# TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

ESCOLA DE FÍSICA DA UERJ 2020

PROF. BRUNO MINTZ

AULA 3

# Nesta aula

- Cálculo explícito da energia do vácuo.
- A energia do vácuo e o problema da constante cosmológica.
- Espalhamento de partículas
- O momento magnético anômalo do múon
- O formalismo de Feynman para MQ e TQC

# Como calcular da energia do vácuo?

# Como calcular da energia do vácuo?

- Expressão (formal) para a energia do vácuo

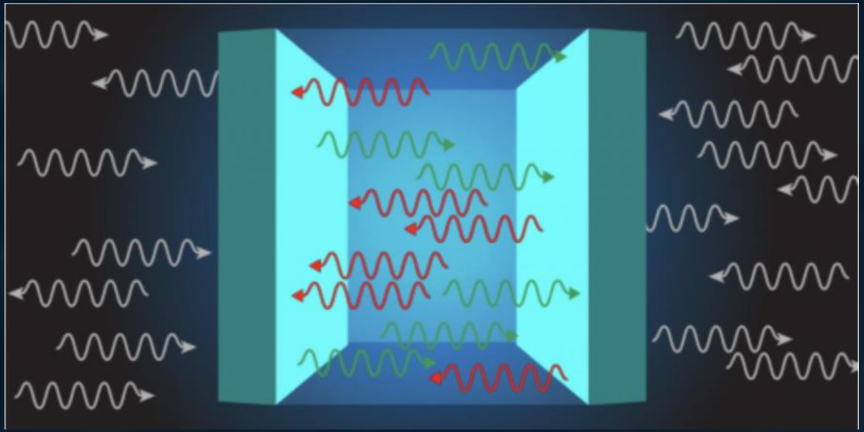
$$E_{vac} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar c \sqrt{\vec{k}^2 + \tilde{m}^2}}{2} \to \infty$$

- Como obter alguma coisa razoável desta expressão?

- Afinal, o efeito Casimir é real, medido experimentalmente (aula 2).

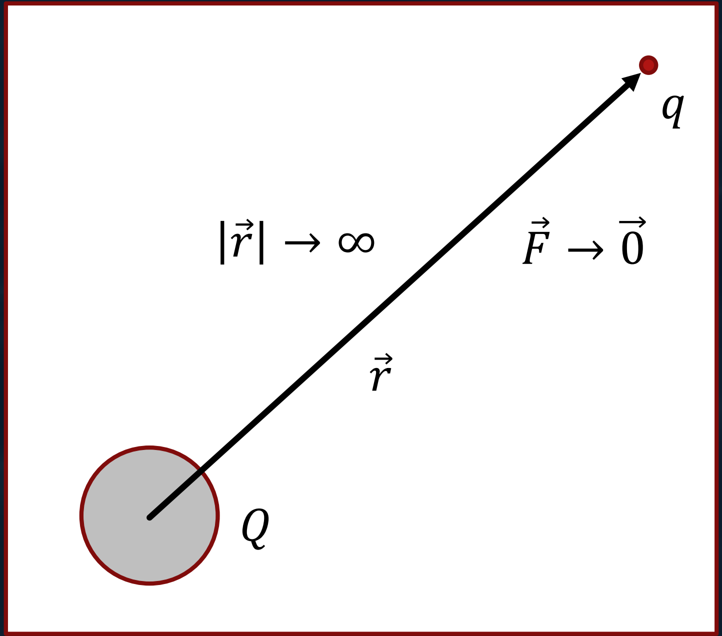
# Como calcular da energia do vácuo?

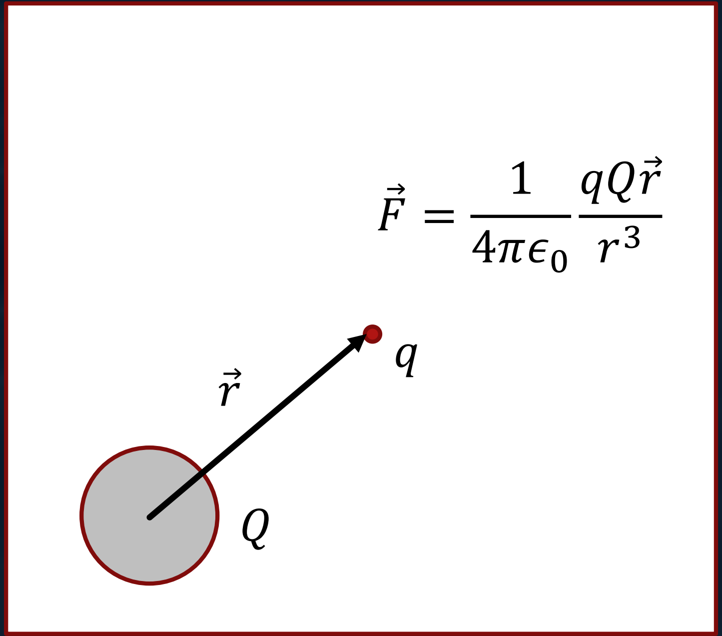
- Embora a energia do vácuo seja infinita, o que importa para a força é como ela varia com a distância entre as placas. (Aula 2.)



# Como calcular da energia do vácuo?

- Energia eletrostática entre duas cargas: trabalho da força elétrica para trazer a carga $q$ do infinito (onde $F = 0$) até uma distância $r$.



# Como calcular da energia do vácuo?

- Trabalho da força conservativa = - variação da energia potencial

- Devemos calcular a energia do vácuo nas duas situações:
- "Final": placas presentes, à distância $L$
- "Inicial": placas ausentes (ou, equivalentemente, à distância $\mathrm{D} \to \infty$)

# Como calcular da energia do vácuo?

- Cálculo simplificado:
  - Campo escalar sem massa ($\tilde{m} = 0$)
  - Dimensão espacial $d = 1 + 1$ (eixo $X$)
  - Condição de contorno: extremos presos em $x = 0$ e $x = L$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0$$

- Equação da onda ($\tilde{m} = 0$)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

# Como calcular da energia do vácuo?

- Equação da onda:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$$

- Modos normais entre as "placas" (via separação de variáveis):

$$\varphi_n(x,t)=[A_n\,sen(k_n x)+B_n cos(k_n x)]\,sen(\omega_n t)$$

- Impondo-se as condições de contorno $\varphi(0,t)=\varphi(L,t)=0$, temos

$$B_n=0 \quad e \quad k_n=\frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_n=ck_n=\frac{n\pi c}{L}}$$

com $n=0,1,2,\ldots$

Com as frequências dos modos normais, já podemos calcular $E_{vac}$!

# Como calcular da energia do vácuo?

- Energia do vácuo na região entre as placas, na sua <u>presença</u>:

$$E_{vac}^{dentro,\, com\, placas} = E_f = \sum_{\substack{modos \\ normais}} \frac{\hbar\omega}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c \pi}{2L} n \to \infty$$

como poderíamos esperar. (Há infinitos modos normais.)

- Energia do vácuo na região entre as placas, na sua <u>ausência</u>:

$$E_{vac}^{dentro,\, sem\, placas} = E_i = \sum_{\substack{modos \\ normais}} \frac{\hbar\omega}{2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi c/L} \frac{\hbar\omega}{2} \to \infty$$

# Como calcular da energia do vácuo?

- A energia do vácuo em ambas as situações é infinita.

- Mas e a sua variação ao se passar da situação inicial para a final?

$$\Delta E = E_f - E_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c \pi}{2L} n - \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\frac{\pi c}{L}} \frac{\hbar \omega}{2} = \infty - \infty$$

Expressão mal definida!


OH! E AGORA QUEM
PODERÁ ME DEFENDER
GERADORMEMES.COM

# Como calcular da energia do vácuo?

- Regularização (definição informal):
  - Procedimento matemático para evitar que certas integrais (ou somas) sejam divergentes.
  - Permite que, em seguida, seja feita a renormalização (subtração).
  - Diversas possibilidades para a regularização: corte abrupto (frequência máxima), corte gradual (função de corte), continuação analítica (regularização zeta), ...

# Como calcular da energia do vácuo?

- Em outros cálculos de TQC (p. ex., espalhamento), também surgem infinitos. Para tornar possível o cálculo, é necessário fazer alguma regularização: corte abrupto, corte gradual, continuação analítica (regularização dimensional), introdução de "partículas fictícias" (Pauli-Villars), ...

- Em todos os casos, há um parâmetro que, no limite adequado, recupera a integral (ou soma) divergente original.

# Como calcular da energia do vácuo?

- Regularização por corte brusco:

$$E_i = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\frac{\pi c}{L}} \frac{\hbar\omega}{2} \rightarrow E_i^{reg}(\omega_{max}) = \int_0^{\omega_{max}} \frac{d\omega}{\frac{\pi c}{L}} \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$E_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c\pi}{2L} n \rightarrow E_f^{reg}(N_{max}) = \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{\hbar c\pi}{2L} n$$

Obs.: $\omega_{max} \rightarrow \infty$ ou $N_{max} \rightarrow \infty$ recuperam as expressões originais ($\infty$).

