TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

Escola de Física da UERJ 2020

Prof. Bruno Mintz

(DFT-UERJ)

ROTEIRO DAS AULAS

- Prof. Bruno Mintz: 4 aulas
- Campos quânticos: o quê, como, por quê, para quê?
- Algumas previsões da TQC.
- Exemplos de cálculos simples em TQC (exercícios).

- Prof. Letícia Palhares: 1 aula
- Algumas (poucas) aplicações da Teoria de Campos

Obs.: Várias conexões (e possíveis superposições) com outros cursos e palestras desta Escola.

AVISO

Este é um curso introdutório e informativo. Muitas conexões importantes foram omitidas (voluntariamente ou não). Nosso objetivo é apenas “dar um gostinho” dos fundamentos da TQC e de algumas das suas aplicações. Para utilizar a teoria profissionalmente, você deverá fazer um bom curso de, pelo menos, três ou quatro semestres.

"The Shire"


© GONZALO KENNY

PRIMEIRA AULA

PRIMEIRA AULA

- O que *é* um campo?
- Como descrever a *dinâmica* de um campo?
- E os campos *quânticos*?
- Como *representar matematicamente* um campo quântico?

O que é um campo?

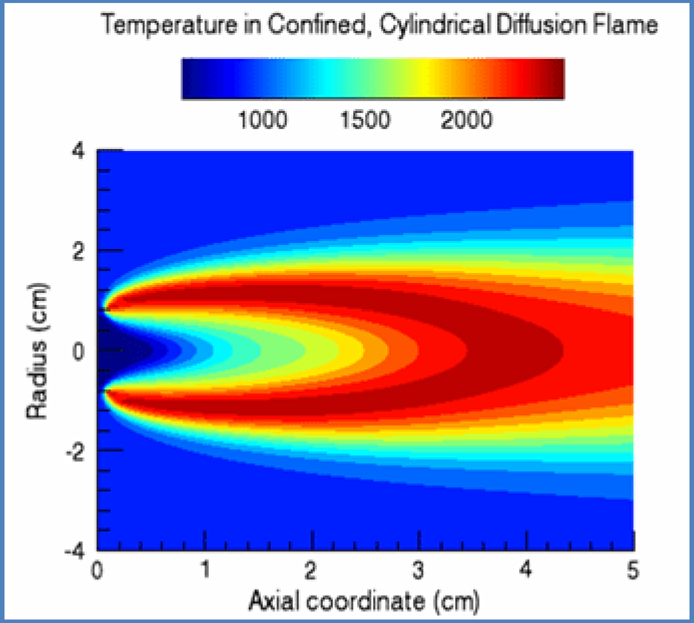
"Campo é uma função cujo domínio são pontos do espaço(-tempo)."

- Classificação (simplificada) de campos:

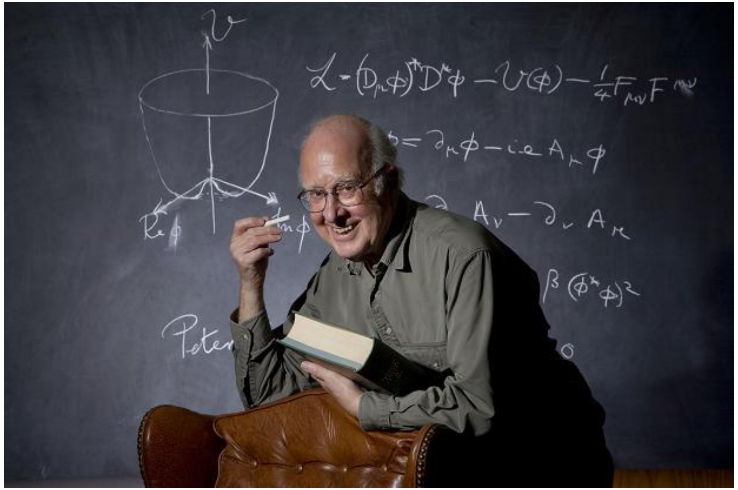
- Escalares: temperatura e pressão (de equilíbrio), Higgs, mésons, ...
- Vetoriais: velocidade (fluido), campo eletromagnético
- Tensoriais: campo gravitacional (RG), torsão (sólido)

