TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

ESCOLA DE FÍSICA DA UERJ 2020

PROF. BRUNO MINTZ

AULA 2

Recomendação de bibliografia

- Site: https://theoreticalminimum.com/ (L. Susskind)
- Site: http://www.goodtheorist.science/ (G. 't Hooft)

- "Introduction to elementar particles" (D. Griffiths)
- "Quantum field theory for the gifted amateur" (T. Lancaster e S. J. Blundell)
- "An introduction to Quantum Field Theory" (M. E. Peskin e D. V. Schroeder)
- "The quantum theory of fields" (S. Weinberg)
- "Relativistic quantum fields" (J. D. Bjorken e S. D. Drell)
- "Quantum field theory" (L. H. Ryder)

Nesta aula

- Por que campos quânticos são necessários?
- Para que campos quânticos?
- A energia do vácuo quântico

Por que campos quânticos?

Por que campos quânticos?

- Algumas observações fundamentais (nível microscópico):

- Quantização da energia: níveis discretos, separados.
- “Quantização da matéria”: partículas elementares.
- A radiação (campos?) é constituída por partículas.
- A matéria (partículas?) possui comportamento ondulatório.
- Matéria e antimatéria aniquilam-se, tornando-se radiação.

Por que campos quânticos?

- Limitação da Mecânica Quântica à la Schrödinger: número de partículas fixo (espaço de Hilbert).

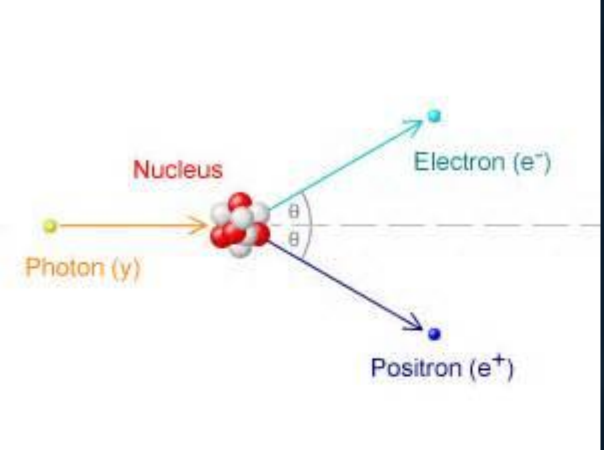
- $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t)$: função de onda de *N partículas*.

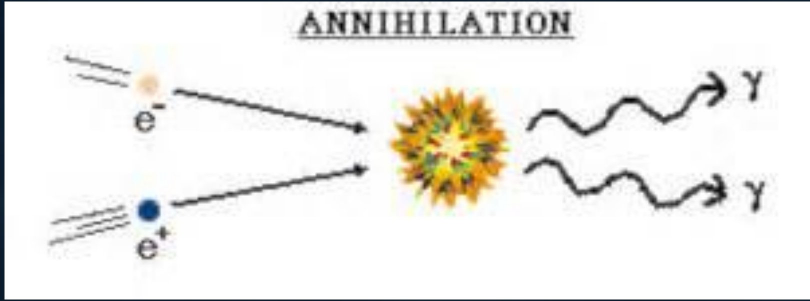
- Algebricamente: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_N$ (N é fixo)

- Em MQ relativística, isto se torna um problema...

Por que campos quânticos?

$$E = mc^2$$





Por que campos quânticos?

- Processos de *criação e aniquilação* de partículas: número de partículas é variável.

- Também há dois outros grandes problemas em MQ relativística:

- Probabilidades negativas
- Energias negativas (ilimitadas inferiormente)

Por que campos quânticos?

"(...) quantum field theory is the way it is because (...) it is the only way to reconcile the principles of quantum mechanics (...) with those of special relativity."

[S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields"]

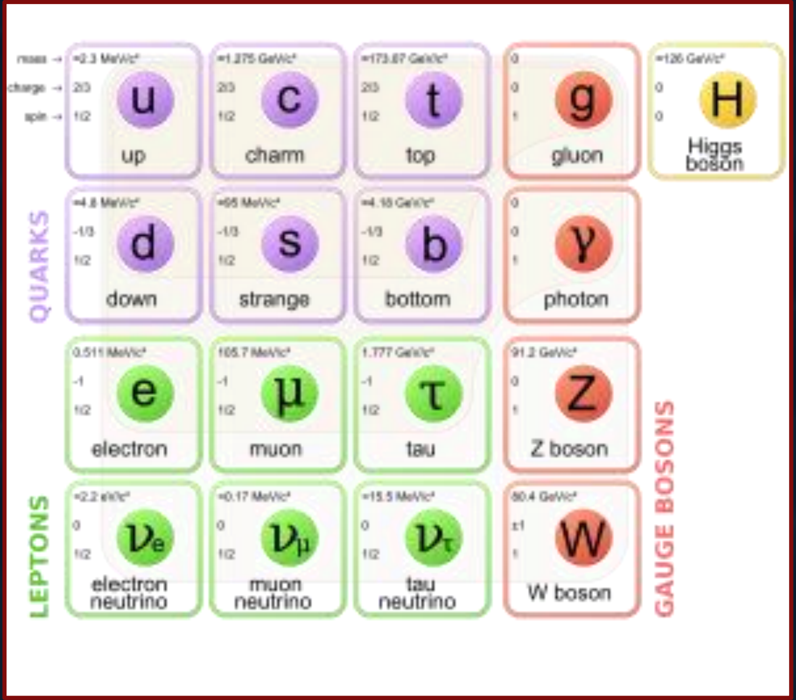
Para que campos quânticos?

Para que campos quânticos?

- Campos quânticos são necessários (ou ao menos convenientes) para se estudar

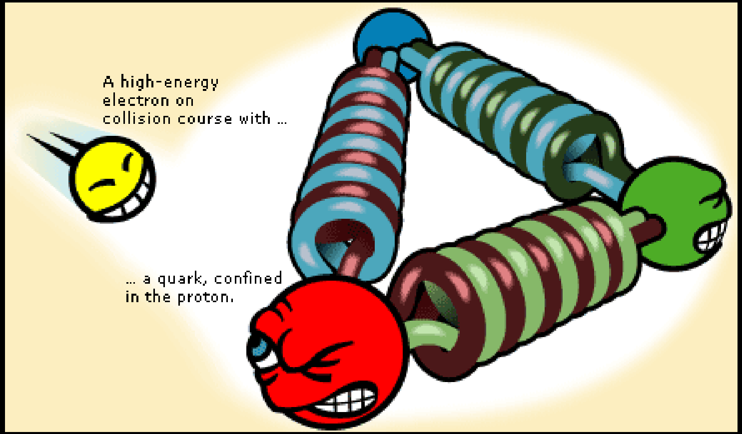
- Física das Partículas Elementares
- Física da Matéria Condensada
- Física nuclear e astrofísica nuclear
- Ótica quântica
- Gravitação quântica (?)
- Teoria de cordas
- ...
- ...