- Regularização por corte gradual (exponencial):

$$E_f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c\pi}{2L} n \rightarrow E_f^{reg}(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c\pi}{2L} n\, e^{-\sigma n}$$

Obs.: $\sigma \rightarrow 0$ recupera a expressão original ($\infty$).

# Como calcular da energia do vácuo?

- Regularização por corte gradual:

$$E_i^{reg}(\sigma) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\frac{\pi c}{L}} \frac{\hbar\omega}{2} \underbrace{e^{-\sigma\omega}} = \frac{\hbar L}{2\pi c} \frac{1}{\sigma^2}$$

$$E_f^{reg}(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c\pi}{2L} n\underbrace{e^{-\sigma n c\pi/L}} = \frac{\frac{\hbar\pi c}{2L}}{\left(e^{\frac{\sigma\pi c}{2L}} - e^{-\frac{\sigma\pi c}{2L}}\right)^2}$$

Obs.: $\sigma \to 0$ recupera as expressões originais ($\infty$).

# Como calcular da energia do vácuo?

- Fazendo a expansão em série para $\sigma \to 0$:

$$E_i^{reg}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\frac{\pi c}{L}} \frac{\hbar\omega}{2} e^{-\sigma\omega} = \frac{\hbar L}{2\pi c} \frac{1}{\sigma^2}$$

$$E_f^{reg}(\sigma) = \frac{\frac{\hbar\pi c}{2L}}{\left(e^{\frac{\sigma\pi c}{2L}} - e^{-\frac{\sigma\pi c}{2L}}\right)^2} = \frac{\frac{\hbar\pi c}{8L}}{\left(\sinh\left(\frac{\sigma\pi c}{2L}\right)\right)^2} = \frac{\hbar L}{2\pi c} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\hbar\pi c}{24L} + O(\sigma^2)$$

# Como calcular da energia do vácuo?

- Fazendo a subtração da energia do vácuo do espaço livre:

$$E_{Casimir} = \lim_{\sigma \to 0} \left( E_f^{reg}(\sigma) - E_i^{reg}(\sigma) \right) = -\frac{\hbar \pi c}{24L},$$

que é um resultado finito!

- Os cálculos de energia de Casimir para situações mais complexas são bastante análogos a este.
- A complicação normalmente surge apenas no cálculo das frequências dos modos. (Cálculo clássico!)

# Exercício

- Refaça estes cálculos em detalhes.

- Calcule a força de Casimir para fronteiras com condições de contorno tipo "corda solta" (Neumann) numa extremidade e "corda presa" (Dirichlet) na outra.

(Note que o resultado será diferente para esta condição de contorno diferente.)

# A energia do vácuo em nível cosmológico

- Hipótese básica: os campos permeiam todo o Universo.
- A energia do (estado de) vácuo dos campos deve ter consequências cosmológicas.
- Efeito Casimir:
  - Situação inicial: bem definida
  - Situação final: bem definida
- Energia de Casimir (física): <u>variação</u> da energia é finita.

# A energia do vácuo em nível cosmológico

- Se o sistema for o Universo, como definir a energia do vácuo?
- Um problema adicional e importante:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

(equação de Einstein para a gravitação – Relatividade Geral)

- Energia curva o espaço-tempo.
- E a energia (infinita) do vácuo ?

# A energia do vácuo em nível cosmológico

R. J. Adler, B. Casey e O. Jacob
American Journal of Physics **63**, 620 (1995)

- Uma estimativa: comprimento de onda mínimo/frequência máxima. (Apenas para o campo eletromagnético.)

$$E_{vac}(\omega_{max}) = 2V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar\omega_k}{2}$$

- Hipótese: Energia máxima para fótons: energia de Planck

$$e_{max} = \hbar\omega_{max} = 10^{19} GeV$$

# A energia do vácuo em nível cosmológico

R. J. Adler, B. Casey e O. Jacob
American Journal of Physics **63**, 620 (1995)

- Hipótese: Energia máxima para fótons: energia de Planck

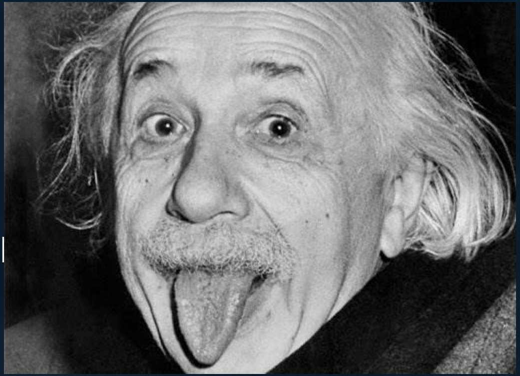
$$e_{max} = \hbar\omega_{max} = 10^{19} GeV$$

- Densidade de energia (previsão teórica):

$$\frac{E_{vac}}{V} = 8{,}4 \times 10^{76} fm^{-4}$$

- Limite experimental para a densidade de ener

$$\frac{E_{exp}}{V} < 2{,}9 \times 10^{-44} fm^{-4}$$



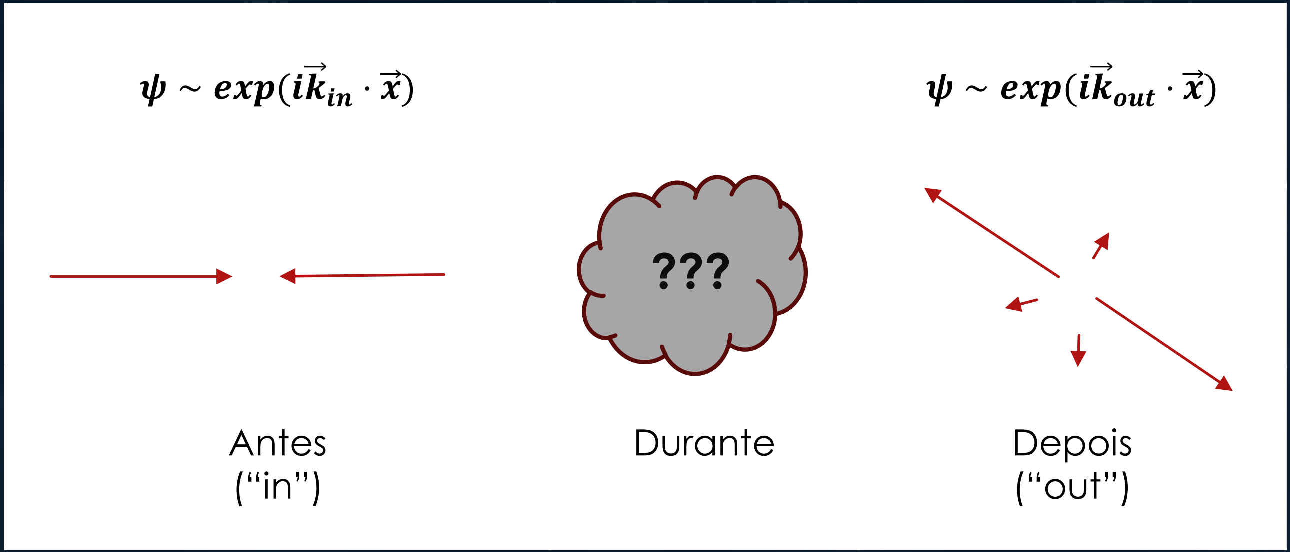
- Uma discrepância de **120 ordens de magnitude**!

# Exercício

- Leia o artigo de R. J. Adler, B. Casey e O. Jacob [American Journal of Physics **63**, 620 (1995)].

# Espalhamentos em Mecânica Quântica

- A ideia de um processo de espalhamento:



# Espalhamentos em Mecânica Quântica

- Estado inicial (“in”): N partículas livres
- Estado final (“out”): N’ partículas livres
- Estado intermediário: **??????**

- **Objetivo da teoria de espalhamento: dados um estado inicial e um potencial de interação, determinar o estado final.**

# Espalhamentos em Mecânica Quântica

- Em Mecânica Quântica: interação = energia potencial entre partículas

$$U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{ZZ'e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

- Em TQC: autointeração ou interação entre campos diferentes (N indefinido)

$$\mathcal{L}_{int} = \lambda\varphi^4 = \lambda\varphi\varphi\varphi\varphi \qquad (\lambda\varphi^4, O(N), Sigma\ linear, Higgs, \ldots)$$

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \qquad (\text{QED})$$

# Espalhamentos em Teoria de Campos

- Caso interessante: “in” e “out” são estados de partículas tão distantes que não interagem entre si (partículas “livres”).