Campo escalar

Campo de temperatura

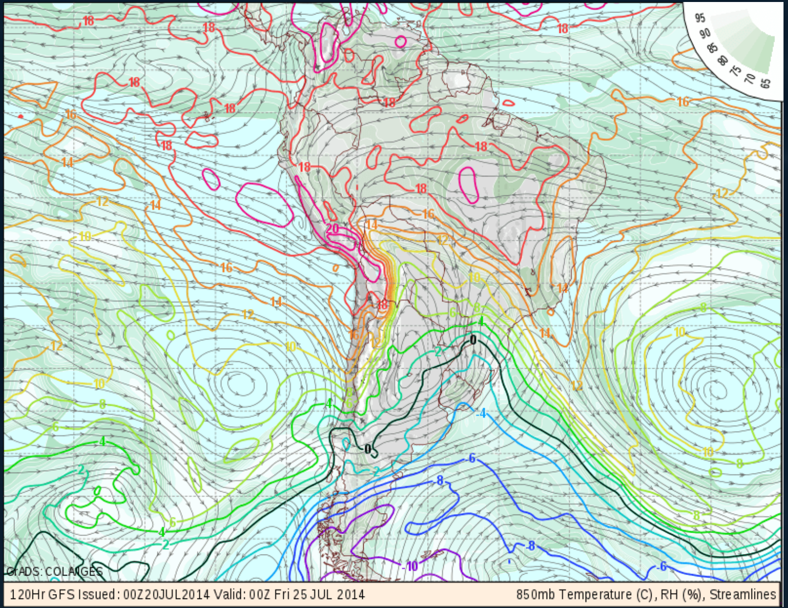


Campo de Higgs

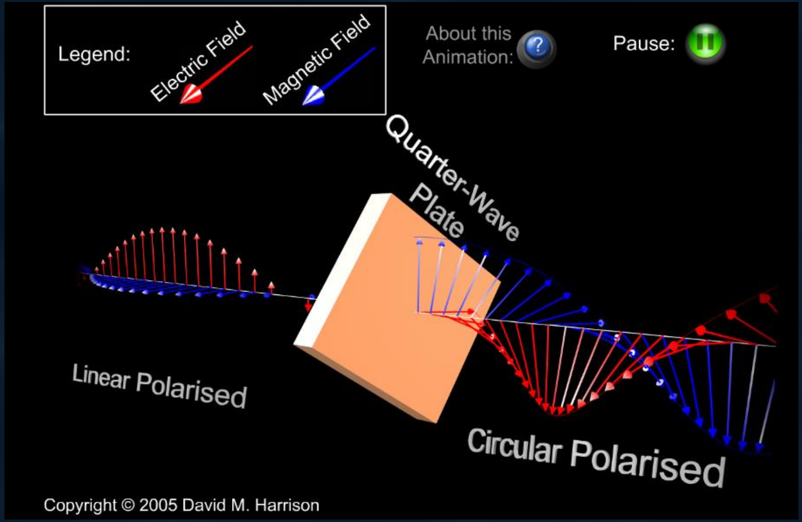


Campo vetorial

Campo de velocidades de um fluido