Para que campos quânticos?



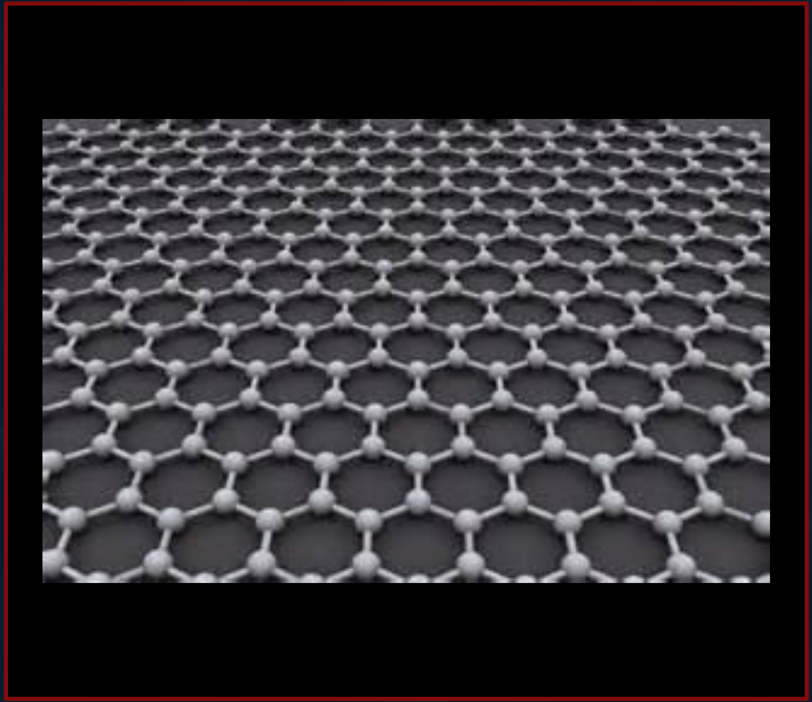
- O Modelo Padrão das Partículas Fundamentais (SM) **é** uma Teoria Quântica de Campos. (E suas extensões também!)
- A *consistência teórica* do SM levou à *previsão* de muitas de suas partículas!

Para que campos quânticos?



- Quarks e glúons nunca são encontrados isolados. Diz-se que eles estão *confinados*.
- O *problema do confinamento* (interação forte) é um dos mais difíceis e importantes da Física Teórica.

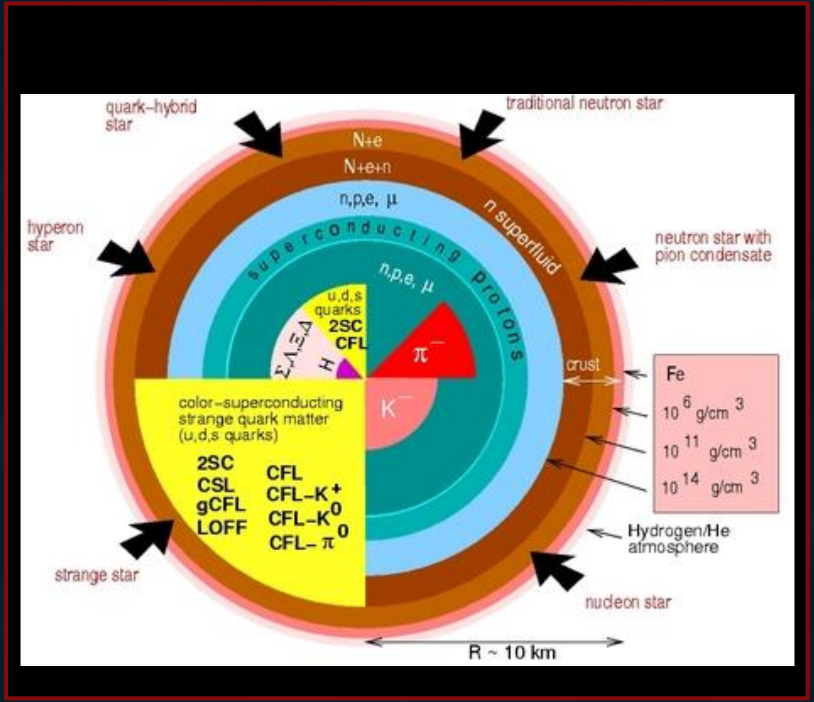
Para que campos quânticos?



- Sistemas quânticos <u>contínuos</u> (relativísticos ou não) são naturalmente descritos por TQC's.

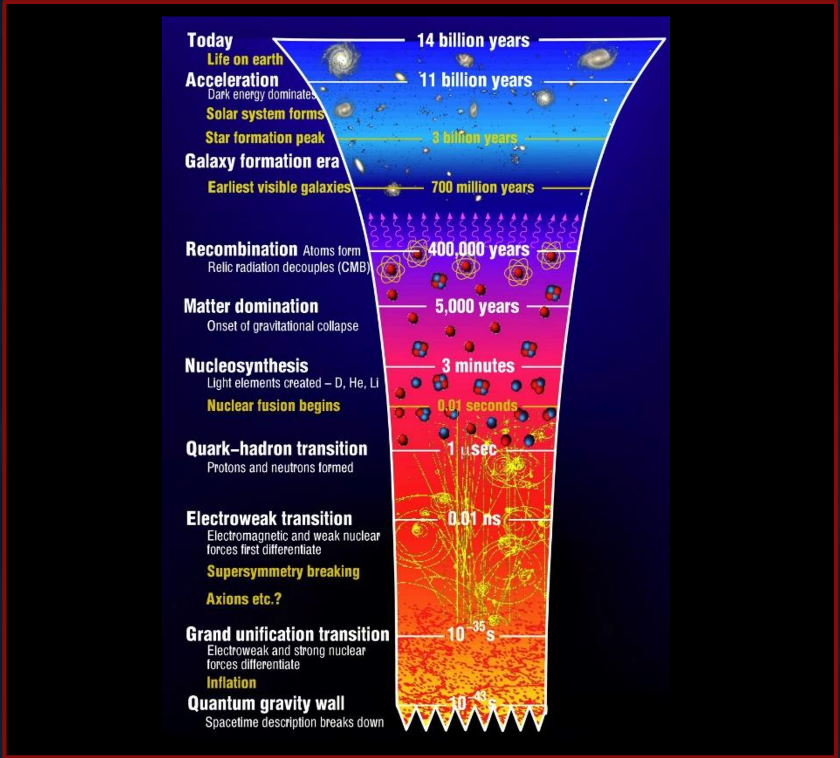
- Este é o caso de muitos sistemas de Física da Matéria Condensada, (ao menos no regime de "longas" distâncias).