- Evolução quântica: Operador de evolução temporal (de $t$ até $t'$):

$$\hat{U}(t,t') = exp\left(i\hat{H}(t'-t)\right)$$

- Ou seja, $\hat{U}(t,t')$ conecta estados em instantes diferentes

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t,t')|\psi(t)\rangle$$

# Espalhamentos em Teoria de Campos

- Um espalhamento conecta estados assintóticos "in" ($t \to -\infty$) e "out" ($t \to \infty$)

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}(-\infty, +\infty)|\psi_{in}\rangle \equiv \hat{S}|\psi_{in}\rangle$$

- Define-se o operador de espalhamento $\hat{S}$:

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{S}|\psi_{in}\rangle$$

$$|\psi_{in}\rangle \xrightarrow{\hat{S}} |\psi_{out}\rangle = \hat{S}|\psi_{in}\rangle$$

| Antes ("in") | | Depois ("out") |
|---|---|---|

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S

- Estado “in”: $|\boldsymbol{\psi}_{\alpha}^{+}\rangle$
- Estado “out”: $|\boldsymbol{\psi}_{\beta}^{-}\rangle$

$$|\boldsymbol{\psi}_{\beta}^{-}\rangle = \hat{\boldsymbol{S}}|\boldsymbol{\psi}_{\alpha}^{+}\rangle$$

- Elementos de matriz do operador $\hat{\boldsymbol{S}}$: *amplitude de probabilidade de transição*

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\beta\alpha}} = \langle\boldsymbol{\psi}_{\beta}^{-}|\boldsymbol{\psi}_{\alpha}^{+}\rangle$$

Obs.: $\alpha$ e $\beta$ especificam os estados (“números quânticos”: momento, spin, cor, sabor,...) “in” e “out”.

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S

$$|\psi_\beta^-\rangle = \hat{S}|\psi_\alpha^+\rangle$$

- <u>Propriedades do operador $\hat{S}$</u>:

- Unitariedade: $\hat{S}^+\hat{S} = \hat{1}$, pois $1 = \langle\psi_\beta^-|\psi_\beta^-\rangle = \langle\psi_\alpha^+|\hat{S}^+\hat{S}|\psi_\alpha^+\rangle$ (conservação da probabilidade)

- Invariante ("simétrica") sob transformações de Lorentz

- Simetrias internas → conservação de cargas (elétrica, cor, hipercarga, ...)

- Simetrias C, P e/ou T (dependendo dos campos envolvidos).

- Em geral, simetrias → regras de seleção ("permissão/proibição")

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S

- Qual a relação entre a matriz S e processos de espalhamento?
- Para processos em todos trocaram momento e energia, definimos $M_{\beta\alpha}$

$$\boxed{S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i\, \delta^{(3)}(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\, \delta(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}}$$

Obs.: $\delta^{(3)}(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\, \delta(E_\beta - E_\alpha)$: Conservação de momento e energia

- Taxa de decaimento (probabilidade por unidade de tempo)

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) \equiv dP(\alpha \to \beta)/T = 2\pi |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$$

- Seção de choque (taxa por unidade de fluxo – partículas/tempo)

$$d\sigma(\alpha \to \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \to \beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta$$

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S

$$\langle \psi_\beta^- | \psi_\alpha^+ \rangle \equiv S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i\, \delta^3(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\, \delta(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}$$

- Como calcular $M_{\beta\alpha}$?
- Principal método: teoria de perturbação.
- Hipótese básica da teoria de perturbação

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$$

- $\hat{H}_0$: hamiltoniana do campo livre (exatamente solúvel)
- $\hat{V}$: hamiltoniana de interação

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S em teoria de perturbação

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$$

- Escrevendo o operador de evolução $\hat{U}(t,t')$ no *quadro de interação,*

$$\hat{U}(\tau,\tau_0) = exp\left(i\hat{H}_0\tau\right) exp\left(-i\,\hat{H}(\tau-\tau_0)\right) exp\left(-i\,\hat{H}_0\tau_0\right)$$

- É possível escrever o operador espalhamento como uma série

$$\hat{S} = \hat{1} - i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, \hat{V}(t_1) + (-i)^2\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2) + (-i)^3\epsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3\, \hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)\hat{V}(t_3) + \cdots$$

Obs.: O parâmetro $\epsilon$ deve ser pequeno para ser possível truncar a expansão.

# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S em teoria de perturbação

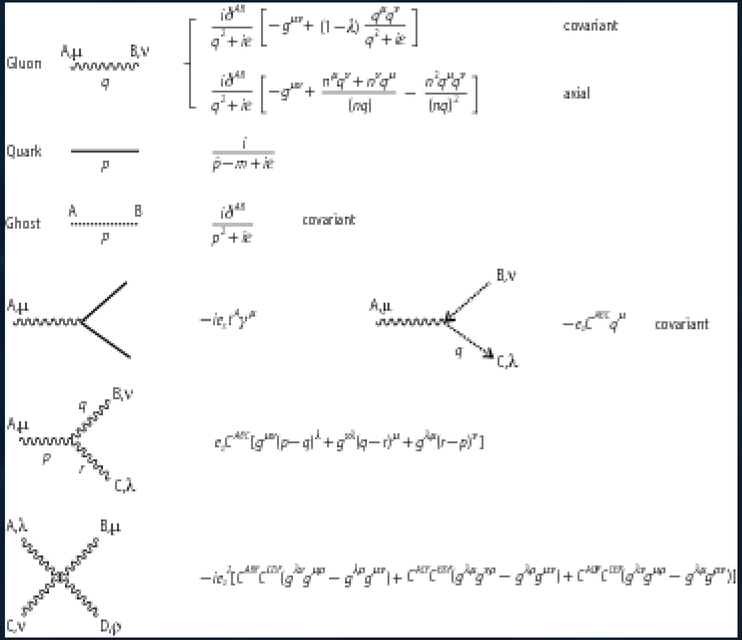
$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i\, \delta^3(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\alpha)\, \delta(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}$$

$$\hat{S} = \hat{1} - i\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, \hat{V}(t_1) + (-i)^2\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2) + (-i)^3\epsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3\, \hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)\hat{V}(t_3) + \cdots$$

- Uma forma muito conveniente de se calcular os elementos da matriz S é através dos chamados gráficos de Feynman.
- Os procedimentos para calcular os elementos da matriz S (na verdade, calculamos $M_{\beta\alpha}$) a partir dos gráficos de Feynman possíveis em uma teoria são chamadas de regras de Feynman.

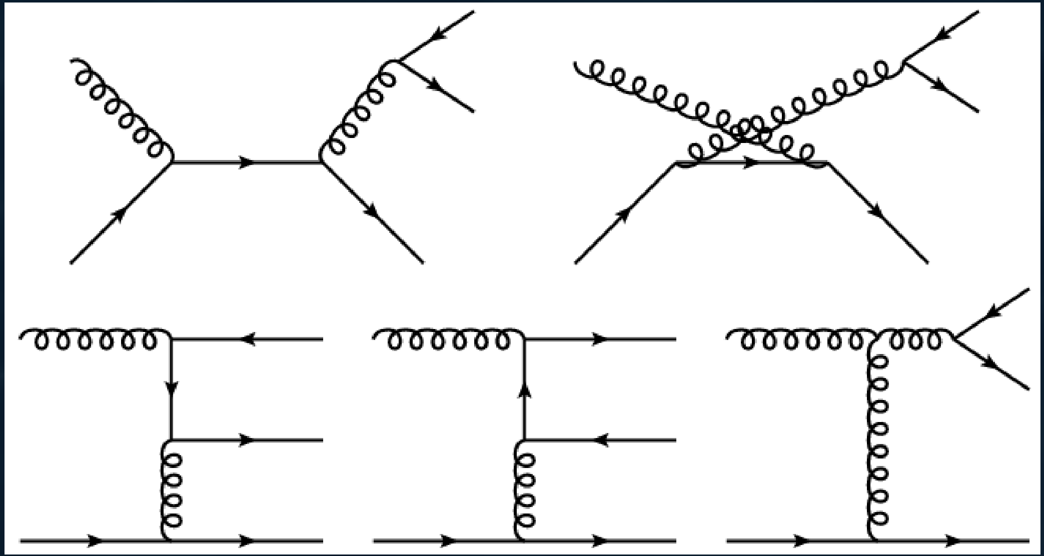
# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S em teoria de perturbação

- Exemplo de regras de Feynman: Cromodinâmica quântica (QCD).