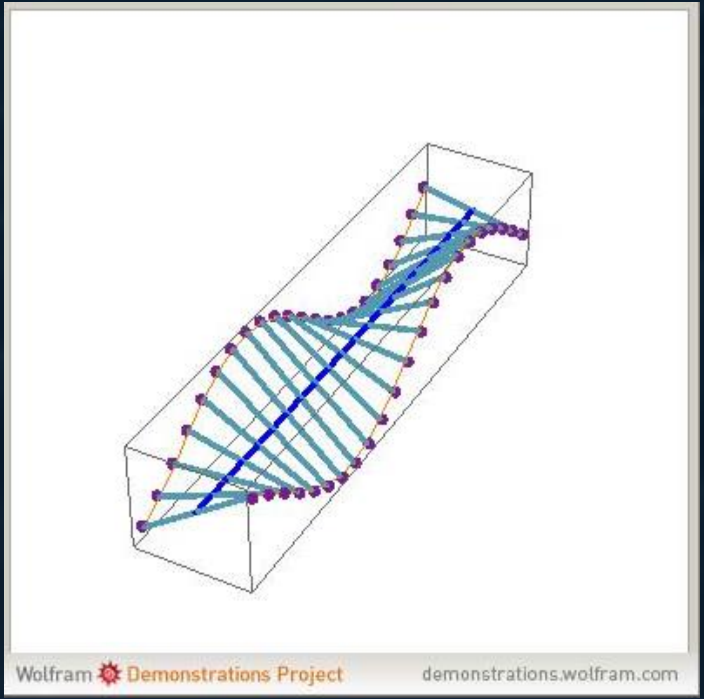
Campo eletromagnético



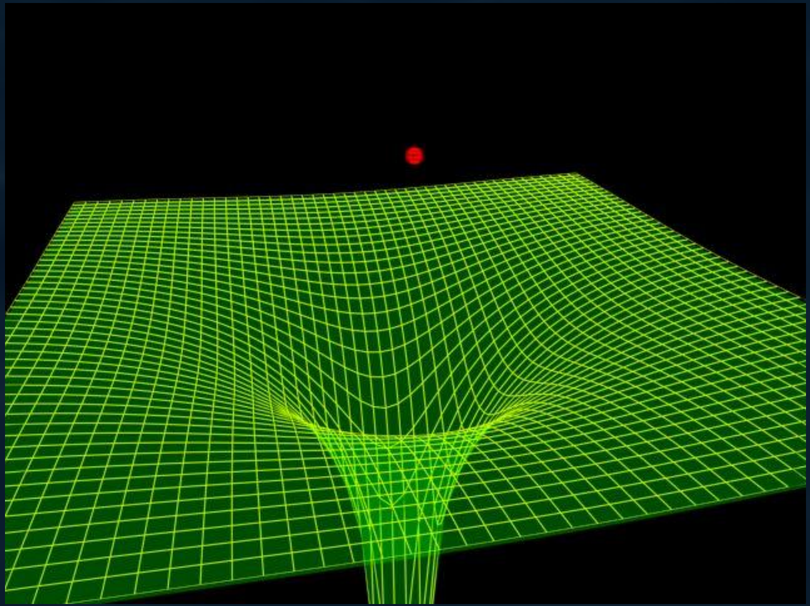
http://www.cabrillo.edu/~jmccullough/Applets/Flash/Optics/CircPol.swf

Campo tensorial

Campo de torsão (1-d)