Para que campos quânticos?



- Matéria em condições extremas de temperatura e densidade torna-se praticamente contínua.
- Isto acontece em estrelas ultra densas, como por exemplo nos pulsares (estrelas de nêutrons).

Para que campos quânticos?



- Segundo o Modelo Cosmológico Padrão, o Universo primordial era muito denso e muito quente.
- Altas velocidades/energias; pequenas distâncias → TQC.
- Também aqui, as 4 interações fundamentais são todas relevantes.

A energia do vácuo

A energia do vácuo

- Aula passada:

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\,,\hat{a}^{+}_{\vec{k}'}\right] = (2\pi)^3\delta^3\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\hat{1}$$

\- hamiltoniana do campo (escalar, livre):

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}\left(\vec{k}=0\right)\hat{1}\right)$$

\- Estado de vácuo do campo

$$\hat{a}_{\vec{k}}|vac\rangle = 0 \qquad (\forall\vec{k})$$

- Portanto, o valor esperado da energia no estado de vácuo é

$$E_{vac} = \langle vac|\hat{H}|vac\rangle = V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

- V: volume do espaço.

A energia do vácuo

- Densidade de energia do campo no estado de vácuo ("energia de ponto-zero"):

$$\frac{E_{vac}}{V} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} \to \infty \text{ !!!}$$

V: volume do espaço.

- Qual é a origem física desta densidade de energia infinita?
- O que significa?
- Ela tem alguma consequência experimental/prática?

A energia do vácuo: <u>*sua origem*</u>

- Origem da energia de ponto-zero: campo = conjunto de osciladores harmônicos.
- Hamiltoniana do OH 1-d:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)$$

- Energia do estado fundamental do oscilador harmônico 1d:

$$E_{fund} = \langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}$$

- <u>Energia de ponto-zero do campo</u>: soma das energias dos estados fundamentais de todos os modos normais do campo!

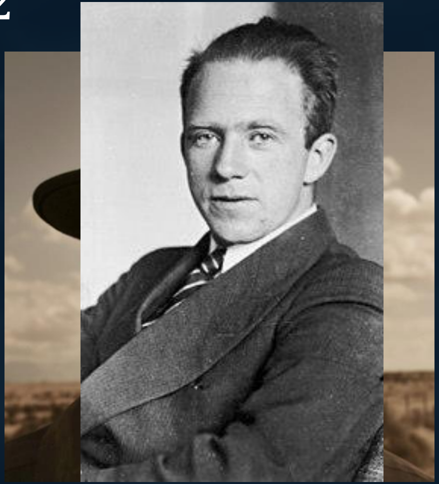
A energia do vácuo: *sua origem*

- Energia de ponto-zero: soma das energias dos estados fundamentais de todos os modos normais do campo!

$$E_{vac} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2} = \sum_{\substack{modos \\ normais}} \frac{E_{modo}^{fund}}{2}$$

- Mas “de onde vem” a energia do estado fundamental do OH?

- Do princípio da incerteza (Heisenberg)!



Revisão: o princípio de incerteza

- Dois observáveis A e B que sejam representados por operadores que não comutam entre si obedecem à seguinte "relação de incerteza":

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

- σ_X: desvio padrão ("incerteza") de X.
- Assim, uma de medida simultânea de A e B tem incerteza que deve obedecer a esta desigualdade (i.e., tem precisão intrínseca limitada, independentemente da técnica experimental).

Revisão: o princípio de incerteza

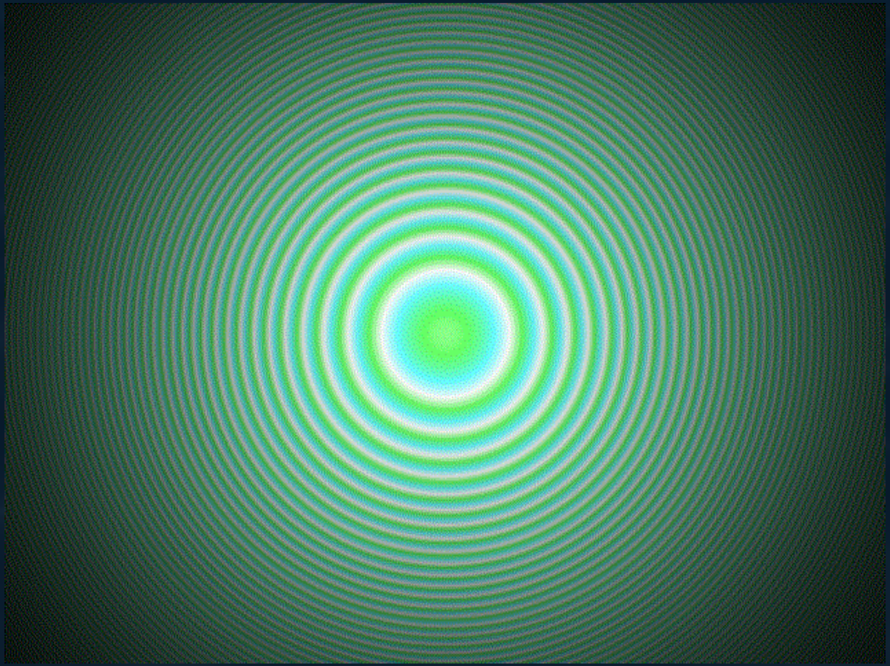
- Para posição e momento linear, por exemplo, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Portanto,

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| \quad = \frac{\hbar}{2} \quad (para\ qualquer\ estado)$$

- Ou seja, não é possível determinar, simultaneamente, posição e momento linear da partícula. (Relacionado à sua natureza ondulatória.)

- Obs.: Pode haver diversos outros pares de observáveis não comutantes. Cada um deles terá a sua relação de incerteza.
- (O par posição-momento linear não é o único!)