# Espalhamentos em Teoria de Campos: matriz S em teoria de perturbação

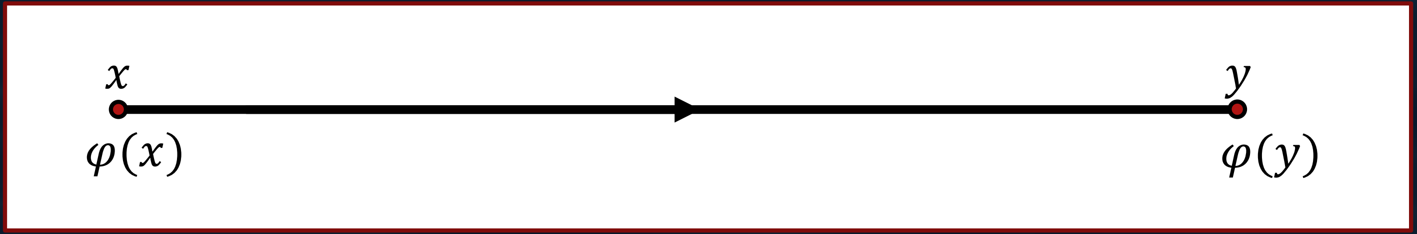
- Exemplos de diagramas de Feynman da QCD ($qg \to \bar{q}qq$)



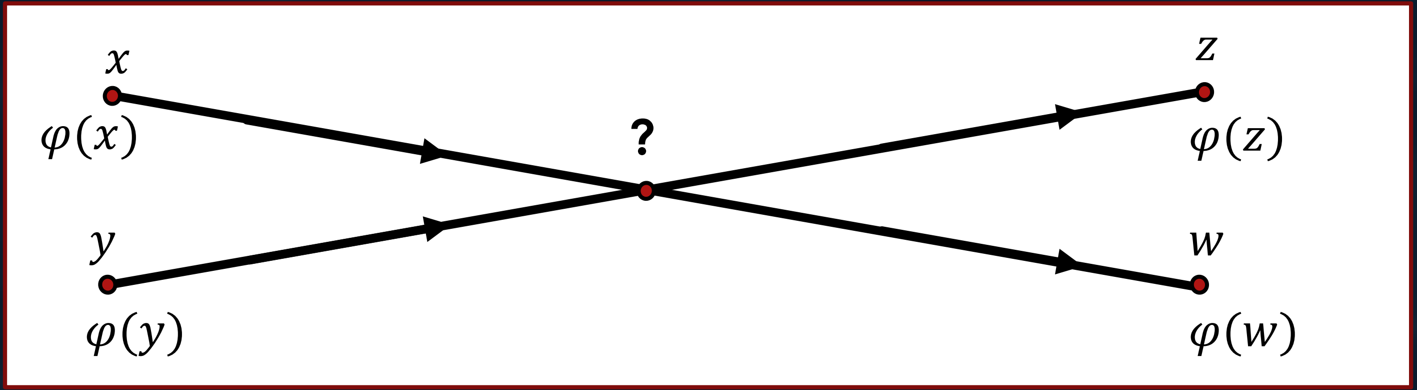
# Funções de correlação

# Funções de correlação

- A propagação e a interação das partículas são manifestações de como o campo se relaciona consigo mesmo (e/ou com outros campos) em pontos diferentes do espaço-tempo.



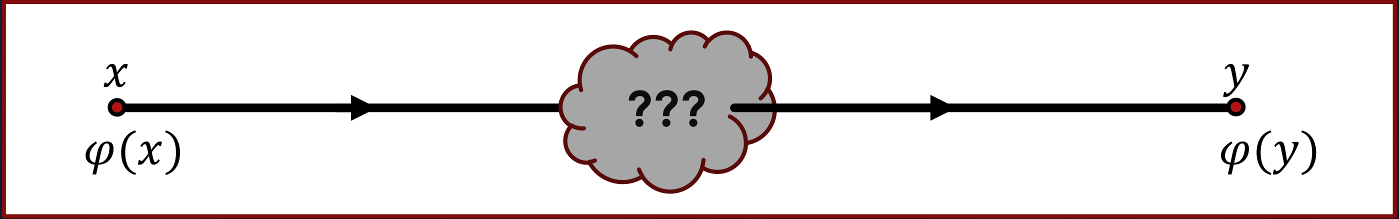

Função de correlação de 2 pontos

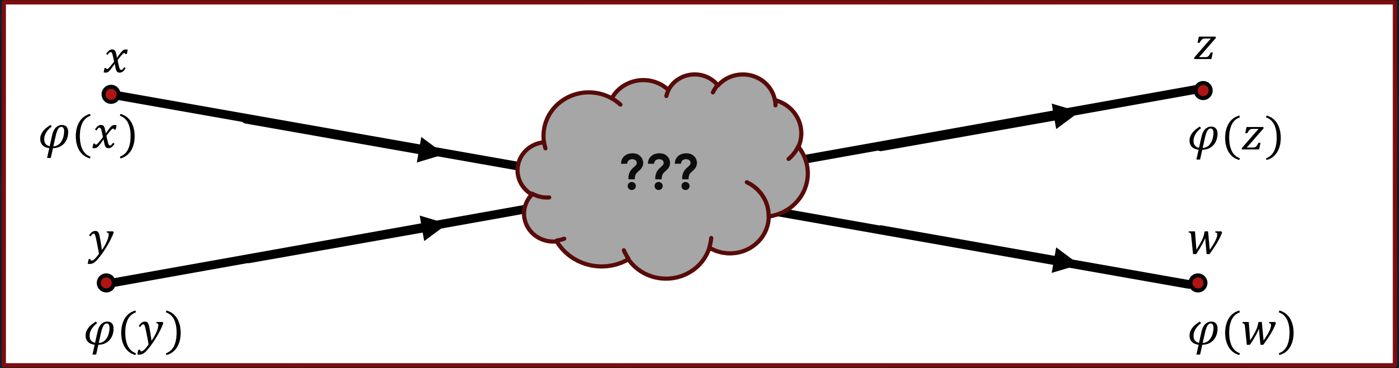



Função de correlação de 4 pontos

# Funções de correlação

- A propagação e a interação das partículas são manifestações de como o campo se relaciona consigo mesmo (e/ou com outros campos) em pontos diferentes do espaço-tempo.



# Funções de correlação

- Como qualquer observável em MQ, os operadores de campo adquirem valores aleatórios (com uma lei de probabilidades bem definida).
- Pode-se associar cada ponto do espaço-tempo a um processo estocástico.
- Um processo estocástico é definido pela densidade de probabilidade $p(x, y)$.
- Definições úteis:

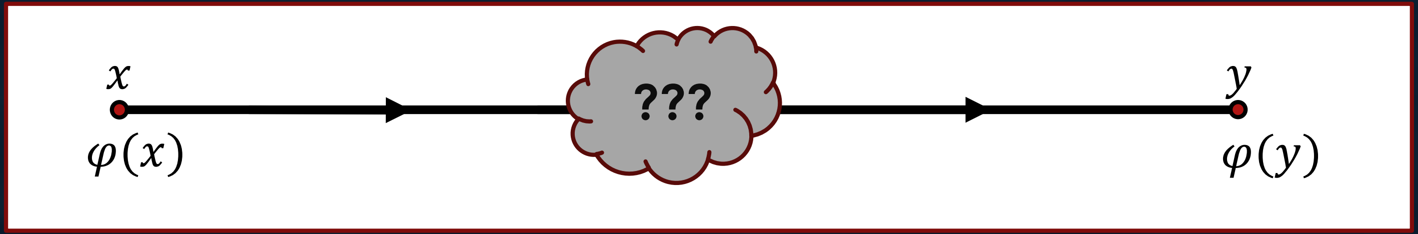
\- Média de um processo X com densidade de probabilidade $p(x)$:

$$\langle X \rangle \equiv \int dx\; p(x) x$$

\- Função de correlação entre dois processos estocásticos X e Y (prob. $p(x, y)$):

$$\langle XY \rangle \equiv Corr(X, Y) \equiv \int dx\, dy\; p(x, y)\; x\; y$$

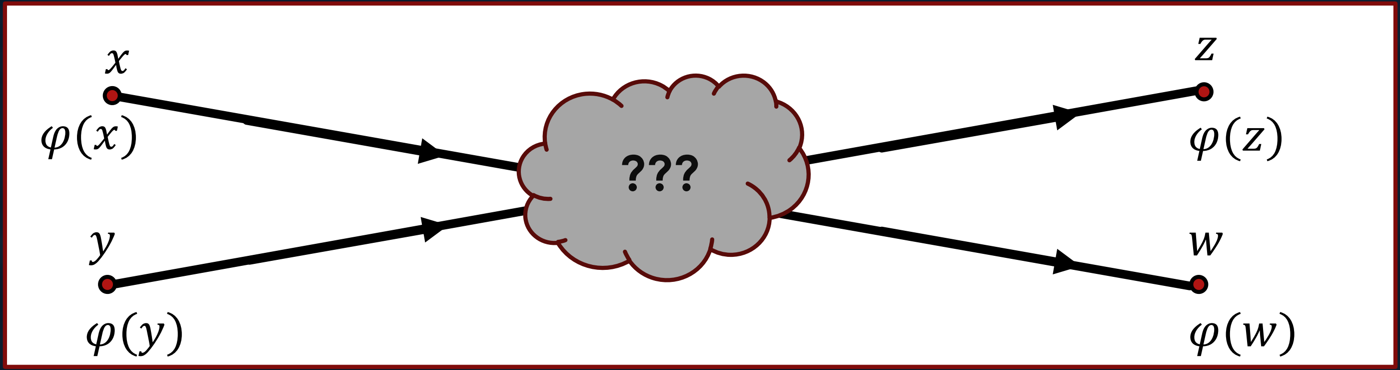
# Funções de correlação




Função de correlação de 2 pontos (propagador)

$$\langle\Omega|\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)|\Omega\rangle$$