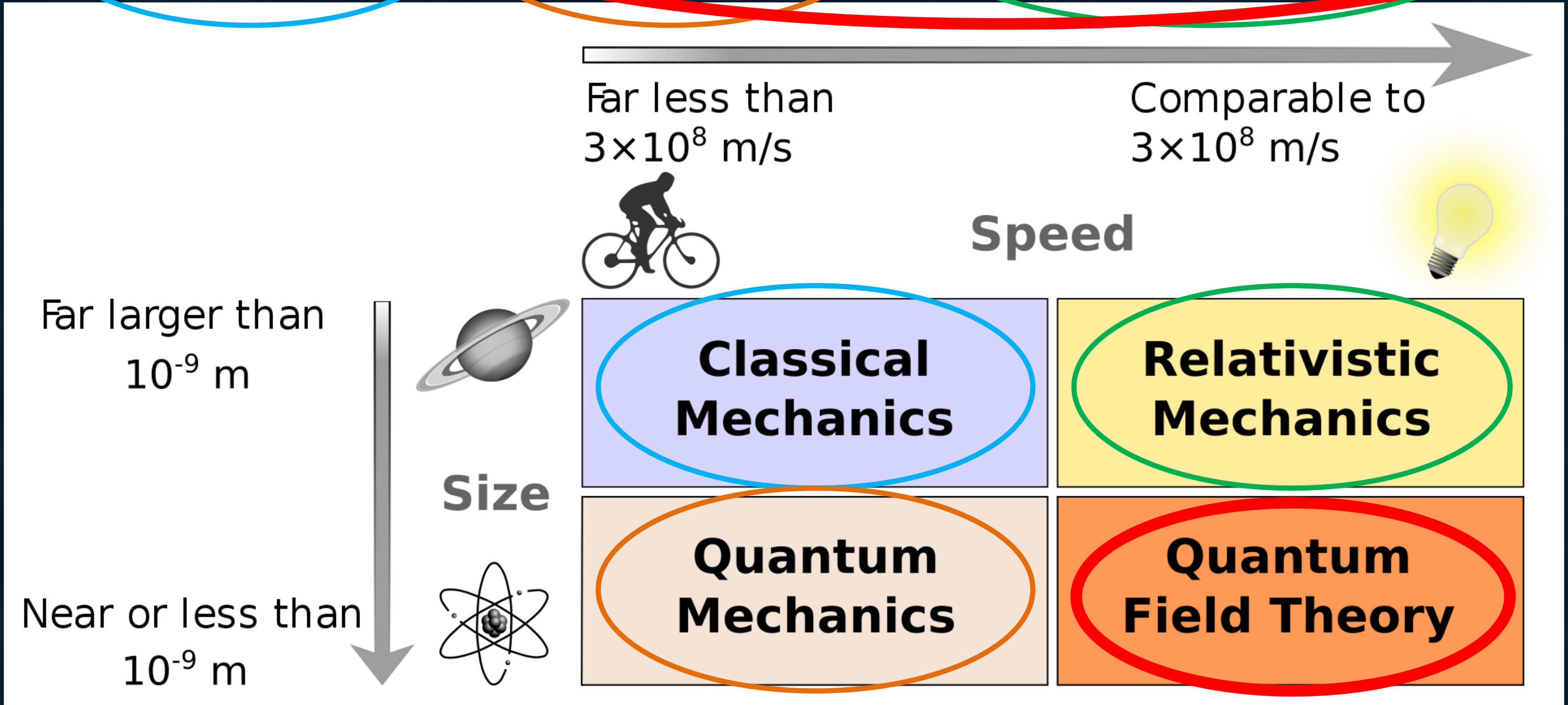


Campo gravitacional (RG)



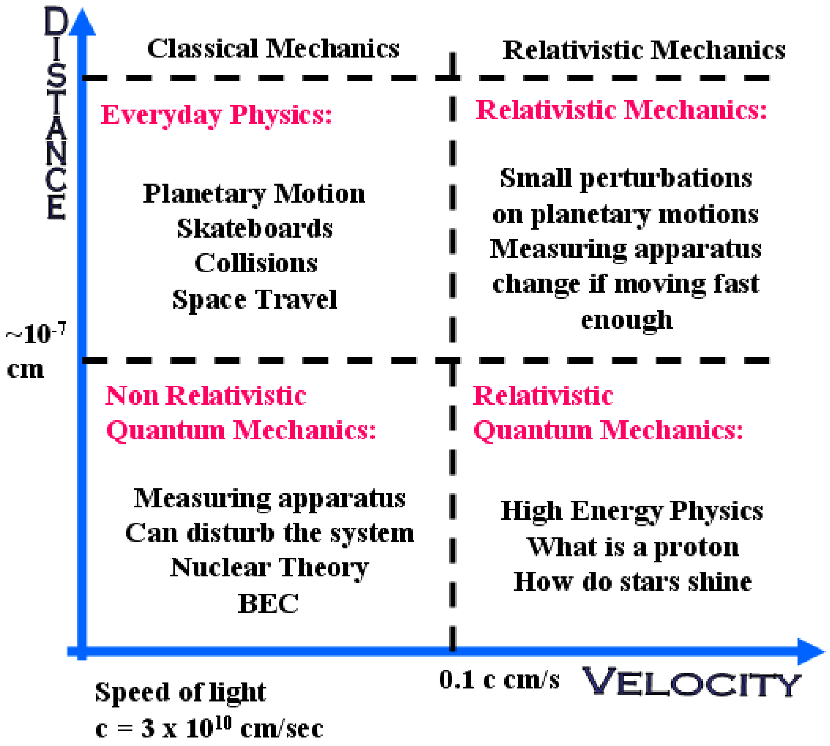
Como descrever a *dinâmica* de um campo?

Clássico? Quântico? Relativístico?



[https://en.wikipedia.org/wiki/Classical_physics#/media/File:Modernphysicsfields.svg]

Clássico? Quântico? Relativístico?



[http://coffee.ncat.edu:8080/Flurchick/Lectures/PhysicalMechanicsI/Section1/Lecture1-1.html]

Como descrever a *dinâmica* de um campo?

- Escolha típica: mecânica lagrangeana.

- Dinâmica *clássica* (relativística ou não):

\- ação mínima → equação de Euler-Lagrange = eq. onda.

- *Revisão*: mecânica lagrangiana de um sistema de partículas.

