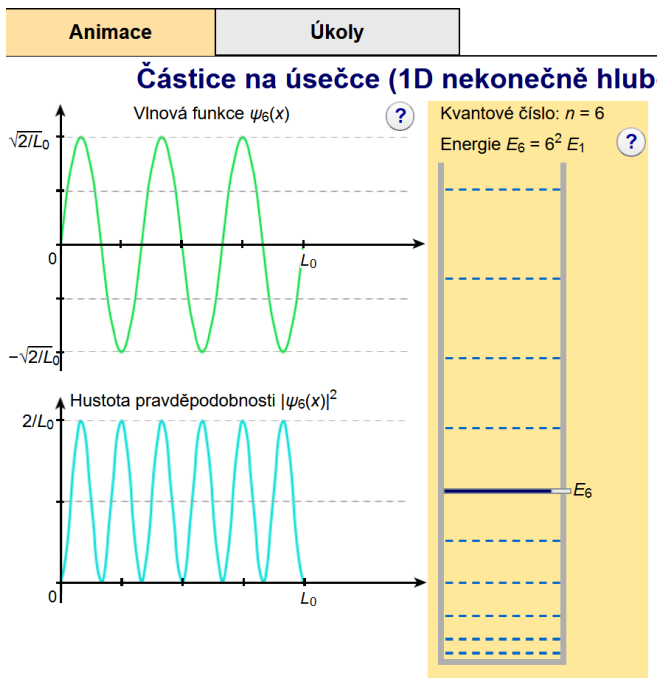
**Energie**  
 Kvantová čísla  $(n_x, n_y) = (2, 4)$   
 $E_x = (n_x + 0.5)\hbar\omega$   
 $E_y = 2.5 \hbar\omega$   
 $E_y = (n_y + 0.5)\hbar\omega$   
 $E_y = 4.5 \hbar\omega$   
 $E_{\text{celk}} = E_x + E_y = 7 \hbar\omega$

**Ovládní**  
 Zobrazit energii

# Jak zobrazit vlnovou funkcií

## - stacionární stav v 1D nekonečné jámě

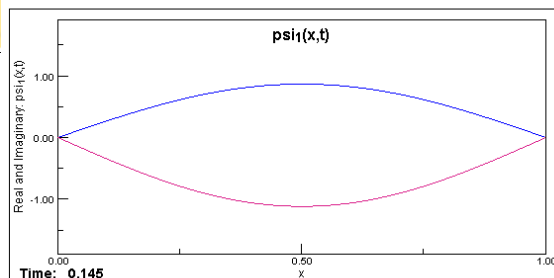
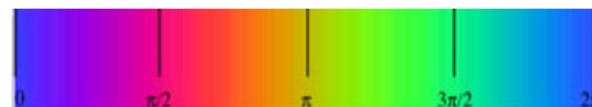
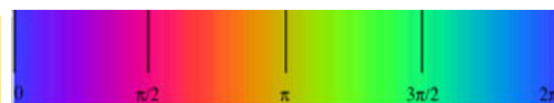
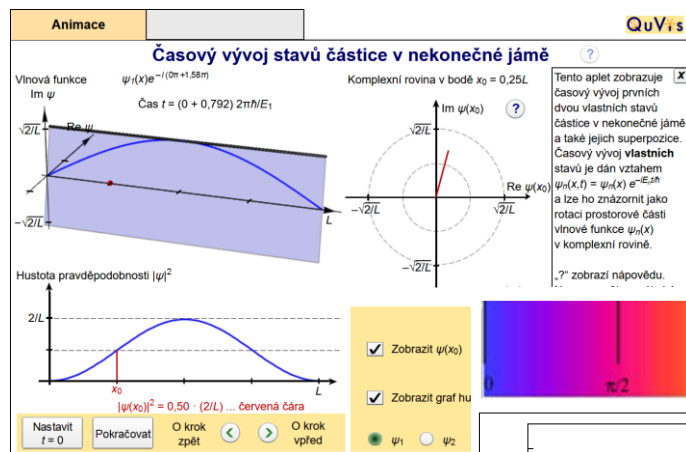
$$\psi(x) = \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



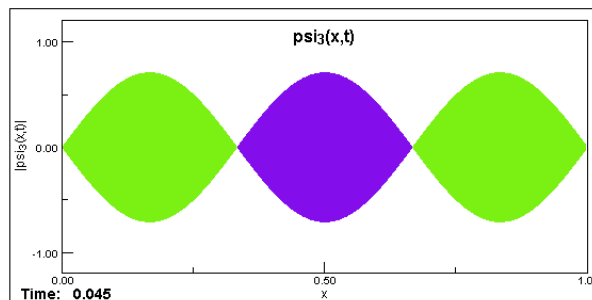
# Jak zobrazit vlnovou funkcií - časový vývoj

$$\psi(x, t) = \sin(n\pi x/L) \exp(E_n t/i\hbar) = \sin(n\pi x/L) [\cos(E_n t/i\hbar) + \sin(E_n t/i\hbar)],$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