Revisão: o princípio de incerteza



- Partícula livre (2-d).
- Pacote gaussiano inicialmente concentrado na origem (pequena incerteza inicial na posição).
- Evolução segundo a equação de Schrödinger.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle]

A energia do vácuo: *sua origem*

- O princípio da incerteza aplicado ao oscilador harmônico.
- Cálculo da incerteza intrínseca da posição e do momento:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$$
$$\sigma_p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

- Para o estado fundamental,

$$\langle \hat{x} \rangle_{fund} = 0, \qquad \langle \hat{p} \rangle_{fund} = 0,$$
$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{fund} = \frac{\hbar}{2m\omega}, \qquad \langle \hat{p}^2 \rangle_{fund} = \frac{m\hbar\omega}{2}$$
$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2} \quad (valor\ mínimo, cf.\ Heisenberg)$$

Exercício

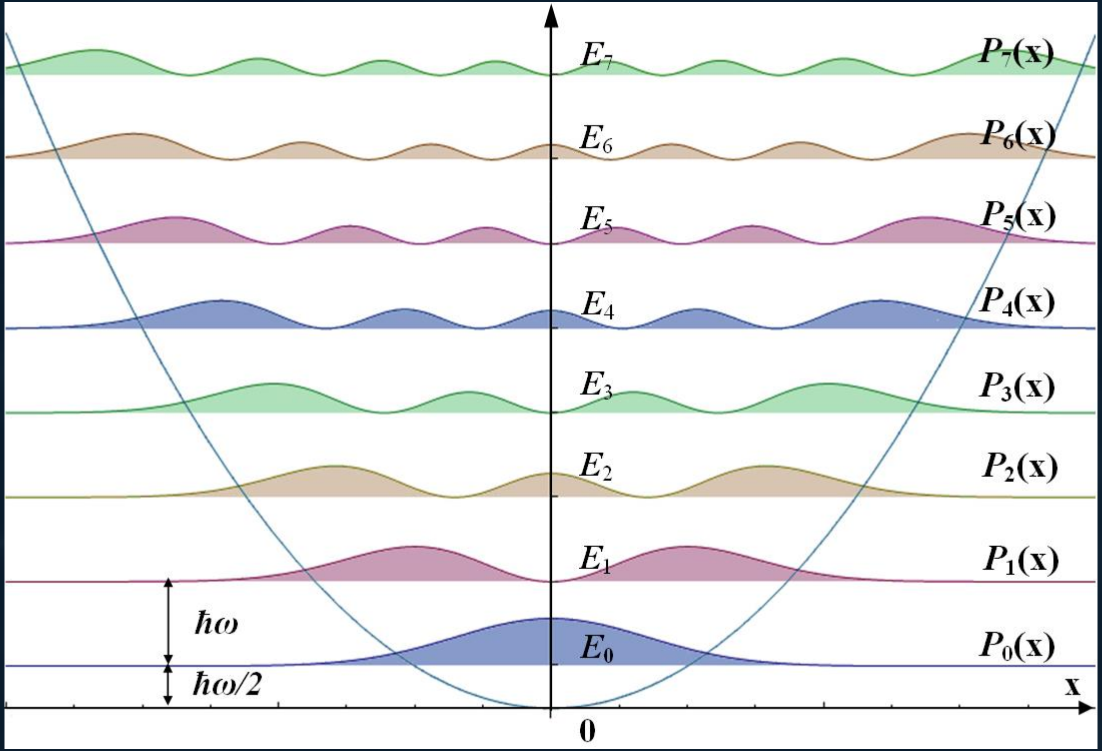
- Mostre que as relações de incerteza para o oscilador harmônico (válida, portanto, também para qualquer modo de um campo quântico livre) no n-ésimo autoestado de energia são:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)}, \qquad \sigma_p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1)}$$

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

- Sugestão: use o método algébrico (que estamos seguindo nessas aulas).
- Obs.: Com a representação de posição, também é possível realizar este cálculo. Porém, é mais trabalhoso.

A energia do vácuo: *sua origem*



A energia do vácuo: *sua origem*

- Voltando ao estado fundamental...

$$\langle\hat{x}^2\rangle_{fund} = \frac{\hbar}{2m\omega}, \qquad \langle\hat{p}^2\rangle_{fund} = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \qquad \sigma_p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

- Portanto, não é possível (mesmo no estado de menor energia!) que a partícula esteja sempre parada no mínimo do potencial → a energia mínima não pode ser nula!
- Valor esperado da energia:

$$\langle\hat{H}\rangle_{fund} = \frac{\langle\hat{p}^2\rangle_{fund}}{2m} + \frac{m\omega^2\langle\hat{x}^2\rangle_{fund}}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

A energia do vácuo: *sua origem*

- E para os campos quânticos?
- Variáveis dinâmicas: $\hat{\varphi}(\vec{x},t)$ (uma para cada ponto do espaço-tempo).
- No estado de vácuo:

$$\langle\hat{\varphi}(\vec{x},t)\rangle_{vac} = 0; \qquad \langle\hat{\pi}(\vec{x},t)\rangle_{vac} = 0$$

- Portanto, não é possível (mesmo no estado de menor energia!) que o campo tenha sempre o valor $\varphi = 0$

→ flutuações do campo quântico!

A energia do vácuo: *sua origem*

- Em resumo:

Princípio da incerteza → flutuações do campo quântico → energia de ponto-zero

Exercício

- Mostre que, no estado de vácuo do campo escalar livre,

$$\langle \hat{\varphi}(\vec{x}, t) \rangle_{vac} = 0; \qquad \langle \hat{\pi}(\vec{x}, t) \rangle_{vac} = 0$$

- Tente calcular

$$\langle \hat{\varphi}(\vec{x}, t)^2 \rangle_{vac} \quad e \quad \langle \hat{\pi}(\vec{x}, t)^2 \rangle_{vac}$$

e discuta os problemas encontrados.

Obs.: Estas quantidades são importantes para o cálculo da energia de ponto-zero. Elas correspondem à variância do campo e do seu momento.

A energia do vácuo: *é detectável*?

- A energia não é uma quantidade física*.
- Apenas diferenças de energia são quantidades físicas.
- Ex.: $U = mgh$. Aqui, h é diferença de altitude da partícula até o solo (estado de referência = partícula no solo).
- $U_1 = mgh$ e $U_2 = mgh + C$ correspondem à mesma força $\forall C$!

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

* Na teoria da relatividade geral, isto é mais sutil.

A energia do vácuo: *é detectável*?

- Energia do vácuo: a menor possível para o sistema.