Digressão: dinâmica clássica de partículas

Digressão: dinâmica de partículas

- Dinâmica *clássica*: ação mínima.

- Partículas: $S[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots]$ (funcional das *funções-movimento* das partículas)

$$S[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots] = \int dt\, L[\vec{r}_1(t), \dot{\vec{r}}_1(t); \vec{r}_2(t), \dot{\vec{r}}_2(t); \ldots]$$

$L = K - U$: função lagrangeana

Digressão: dinâmica de partículas

- A ação é um funcional

$$S[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots] = \int dt\, L[\vec{r}_1(t), \dot{\vec{r}}_1(t); \vec{r}_2(t), \dot{\vec{r}}_2(t); \ldots]$$

- *Evolução clássica* do sistema: a natureza "escolhe" o conjunto de funções que *minimiza S*.

Digressão: dinâmica de partículas

- Matematicamente, minimizar a ação

$$\frac{\delta S[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots]}{\delta \vec{r}_k(t)} = 0$$

leva às equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_k} = 0$$

que são equivalentes à 2ª lei de Newton.

Como descrever a *dinâmica* de um campo?

- Para campos, o método é idêntico!

- “Estados” clássicos:

- Partículas: posições no decorrer do tempo. $\vec{r}_k(t)$
- Campos: valor do campo no espaço-tempo. $\varphi(x)$

Obs.: $x \equiv (\vec{x}, \mathrm{t})$ (ponto do espaço-tempo)

Como descrever a *dinâmica* de um campo?

- Ação do campo φ em d dimensões espaciais:

$$S[\varphi] = \int dt \int d^d x \mathcal{L}[\varphi(x), \varphi'(x), x)$$

- $\mathcal{L}[\varphi(x),\varphi'(x), x]$: *densidade lagrangeana*

Obs1.: $\varphi'(x)$ representa derivadas do campo com relação às coordenadas do espaço-tempo

Obs2.: Aqui, φ pode ser qualquer tipo de campo.

Dinâmica de um campo clássico

$$S[\varphi] = \int dt \int d^d x \mathcal{L}[\varphi(x), \varphi'(x), x]$$

- Minimização da ação → equação de movimento (Euler-Lagrange)

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \sum_{\mu=0}^{d} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0}$$

Dinâmica de um campo clássico

- Exemplo relevante: campo relativístico escalar livre (notação de Einstein, unidades naturais), $\mathrm{V} = \tilde{m}^2\varphi^2/2$

$$\mathcal{L}[\varphi,\partial_\mu\varphi]=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\tilde{m}^2}{2}\varphi^2$$

- Equação de Euler-Lagrange → Eq. de Klein-Gordon

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi+\tilde{m}^2\varphi = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\tilde{m}^2\varphi = 0$$

Exercício

- Mostre que a lagrangeana

$$\mathcal{L}[\varphi,\partial_\mu\varphi]=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\tilde{m}^2}{2}\varphi^2$$

de fato leva à equação de movimento (eq. de Klein-Gordon)

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi+\tilde{m}^2\varphi = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\tilde{m}^2\varphi = 0$$

Dinâmica de um campo clássico

- Eq. de Klein-Gordon para $\tilde{m} = 0$ (campo escalar livre):

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

<u>Obs</u>.: Equação linear → vale o princípio da superposição.

Dinâmica de um campo clássico

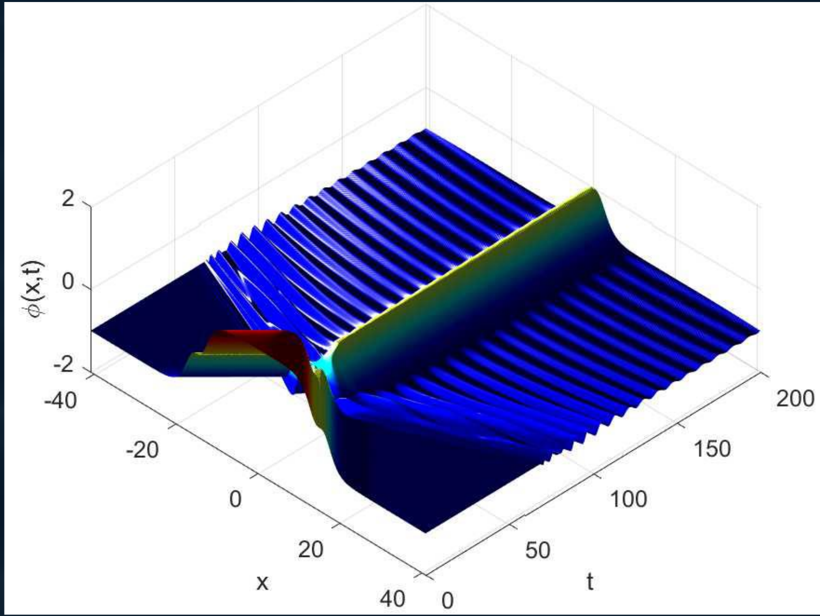
- E se houver autointeração? Exemplo: $\mathrm{V} = g\varphi^4/4$.