$n = 3$



$n = 3$

Input values and play ▶ ⏸ ↺

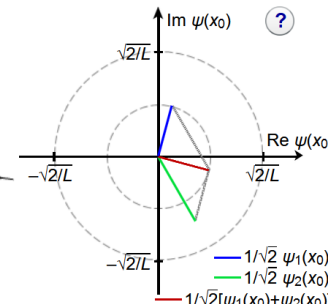
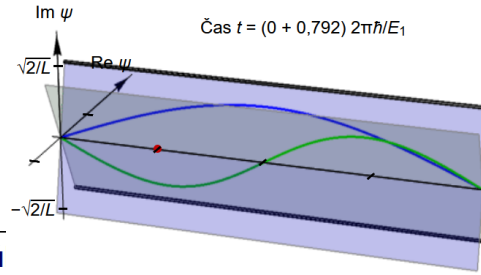
# Jak zobrazit vlnovou funkci - superpozice dvou stavů

## Časový vývoj stavů částice v nekonečné jámě

Vlnová funkce  $1/\sqrt{2}[\psi_1(x)e^{-(i\pi+1,58\pi)} + \psi_2(x)e^{-i(6\pi+0,33\pi)}]$

Čas  $t = (0 + 0,792) 2\pi\hbar/E_1$

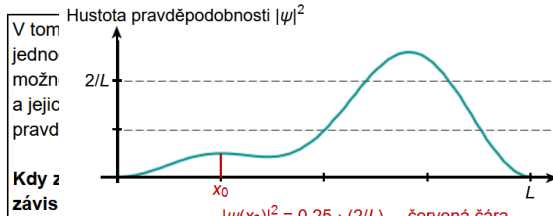
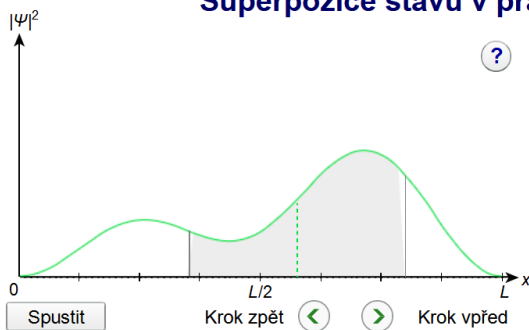
Komplexní rovina v bodě  $x_0 = 0,25L$



Tento aplet zobrazuje časový vývoj prvních dvou vlastních stavů částice v nekonečné jámě a také jejich superpozice. Časový vývoj **vlastních** stavů je dán vztahem  $\psi_n(x,t) = \psi_n(x) e^{-E_n t/\hbar}$  a lze ho znázornit jako rotaci prostorové části vlnové funkce  $\psi_n(x)$  v komplexní rovině. „?“ zobrazí nápovědu. Nezapomeňte na úkoly!

Animace      Úkoly

### Superpozice stavů v pravouh



V tom jedno možn a jejic pravd  
Kdy z závis vývoj střed

Nastavit  $t = 0$     Pokračovat    O krok zpět    O krok vpřed

Prozkoumejte vše v aplet

**Hlavní ovládaní**

Zobrazit  $\psi(x_0)$     Bod  $x_0 = 0,25L$     0,05L    0,95L

Zobrazit graf hustoty pravděpodobnosti  $|\psi(x)|^2$

$\psi_1$       $\psi_2$       $(\psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$

**Kvantový stav**

$\psi = \sqrt{0,4} \psi_1 + \sqrt{0,6} \psi_2$

Podíl  $\psi_2$

-1    0    1

$\psi_1$  a  $\psi_2$       $\psi_1$  a  $\psi_3$

$\psi_2$  a  $\psi_3$

**Hustota pravděpodobnosti  $|\Psi|^2$**

$|\Psi|^2 = c_1^2 u_1^2 + c_2^2 u_2^2 + 2 c_1 c_2 u_1 u_2 \cos((E_2 - E_1)t/\hbar)$

$c_1 = 0,4$  a  $c_2 = 0,6$

$|\Psi|^2 = 0,4u_1^2 + 0,6u_2^2 + 0,98 u_1 u_2 \cos(1,4\pi)$

# Měření – střední hodnota

Animace
Vysvětlení
quantumphysics.iop.org
IOP Institute of Physics
QuVis

## Střední hodnota

Vstupní stav: ◀ ▶

$1/\sqrt{5} (-2|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$

ve vakuu

Zpět na úvod

### Počet měření

Celkový počet měření  $N_{\text{tot}} = 600$

Naměřeno  $+\hbar/2$ :  $N_+ = 475$

Naměřeno  $-\hbar/2$ :  $N_- = 125$

Vynulovat měření

### Co zobrazit?

- Ukaž histogram
- Ukaž pravděpodobnosti
- Ukaž střední hodnotu  $\langle \hat{S}_z \rangle$