# Funções de correlação




Função de correlação de 4 pontos

$$\langle\Omega|\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(w)\hat{\varphi}(z)|\Omega\rangle$$

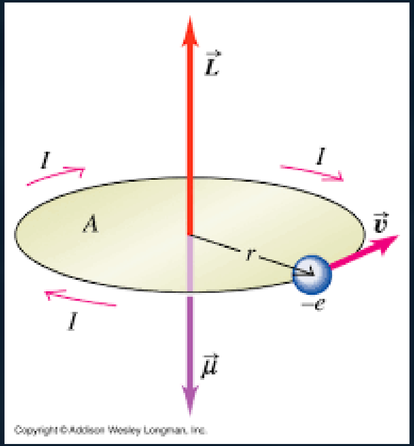
# O momento magnético anômalo do múon

# O momento magnético anômalo do múon

http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2018-rev-g-2-muon-anom-mag-moment.pdf

- Momento de dipolo magnético de uma partícula num fio circular.

$$\vec{m} = \frac{q}{2\mu}\vec{L}$$




- Generalização: fator g

$$\vec{m} = g\,\frac{q}{2\mu}\vec{L}$$

- Partículas pontuais podem ter momento angular Intrínseco (spin). Partículas de spin ½:

$$|\vec{L}| = |\vec{S}| = \frac{\hbar}{2}$$

# O momento magnético anômalo do múon

http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2018-rev-g-2-muon-anom-mag-moment.pdf

$$\vec{m} = g\frac{q}{2\mu}\vec{L}$$

- Previsão da teoria de Dirac para férmions de spin ½ (elétrons, múons,...):

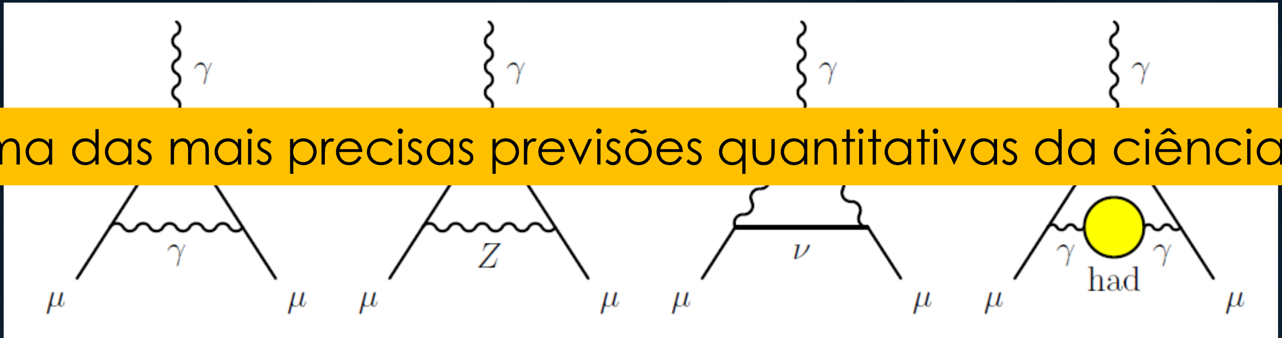
$$g_{Dirac} = 2$$

- Mas, experimentalmente, o valor é um pouco diferente de $g = 2$ para cada partícula.

# O momento magnético anômalo do múon

http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2018-rev-g-2-muon-anom-mag-moment.pdf

- Definição: $a := \frac{g-2}{2}$
- Para o múon, $a_\mu^{exp} = 0{,}001\,165\,920\,91\,(54)(33)$
- Previsão teórica (TQC): $a_\mu^{teo} = 0{,}001\,165\,918\,30\,(1)(40)(26)$

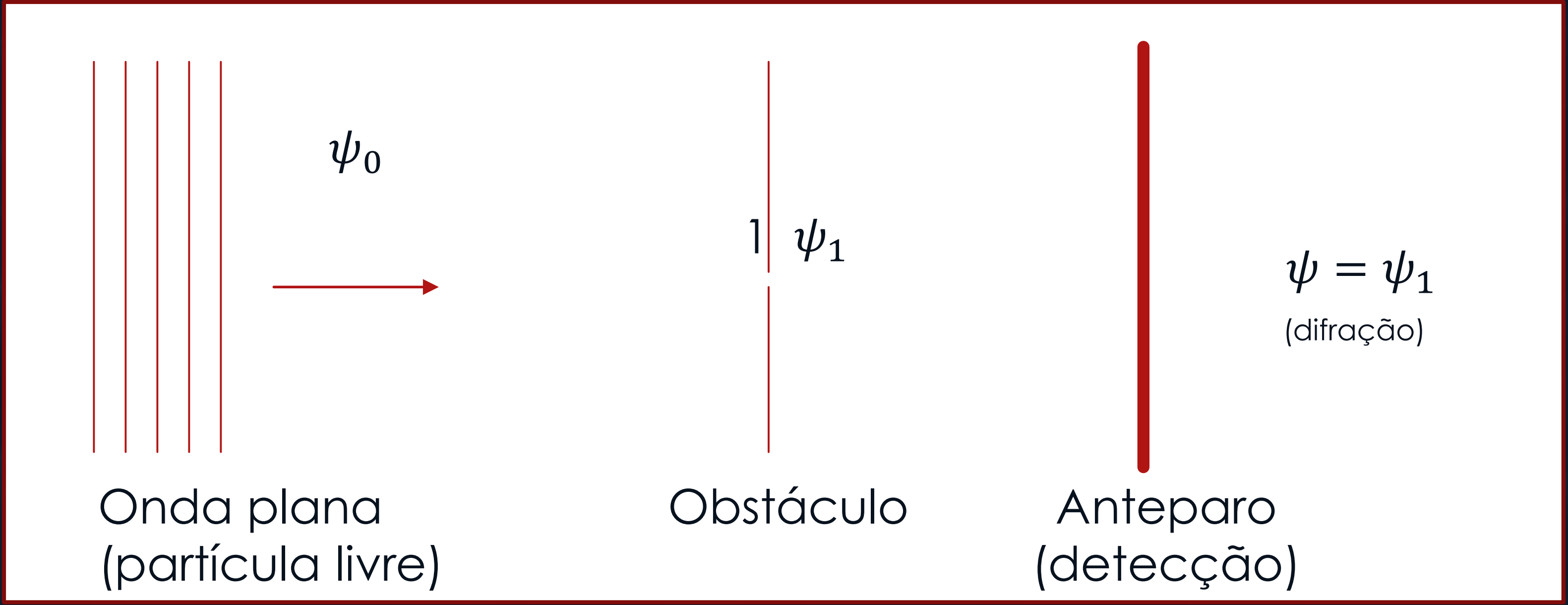



Uma das mais precisas previsões quantitativas da ciência!