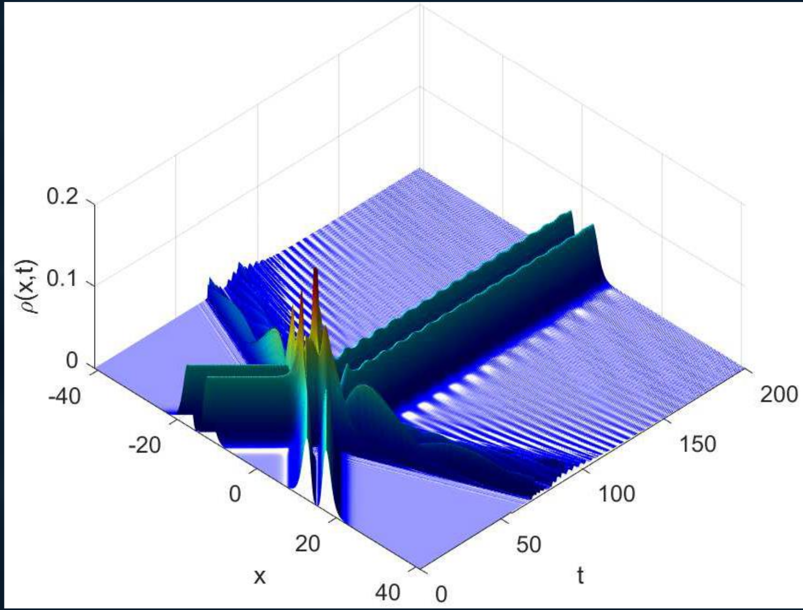
$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + g\varphi^3 = 0$$

- Equação não linear! Não vale a superposição.
- Solução clássica: tipicamente numérica.
- *Sólitons, kinks, ínstantons etc*. (importantes também nas suas "versões quânticas").
- Aspectos de topologia podem ser muito importantes.

Dinâmica de um campo clássico

- Exemplo de soluções clássicas 1-d (cálculo numérico):





T. S. Mendonça* e H. P. de Oliveira (DFT-UERJ) *estudante de doutorado
[Braz. J. Phys. **49**, 914 (2019) ou https://arxiv.org/abs/1808.04210]

E os campos *quânticos*?

E os campos *quânticos*?

- Em Física Quântica (partículas, campos, cordas, ...):

\- Estados físicos: vetores de um espaço de Hilbert

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$$

\- Probabilidade de se detectar o sistema num estado $|\varphi\rangle$ dado que foi preparado no estado $|\psi\rangle$: $P(\varphi, \psi) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

\- Observáveis: operadores ("matrizes")

$$\hat{O}_1|\psi\rangle = |\psi'\rangle \in \mathcal{H}$$
$$\hat{O}_2|\psi\rangle = |\psi''\rangle \in \mathcal{H}$$

E os campos *quânticos*?

- Quantização canônica: "promover" coordenadas do espaço de fase do sistema a operadores. Exemplos:

$$\mathit{Posição}: x \rightarrow \hat{x}$$

$$\mathit{Momento\ linear}: p \rightarrow \hat{p}$$

$$\mathit{Hamiltoniana}: H(x,p) \rightarrow \hat{H}$$

- Exemplo: oscilador harmônico simples.

$$H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

$$H(x,p) \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2}$$

E os campos *quânticos*?

- <u>Evolução dinâmica dos estados</u>: equação de Schrödinger.