### Histogram výsledků měření

V jednotlivém měření je pravděpodobnější naměřit:  $+\hbar/2$

### Pravděpodobnosti

Relativní četnosti (z měření)	Teoreticky
$P(N_+) = N_+ / N_{\text{tot}} = 0,792$	0,8
$P(N_-) = N_- / N_{\text{tot}} = 0,208$	0,2

### Ovládání zdroje částic

Vyšle částice do SG-přístroje.

Poslat 1 částici

Poslat naráz 100 částic

Souvislý proud částic

### $\langle \hat{S}_z \rangle$ – průměr naměřených hodnot

Součet naměřených hodnot:

$475 (+\hbar/2) + 125 (-\hbar/2) = + 175,0 \hbar$

$\langle \hat{S}_z \rangle = \text{součet naměř. hod.} / N_{\text{tot}}$

$\langle \hat{S}_z \rangle = 0,292 \hbar$

### $\langle \hat{S}_z \rangle$ – porovnání měření a teorie

$\langle \hat{S}_z \rangle = (+\hbar/2)P(N_+) + (-\hbar/2)P(N_-)$

Experimentálně	Teoreticky
$\langle \hat{S}_z \rangle = 0,292 \hbar$	$0,3 \hbar$

# Superpozice vs. smíšený stav

Animace

Vysvětlení

quantumphysics.iop.org

IOP Institute of Physics

QuVis

## Superponované vs. smíšené stavy

vstupující částice

Orientace SGp:  x  z

### Jaké částice vstupují do SGp?

$|\uparrow\rangle$  Vlastní stav pro  $S_z = +\hbar/2$

$|\downarrow\rangle$  Vlastní stav pro  $S_z = -\hbar/2$

50%  $|\uparrow\rangle$ , 50%  $|\downarrow\rangle$  **Smíšený stav**

$1/\sqrt{2} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  **Superpozice**

Neznámý stav vstupujících částic (1) Více...

Neznámý stav vstupujících částic (2)

### Co zobrazit?

Pravděpodobnosti

Graf pravděpodobností

### Počet měření

Celk. počet měření:  $N_{\text{tot}} = 0$

Změřeno  $S_z = +\hbar/2$ :  $N_+ = 0$

Změřeno  $S_z = -\hbar/2$ :  $N_- = 0$

Vynulovat měření

### Ovládání zdroje částic

(Vyšle částice do prvního SGp)  
**Provedte více měření.**

Poslat 1 částici

Souvislý proud částic

Poslat naráz 100 částic

### Pravděpodobnosti

Z experimentu (četnosti)  $S_z$ :

$P_+ = N_+ / N_{\text{tot}} =$	0,5
$P_- = N_- / N_{\text{tot}} =$	0,5

### Graf pravděpodobností

Naměření obou hodnot je v každém jednotlivém měření stejně pravděpodobné.

# Ohlasy studentů

- Přednáška probíhala dohromady se cvičením, aby se lépe využil čas, dedikovaný kvantovce. To mi vyhovovalo. Materiálů ke studiu byla spousta - různé aplety, na kterých lze vše hezky vidět, skripta, úlohy k procvičování, průběžné (neklasifikované) testíky, na kterých vidíte, jestli tématu rozumíte.
- Díky stylu výuky mám pocit, že získané znalosti snad v hlavě vydrží déle než jen do zkoušky. Ze začátku to sice vypadá nesrozumitelně, ale nakonec všechno celkem dává smysl.
- *Podle mne super byly aplety. Klidně bych s nimi vymyslel víc domácích úkolů. Nejlepší je, když na to studenti přijdou sami. Pak jsem si to pamatoval.*
- *Pokud k tématu [je] nějaký aplet, tak jsem si s ním během učení mohl hrát, jak jsem potřeboval, kdežto při normální výuce s apletem operuje pouze jeden člověk – standardně vyučující – takže pokud mě zajímal nějaký výsledek konkrétního nastavení apletu, nemohl bych si ho sám najít.*

# Co dál?

- vyhledávání a vymýšlení dalších úloh
- zkoušení dalších vhodných formátů
  
- skripta
- databáze úloh – vhodný formát
  
- spolupráce
- ověření, výzkum

# Děkuji za pozornost.

<https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/kvantovka/>

<http://fyzweb.cz/materialy/kvantovka/>