# Formulação de Feynman da Mecânica Quântica

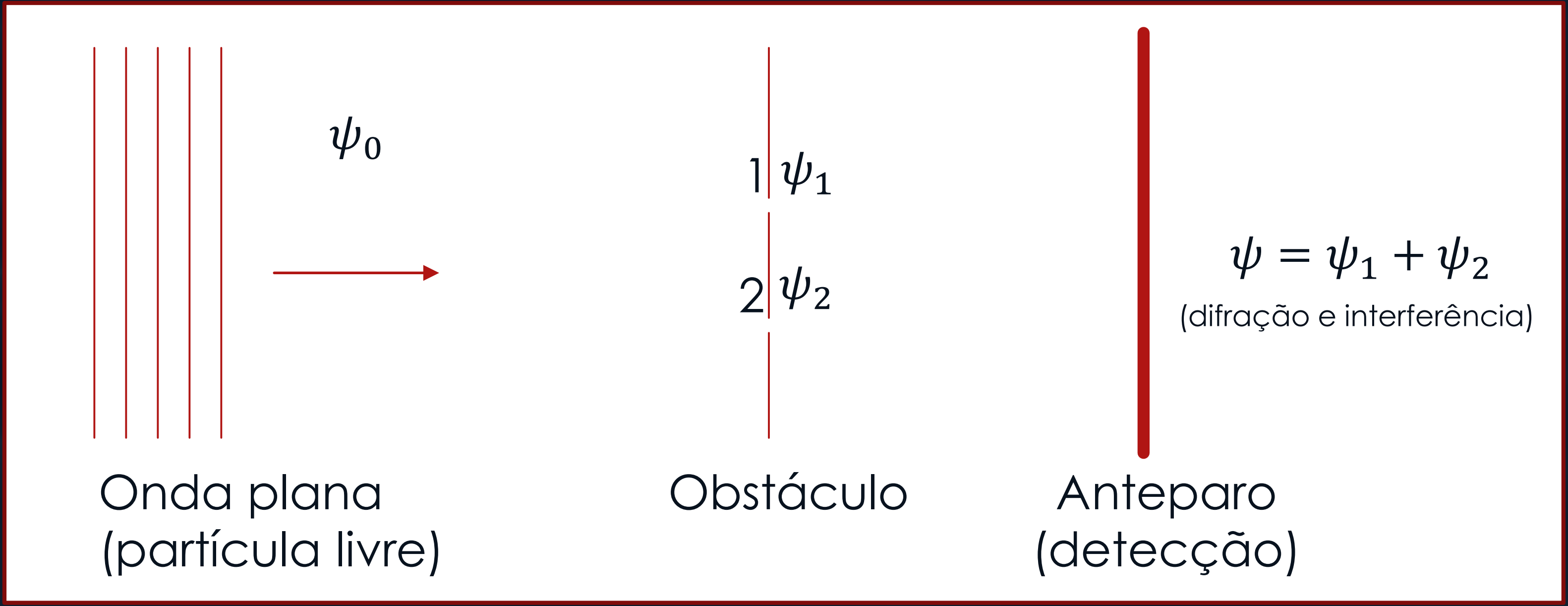
# Formulação de Feynman da MQ

- 1 obstáculo, 1 furo



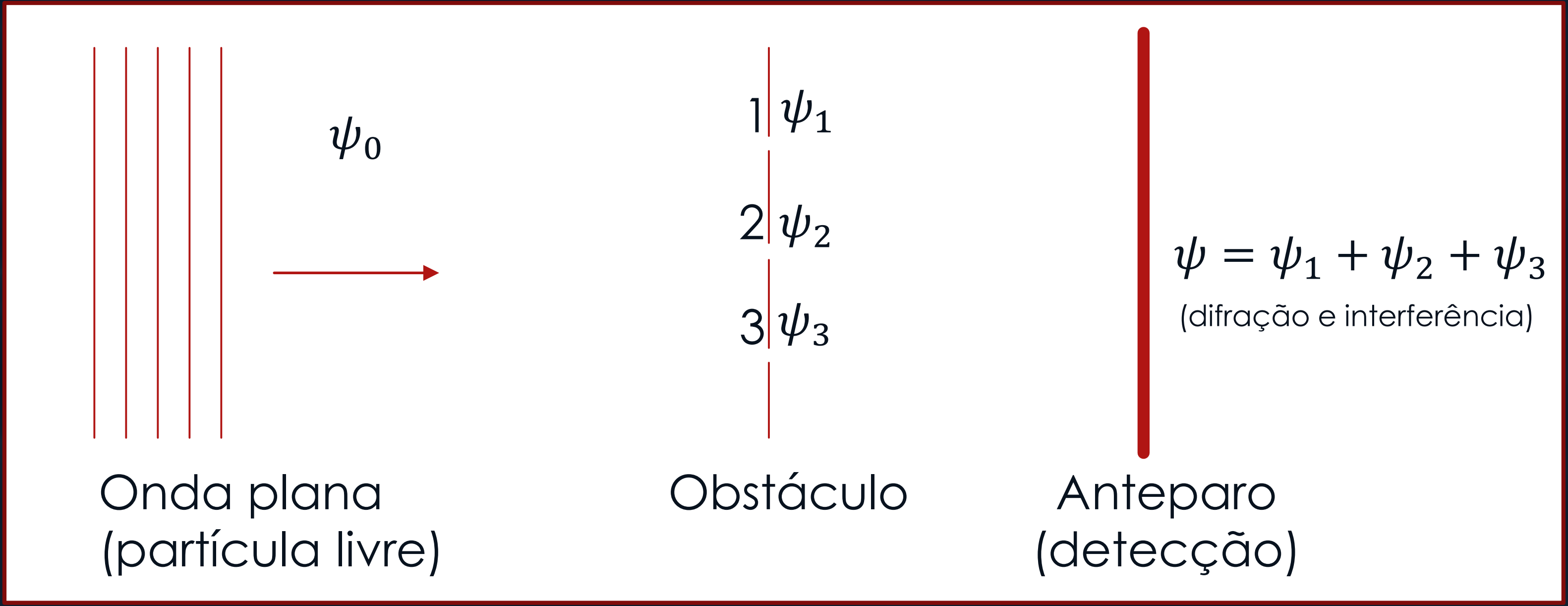
# Formulação de Feynman da MQ

- 1 obstáculo, 2 furos



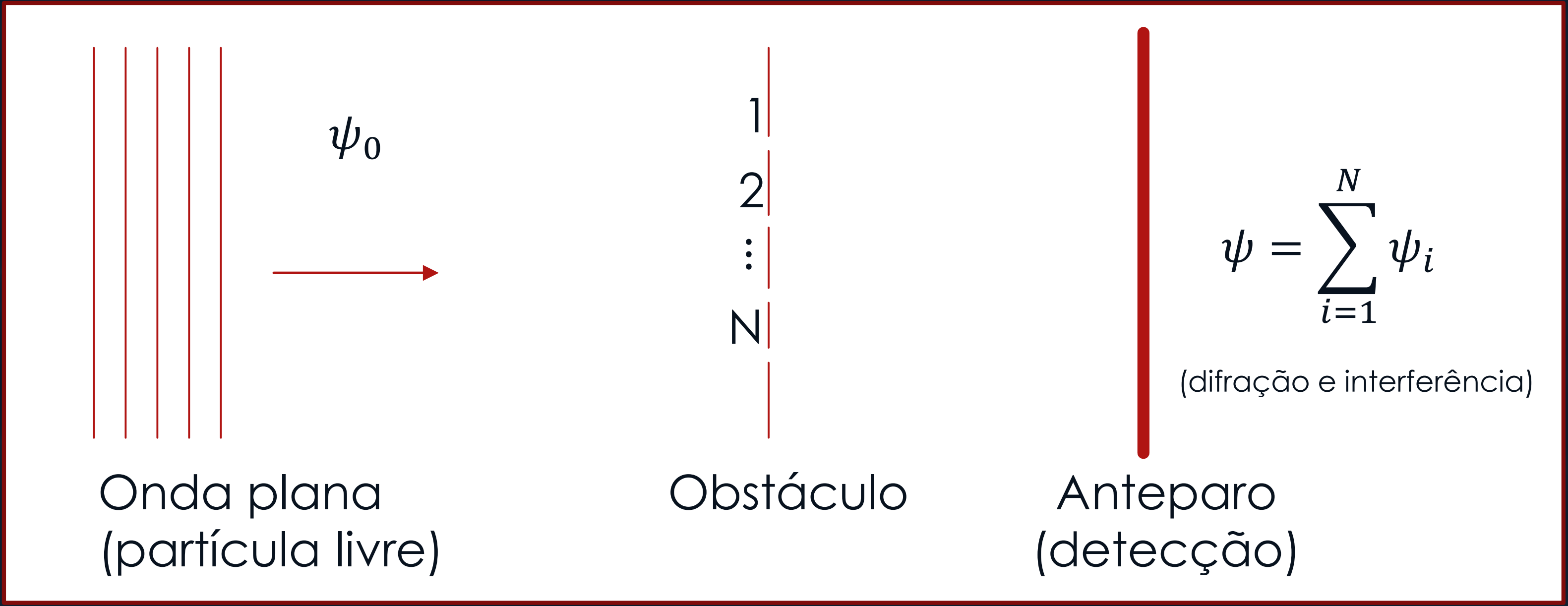
# Formulação de Feynman da MQ

- 1 obstáculo, 3 furos



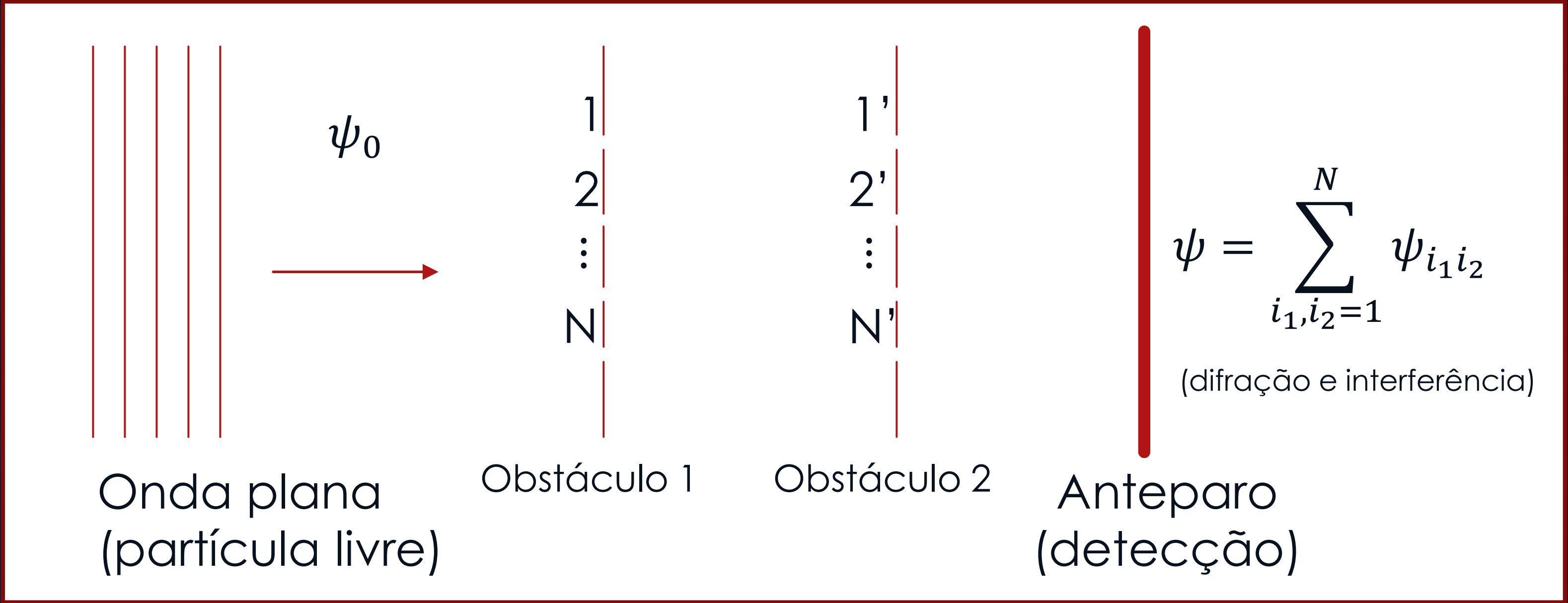
# Formulação de Feynman da MQ

- 1 obstáculo, N furos



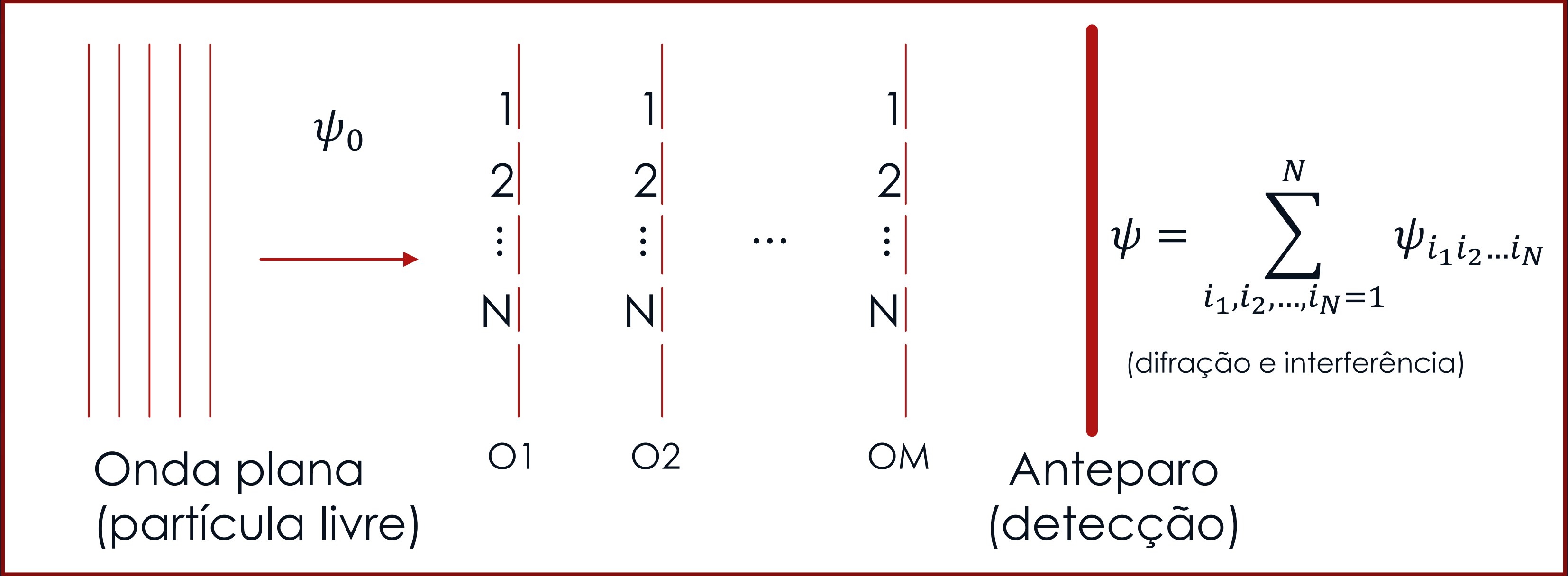
# Formulação de Feynman da MQ

- 2 obstáculos, N furos em cada um

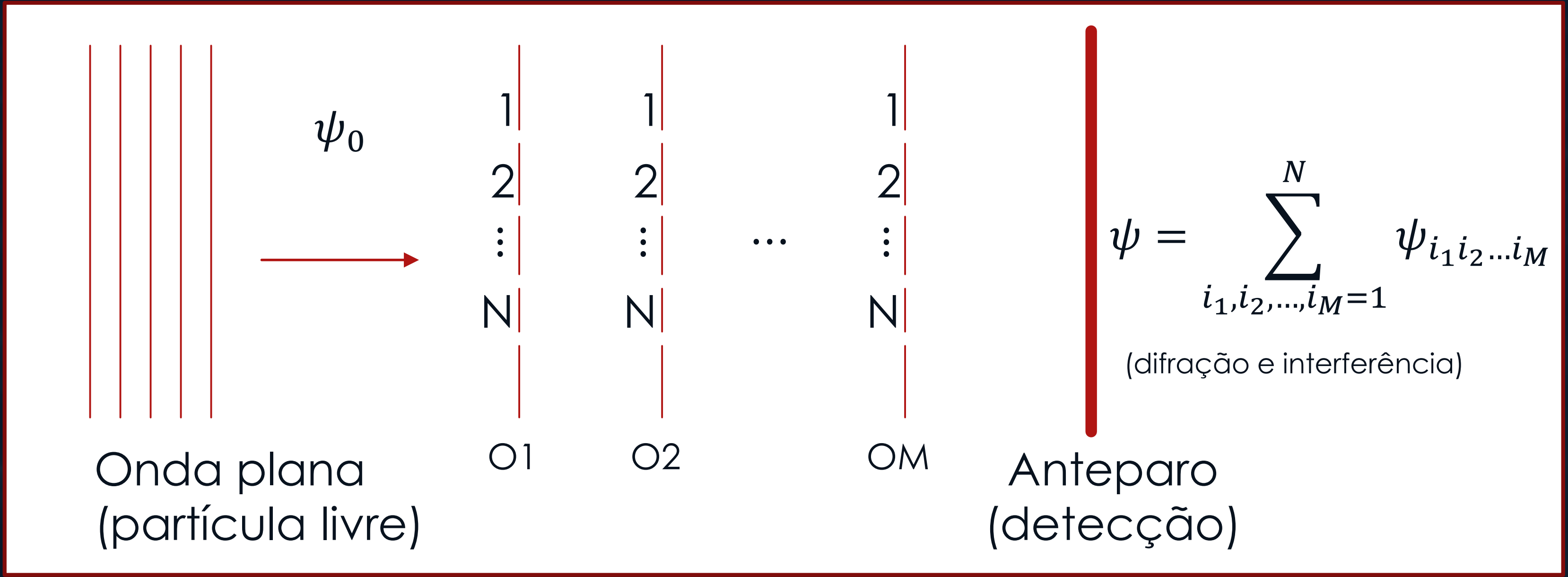


# Formulação de Feynman da MQ

- M obstáculos, N furos em cada um



# Formulação de Feynman da MQ




$$\psi = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_M = 1}^{N} \psi_{i_1 i_2 \ldots i_M}$$

"soma sobre histórias"

"soma sobre trajetórias"

# Formulação de Feynman da MQ

- Infinitos obstáculos, infinitos furos em cada um

# Formulação de Feynman da MQ

- A trajetória clássica ($S[x]$ mínima) é a mais provável (mas não a única possível).
- Formulação de Feynman: valores esperados → soma ponderada sobre todas as funções-movimento $x(t)$ possíveis, com "peso" $e^{iS[x]/\hbar}$ (diferente para cada $x(t)$).
- Expressão matemática:

$$\langle \hat{x}(t_1)\, \hat{x}(t_2) \rangle = \frac{\int [Dx]\, x(t_1)\, x(t_2)\, e^{iS[x]/\hbar}}{\int [Dx]\, e^{iS[x]/\hbar}}$$

- O símbolo $\int [Dx]$ significa "integre (some) sobre todas as funções-movimento permitidas para a partícula": integral funcional.
- Muito semelhante a uma correlação entre variáveis aleatórias

$$\langle XY \rangle \equiv Corr(X,Y) \equiv \int dx\, dy\, p(x,y)\, x\, y$$

<u>Obs</u>.: A exponencial $e^{iS/\hbar}$ não é real. Logo, não é uma densidade de probabilidade.