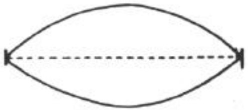
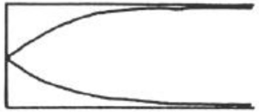
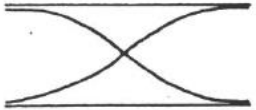
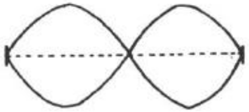
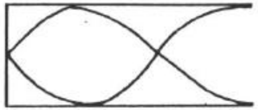
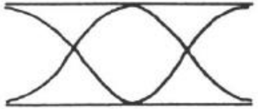
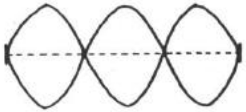
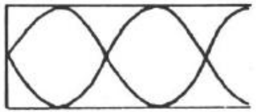
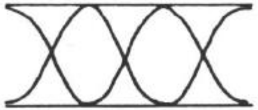
- Se considerarmos $E_{vac} = 0$ (estado de referência = vácuo), todas as energias serão medidas em relação ao vácuo.

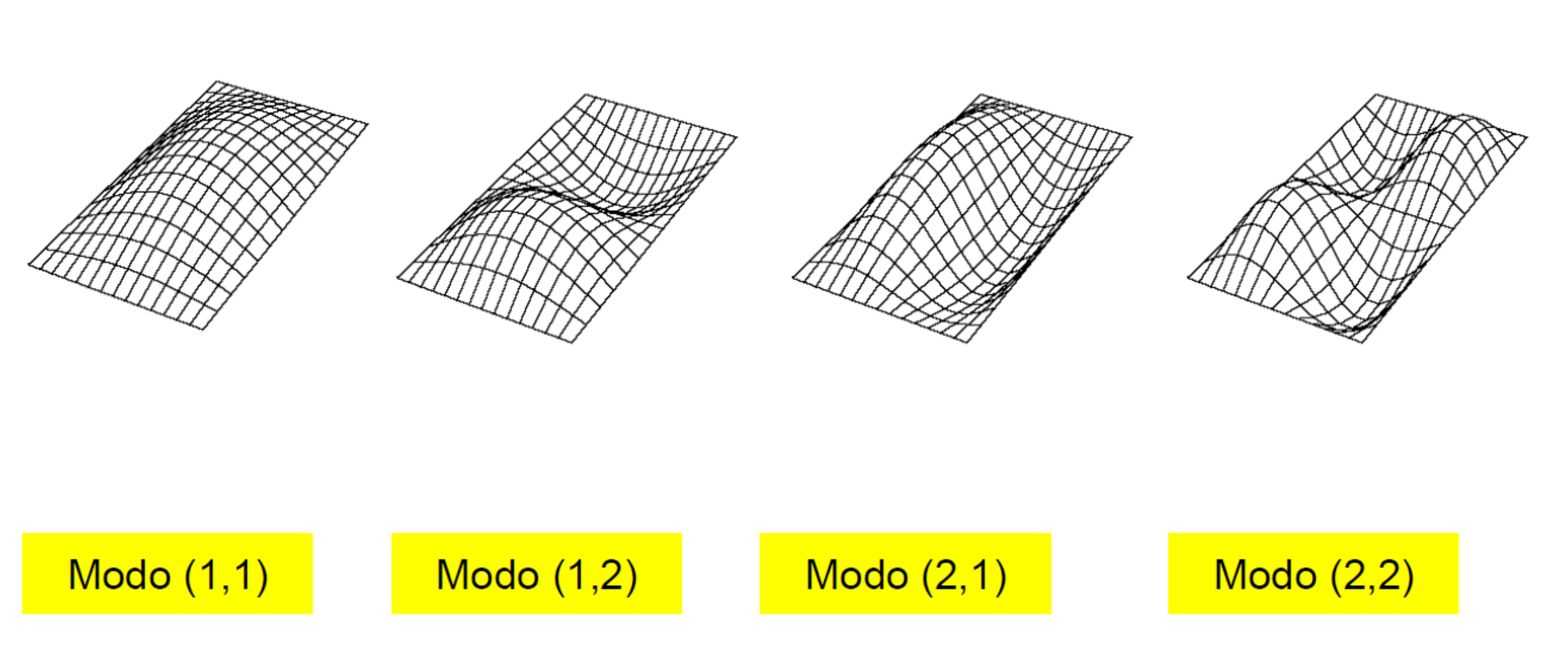
- $E_{vac} = 0$ é uma escolha *sempre* possível? (Escolha de C.)

- Sim, *a não ser que o vácuo mude...*

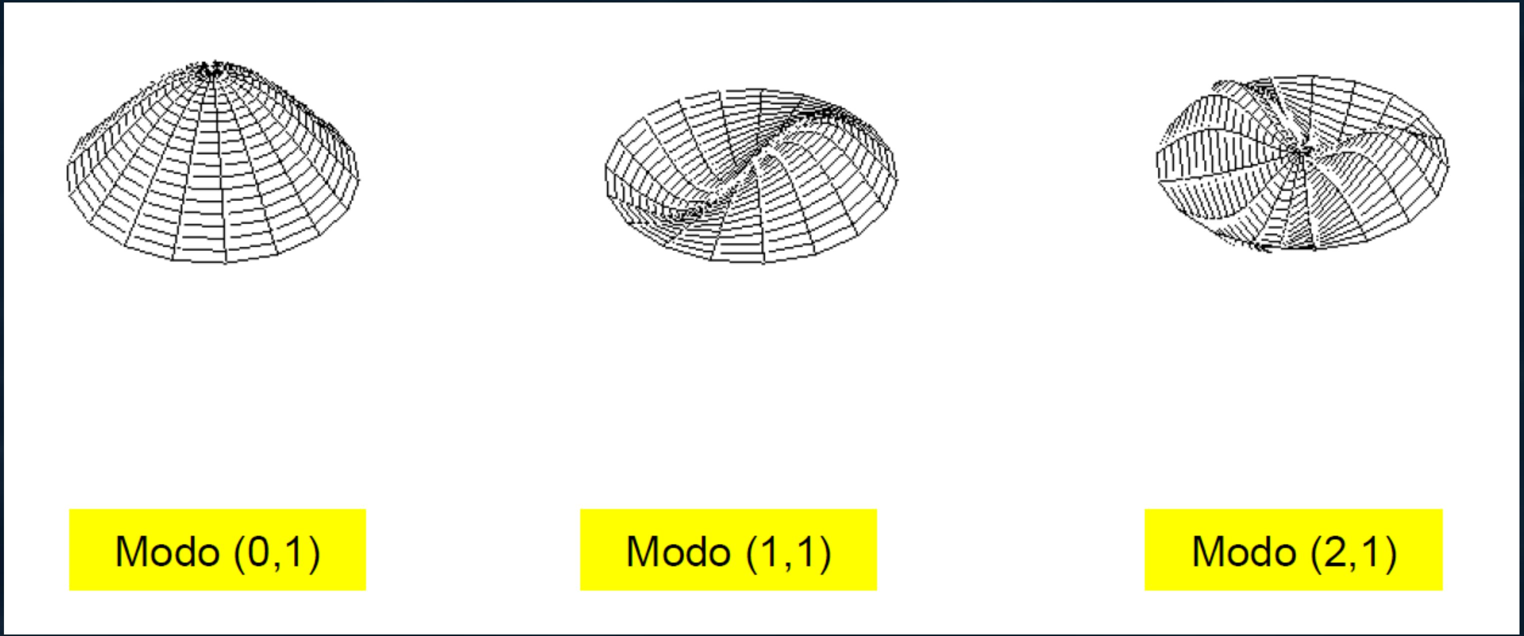
A energia do vácuo: *é detectável*?