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle}$$

- <u>Estados estacionários</u>: probabilidade de permanência =1

$$|\varphi\rangle = e^{i\omega t}|\varphi_0\rangle \Rightarrow P(\varphi,\varphi) = |\langle\varphi|\varphi\rangle|^2 = 1$$

- Substituindo de volta na equação de Schrödinger:

$$\boxed{\hat{H}|\varphi_0\rangle = \hbar\omega|\varphi_0\rangle}$$

- Equação de autovalores e autovetores de $\hat{H}$.

E os campos *quânticos*?

- Uma propriedade fundamental:

$$\boxed{[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{1}}$$

Obs.1: $\left[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}\right] \coloneqq \hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{A}}$ (comutador)

Obs.2: P_i é o *momento conjugado* a $X_i, i.e., P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$.

Obs.3: Corresponde ao resultado clássico (Poisson)

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

E os campos *quânticos*?

- Sistema de partículas: número contável de variáveis dinâmicas → i: indica a partícula (elemento do sistema)

$$(x_i, p_i) \rightarrow \quad (\hat{x}_i, \hat{p}_i)$$

- Sistema contínuo (campo): número não contável de variáveis dinâmicas. → $(\vec{x}, t)$: indica um ponto do espaço-tempo onde há campo (elemento do sistema)

$$\varphi(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x}, t)$$

E os campos *quânticos*?

- Momento conjugado ao campo φ (não é momento linear!):

$$\pi(x) \equiv \frac{\delta L[\varphi]}{\delta\dot{\varphi}(x)}$$

- <u>Quantização Canônica do campo</u>: postula-se que

$$\boxed{[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\pi}(\vec{x}',t)] = i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\hat{1},}$$

analogamente a $[\hat{X}_i,\hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{1}$, com $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$.

Como *representar* um campo quântico?

Como *representar* um campo quântico?

- Exemplo: campo escalar (Klein-Gordon) $(\hbar = c = 1)^*$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \tilde{m}^2\varphi = 0$$

- Solução (clássica) da equação de campo

$$\varphi(t, \vec{x}\,) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(A_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + A^*_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + \tilde{m}^2}$$

Exercício

- Mostre que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\tilde{m}^2\varphi=0$$

tem por solução

$$\varphi(t,\vec{x}\,)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(A_{\vec{k}}e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}+A_{\vec{k}}^{*}e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right)$$

$$\omega_{\vec{k}}=c\sqrt{\vec{k}^2+\tilde{m}^2}$$

Como *representar* um campo quântico?

- Solução (clássica) da equação de campo

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(A_{\vec{k}}e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + A^*_{\vec{k}}e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right)$$

- Solução = superposição de modos normais do espaço livre (ondas planas), com diferentes amplitudes ($A_{\vec{k}}$).
- Modo normal = estado de oscilação com frequência bem definida.

Como *representar* um campo quântico?

- Modo normal = estado de oscilação com frequência bem definida. Matematicamente: OHS

- Portanto, um campo pode ser visto como um conjunto de (infinitos) osciladores harmônicos (um para cada modo normal).

Campo quântico = conjunto de OH quânticos

Revisão: o oscilador harmônico quântico

- Hamiltoniana do OH 1-d (note os operadores):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

- Definimos dois operadores muito úteis:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\hat{a}^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

Revisão: o oscilador harmônico quântico

- Hamiltoniana do OH 1-d:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)$$

- Três propriedades importantes dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{1}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega\hat{a}^+$$

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}$$

Exercícios

- Mostre que

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)$$

- Demonstre que

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{1}$$
$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega\hat{a}^+$$
$$\left[\hat{H}, \hat{a}\,\right] = -\hbar\omega\hat{a}$$

Revisão: o oscilador harmônico quântico

- Seja $|e\rangle$ um estado estacionário de energia E.
- Sejam $|e^-\rangle = \hat{a}|e\rangle$ e $|e^+\rangle = \hat{a}^+|e\rangle$.
- Então,

$$\hat{H}|e\rangle = E|e\rangle$$
$$\hat{H}|e^-\rangle = (E - \hbar\omega)|e^-\rangle$$
$$\hat{H}|e^+\rangle = (E + \hbar\omega)|e^+\rangle$$

- Ou seja, $|e^\pm\rangle$ é autoestado com energia $E \pm \hbar\omega$.
- Interpretação: $\hat{a}$ ($\hat{a}^+$) diminui (aumenta) a energia de cada estado em um *quantia* $\hbar\omega$. (ω=freq. do oscilador)

Exercício

- Mostre que

$$\hat{H}|e^-\rangle = (E - \hbar\omega)|e^-\rangle$$

$$\hat{H}|e^+\rangle = (E + \hbar\omega)|e^+\rangle$$

Como *representar* um campo quântico?