- *Como se modifica o vácuo?*
- Modificando-se o campo! Isto pode ser feito alterando-se as condições de contorno do campo.

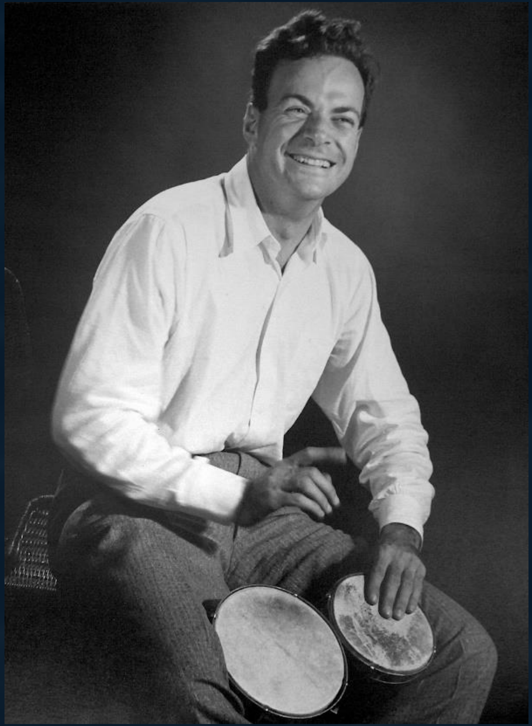
VIBRATING STRING	CLOSED PIPE	OPEN PIPE
 Fundamental 1st Harmonic	 Fundamental 1st Harmonic	 Fundamental 1st Harmonic
 1st Overtone 2nd Harmonic	 1st Overtone 3rd Harmonic	 1st Overtone 2nd Harmonic
 2nd Overtone 3rd Harmonic	 2nd Overtone 5th Harmonic	 2nd Overtone 3rd Harmonic
Displacement nodes occur at each end of the string.	Displacement nodes occur on the closed end and displacement antinodes on the open end.	Displacement antinodes occur at each end of the open pipe.

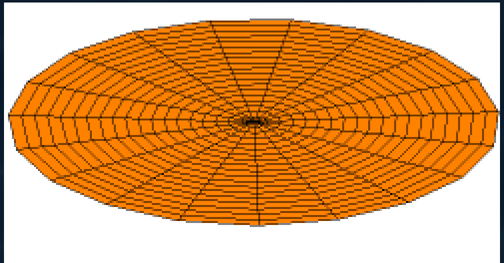


Retirado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4572215/mod_resource/content/0/Aula7%20-%20Resson%C3%A2nciaOndasEstacionarias.pdf



Retirado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4572215/mod_resource/content/0/Aula7%20-%20Resson%C3%A2nciaOndasEstacionarias.pdf





https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drum_vibration_mode12.gif

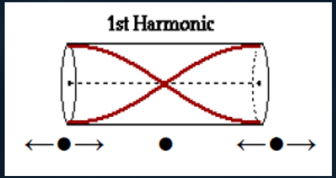
A energia do vácuo: *é detectável*?

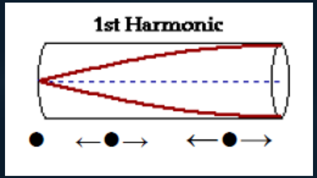
- A energia do vácuo depende diretamente das frequências dos modos normais!

$$E_{vac} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}$$

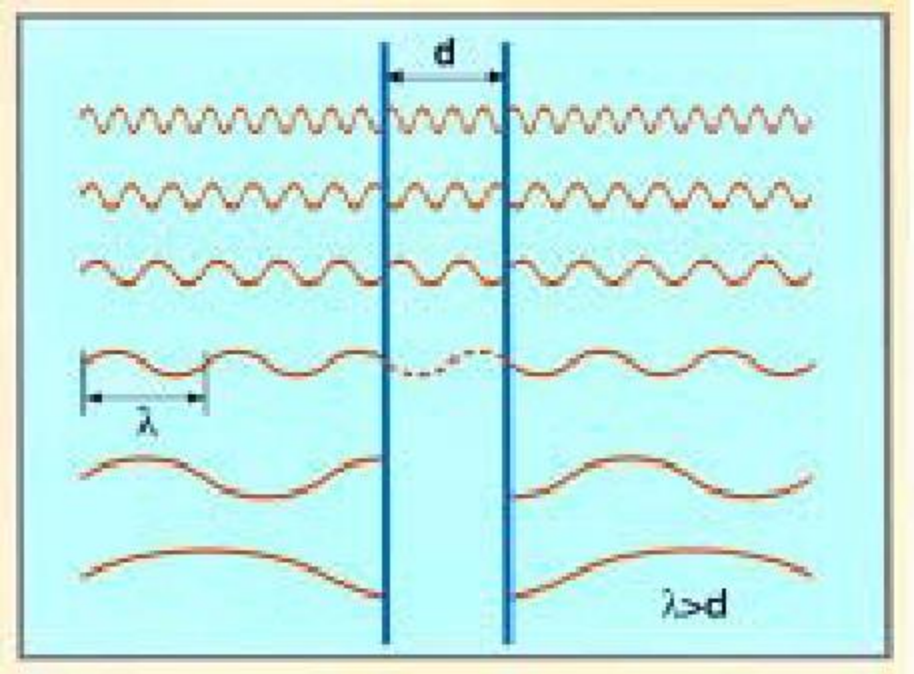
- As frequências dos modos normais dependem diretamente das condições de contorno nas fronteiras do afastamento entre as fronteiras.

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{2L} \qquad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{4L}$$





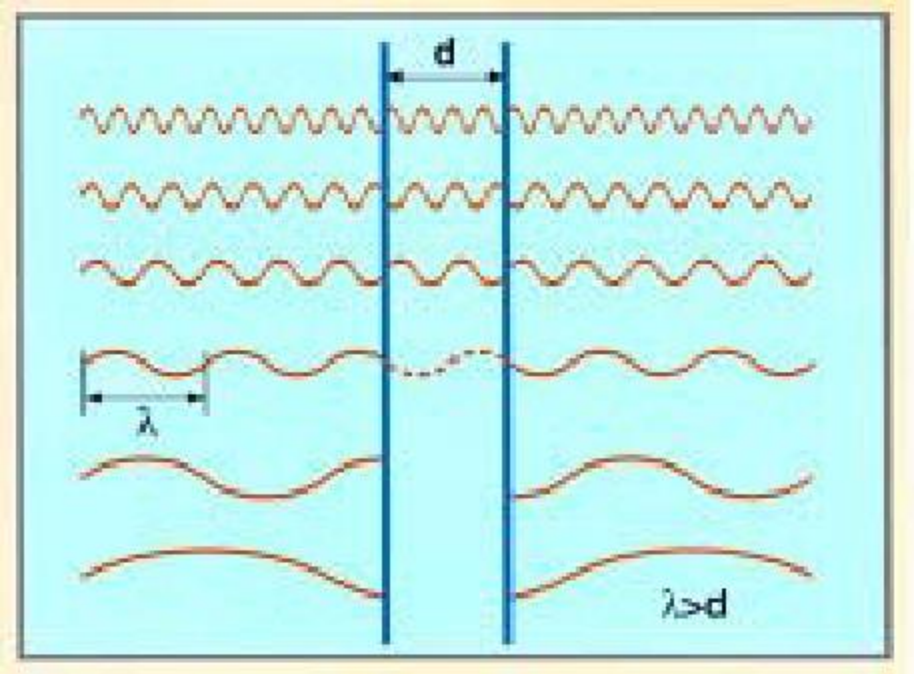
A energia do vácuo: *é detectável*?



- Os modos normais do campo dentro e fora da placa são diferentes.
- Do lado de dentro, dependem do afastamento entre as placas (d).
- Do lado de fora, os possíveis comprimentos de onda formam um conjunto contínuo e ilimitado superiormente.

https://www.researchgate.net/profile/Eric_Davis6/publication/228353872/figure/fig1/AS:301798230380548@1448965713582/Casimir-Effect-d-Cavity-Wall-Separation-O-ZPF-Mode-Wavelength.png

A energia do vácuo: *é detectável*?

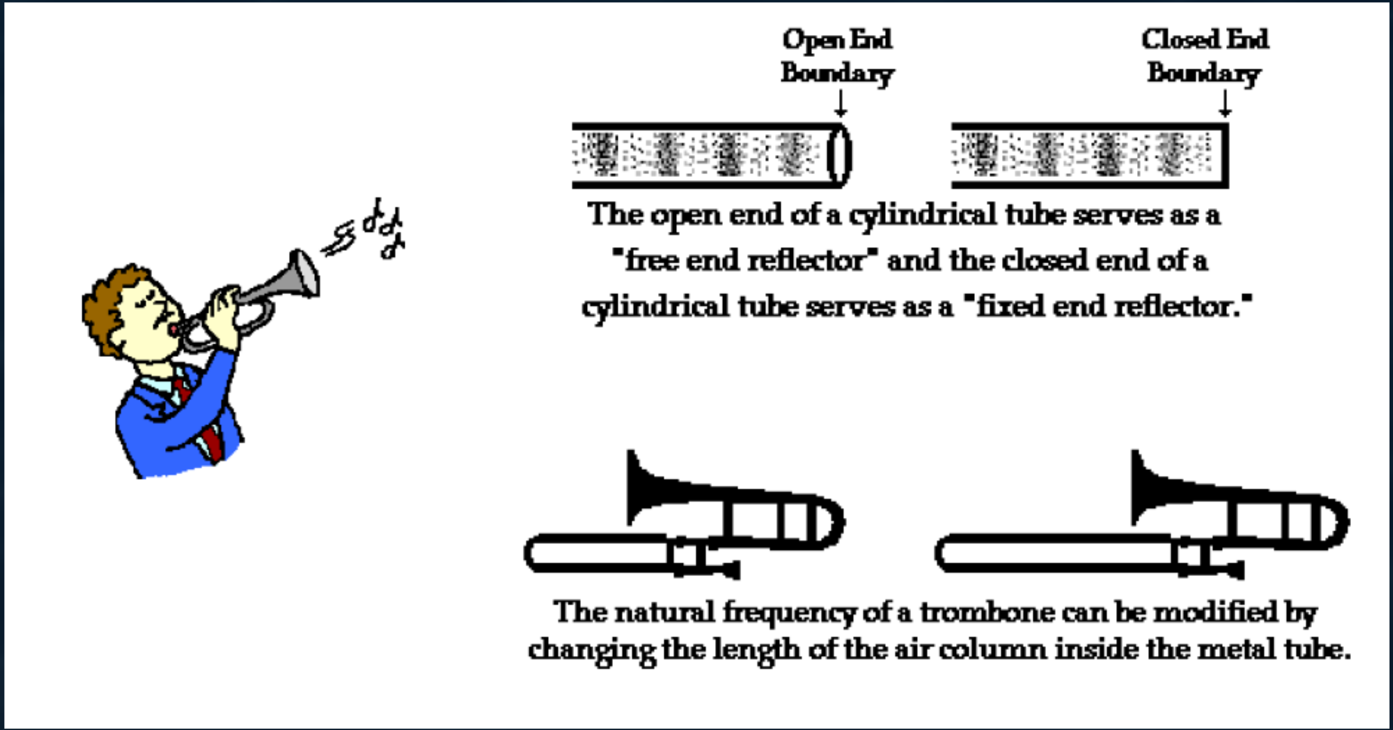


- A energia do vácuo depende do afastamento entre as placas (d):