- Solução (clássica) da equação de campo livre

$$\varphi(t,\vec{x}\,) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(A_{\vec{k}}\,e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + A^*_{\vec{k}}\,e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right)$$

Campo quântico = conjunto de OH quânticos

Como *representar* um campo quântico?

- Solução (clássica) da equação de campo livre

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(A_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + A^*_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

- Quantização canônica:

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}^+_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

Como *representar* um campo quântico?

- Um *campo quântico é um operador*.
- Quantização canônica:
- φ (número) $\rightarrow \hat{\varphi}$ (operador)
- $A_{\vec{k}}$ (número) $\rightarrow \hat{a}_{\vec{k}}$ (operador)

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}\,) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}_{\vec{k}}^{+}e^{-i(\omega_{\vec{k}}t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right)$$

Obs.: Este é o *operador de campo*. Ainda não descrevemos os estados possíveis para o sistema.

Exercício

- A partir da expansão de Fourier do campo e da relação fundamental de comutação

$$[\hat{\varphi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

mostre que

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^{+}_{\vec{k}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\hat{1}$$

Exercício

- Mostre, a partir da lagrangeana do campo escalar relativístico livre que a sua hamiltoniana é

$$\hat{H} = \int d^d x \left[\frac{1}{2}\hat{\pi}(\vec{x},t)^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\hat{\varphi}(\vec{x},t)\right)^2 + \frac{\tilde{m}^2\hat{\varphi}(\vec{x},t)^2}{2}\right],$$

com o momento conjugado ao campo $\hat{\pi}(\vec{x},t) = \frac{\partial\hat{\varphi}(\vec{x},t)}{\partial t}$.

Exercício

- A partir da expansão de Fourier do campo, mostre que a Hamiltoniana do campo escalar livre pode ser escrita como

$$\boxed{\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}^+_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^+_{\vec{k}} \right] \right)}$$

Obs.1: Observe que $\hat{H}$ é uma soma de hamiltonianas de OH quânticos.

Obs.2: $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$ (de Broglie).

Interpretação dos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^{+}$

$$\hat{H}_{Osc.} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}\right) \qquad \hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}^{+}\hat{a}_{\vec{k}} + const.$$

- Assim como os níveis do oscilador harmônico são quantizados, o mesmo acontece para cada modo $\vec{p}$ do campo livre!
- Oscilador: aplicação de $\hat{a}^{+} \rightarrow \Delta E = \hbar\omega$
- Campo: aplicação de $\hat{a}_{\vec{k}}^{+} \rightarrow \Delta E = E_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar c\sqrt{\vec{k}^2 + \tilde{m}^2}$.

Quando $\hat{a}_{\vec{k}}^{+}$ (ou $\hat{a}_{\vec{k}}$) atua em um estado do campo, é criada (ou destruída) uma partícula de momento $\hbar\vec{k}$ e massa $\hbar\tilde{m}/c$!!

Interpretação dos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^{+}$

Quando $\hat{a}_{\vec{k}}^{+}$ (ou $\hat{a}_{\vec{k}}$) atua em um estado do campo, é criada (ou destruída) uma partícula de momento $\hbar\vec{k}$ e massa $\hbar\widetilde{m}/c$!!

Toda partícula é entendida como sendo a manifestação da excitação de um campo subjacente, tal que este se comporta conforme as regras da Mecânica Quântica.

Interpretação dos operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ e $\hat{a}_{\vec{k}}^{+}$

- Estado fundamental do oscilador harmônico: $|0\rangle$ ou $|fund\rangle$.

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

ou seja, não há estado físico com energia menor que a de $|0\rangle$.

- Portanto, $|0\rangle$ tem a menor energia possível.
- Analogamente, para o campo, temos o estado de vácuo $|vac\rangle$:

$$\boxed{\hat{a}_{\vec{k}}|vac\rangle = 0 \qquad (\forall \vec{k})}$$

- O estado de vácuo tem a menor energia possível:

- zero partículas, zero momento linear, zero carga, zero energia (?),