$$E_{vac}(\mathrm{d}) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

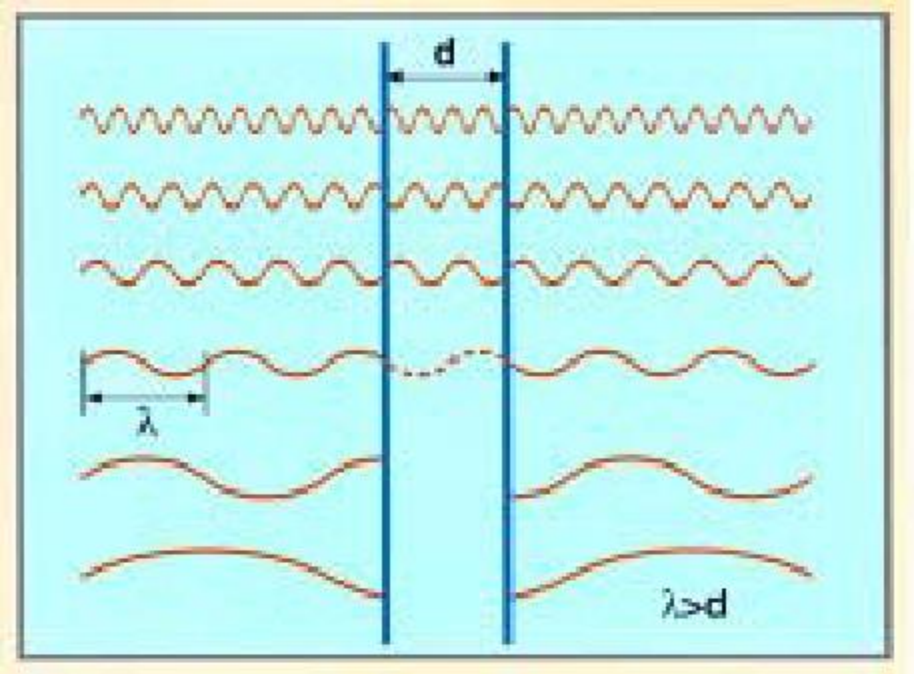
https://www.researchgate.net/profile/Eric_Davis6/publication/228353872/figure/fig1/AS:301798230380548@1448965713582/Casimir-Effect-d-Cavity-Wall-Separation-O-ZPF-Mode-Wavelength.png

▶ Como modificar as condições de contorno de um campo?



Retirado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4572215/mod_resource/content/0/Aula7%20-%20Resson%C3%A2nciaOndasEstacionarias.pdf

A energia do vácuo: *é detectável*?



$$E_{vac}(d) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}$$

- Modificando-se (d), modifica-se a energia do vácuo!
- Energia dependente da distância implica uma força entre as placas!

$$\boxed{F = -\frac{dE_{vac}}{dx}}$$

https://www.researchgate.net/profile/Eric_Davis6/publication/228353872/figure/fig1/AS:301798230380548@1448965713582/Casimir-Effect-d-Cavity-Wall-Separation-O-ZPF-Mode-Wavelength.png

A energia do vácuo: *é detectável*?

- A força entre as placas, causada pelas flutuações do vácuo quântico, foi prevista por Hendrik G. B. Casimir em 1948.

- Hoje, chamamos este fenômeno de efeito Casimir.

- Exemplo: campo eletromagnético numa interface.

- From Maxwell's equations, combined with Stokes' and Gauss' theorems, one can derive the following boundary conditions (Fig. 1)

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{B}^{(1)}) = 0 \qquad (0.9)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}^{(2)} - \mathbf{D}^{(1)}) = 4\pi\rho_s \qquad (0.10)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}) = 0 \qquad (0.11)$$

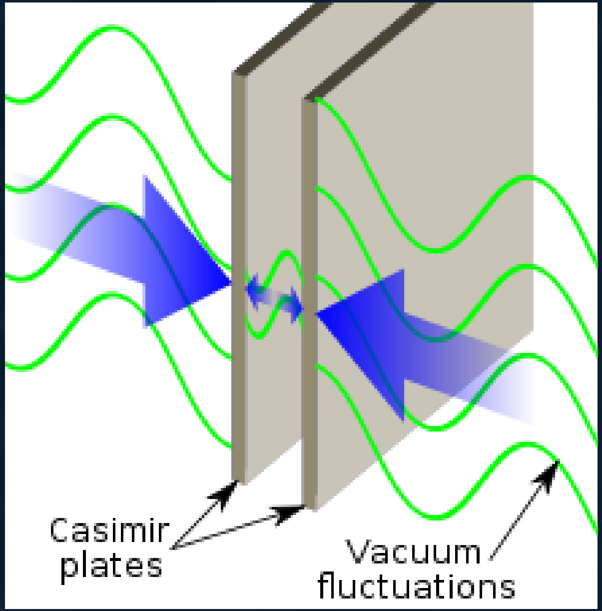
$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s \qquad (0.12)$$

where ρ_s is a possible surface charge density at the boundary, and $\mathbf{J}_s$ is a possible surface current density at the boundary.

A energia do vácuo: *é detectável*?

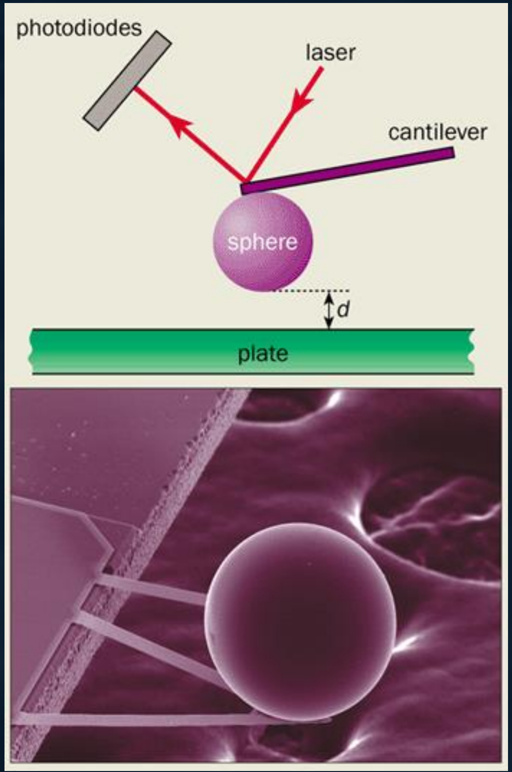
- Mas este efeito é real? Ou é só um resultado matemático?

$$\frac{F}{A} = \frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}$$



A energia do vácuo: *é detectável*?

- O efeito Casimir eletromagnético é verificado hoje com alta precisão.
- Aplicação com importantância tecnológica crescente (MEMS).
- $R \sim 10^2 \mu m$
- $d \sim 10 - 10^3 nm$




© GONZALO KENNY