# Formulação de Feynman da MQ

- A integral sobre todas as funções $x$ (integral funcional) surge do caráter quântico da evolução da partícula (processo estocástico).
- É possível obter a equação de Schrödinger a partir da fórmula da integral de Feynman (e vice-versa).
- Portanto, a formulação de Feynman da MQ é equivalente à de Schrödinger.
- Para problemas de Mecânica Quântica, os cálculos na formulação de Feynman são mais complicados do que na formulação de Schrödinger.
- Para campos quânticos, a situação se inverte: o formalismo funcional é muito mais poderoso!

# Formulação de Feynman da TQC

- Como aplicar as ideias de Feynman a campos quânticos?
- <u>Partícula quântica</u>: a posição $x(t)$ é uma variável aleatória.

$$\langle \hat{x}(t_1)\, \hat{x}(t_2) \rangle = \frac{\int [Dx]\, x(t_1)\, x(t_2)\, e^{iS[x]/\hbar}}{\int [Dx]\, e^{iS[x]/\hbar}}$$

- <u>Campos quânticos</u>: o valor do campo $\varphi(x)$ é uma variável aleatória.

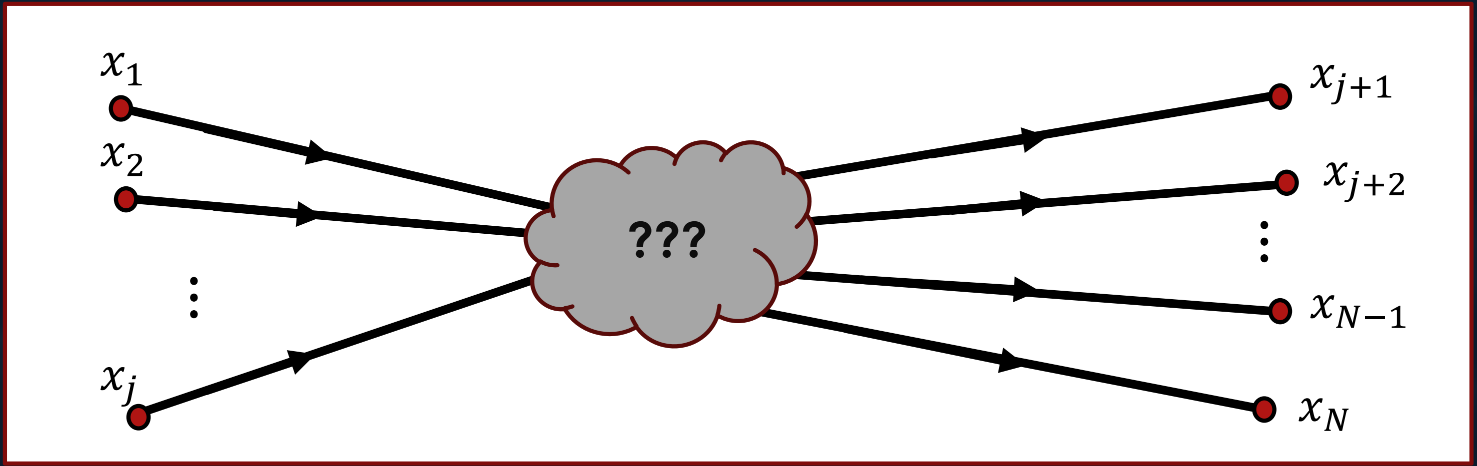
$$\langle \hat{\varphi}(x_1)\, \hat{\varphi}(x_2) \rangle = \frac{\int [D\varphi]\, \varphi(x_1)\, \varphi(x_2)\, e^{iS[\varphi]/\hbar}}{\int [D\varphi]\, e^{iS[\varphi]/\hbar}}$$

- O símbolo $\int [D\varphi]$ representa "integre sobre todas as configurações de campo permitidas" ("soma sobre histórias").

# Formulação de Feynman da TQC

- Função de N pontos (campo escalar):

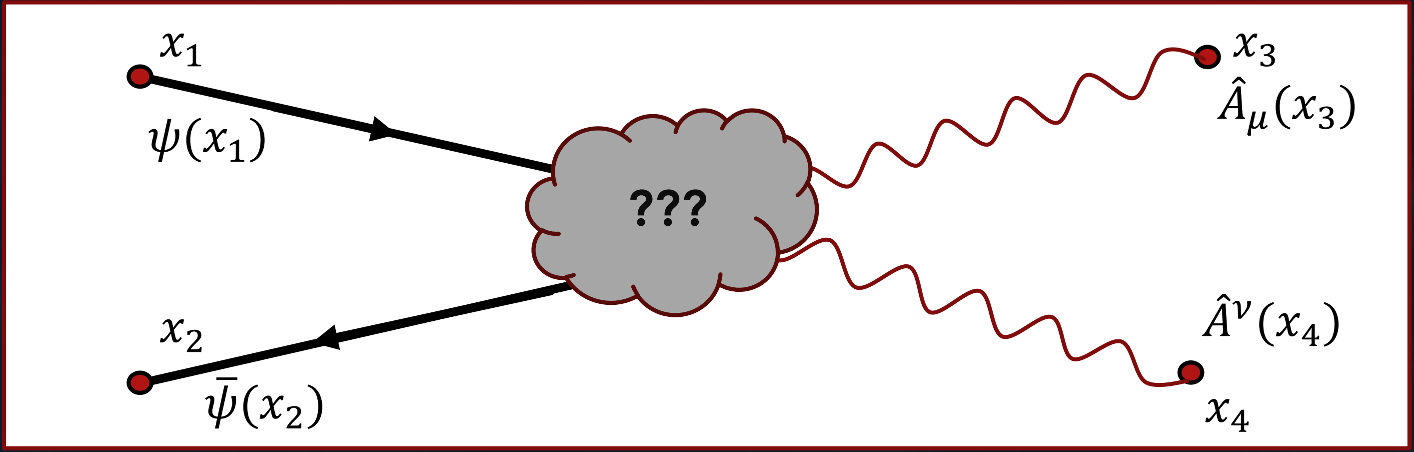
$$\langle \hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_N) \rangle = \frac{\int [D\varphi]\, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N)\, e^{iS[\varphi]/\hbar}}{\int [D\varphi]\, e^{iS[\varphi]/\hbar}}$$



# Formulação de Feynman da TQC

- Função de correlação envolvendo campos diferentes:

$$\left\langle \hat{\bar{\psi}}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\, \hat{A}_\mu(x_3)\, \hat{A}^\nu(x_4) \right\rangle = \frac{\int [D\bar{\psi}][D\psi][DA]\, \bar{\psi}(x_1)\, \psi(x_2)\, \hat{A}_\mu(x_3)\, \hat{A}^\nu(x_4)\, e^{iS[\bar{\psi},\psi,A]/\hbar}}{\int [D\bar{\psi}][D\psi][DA]\, e^{iS[\bar{\psi},\psi,A]/\hbar}}$$



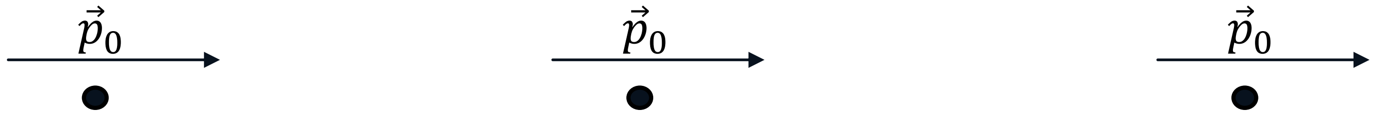
# SLIDES EXTRA

# Simetrias e leis de conservação

# Simetrias e leis de conservação

- Em toda a Física há uma conexão íntima entre simetrias e leis de conservação.
- Simetria de translação $\Longleftrightarrow$ Momento linear é conservado

Se todos os pontos são equivalentes...

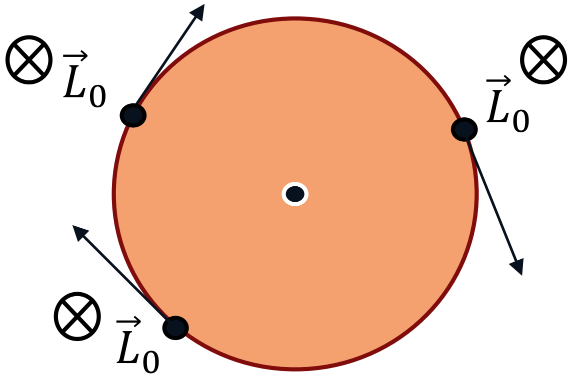



... nada pode causar uma mudança no estado de movimento.

# Simetrias e leis de conservação

- Simetria de rotação ⟺ Momento angular é conservado

Se todos os ângulos são equivalentes...




... nada pode causar uma mudança no estado de rotação.

# Simetrias e leis de conservação

- Matematicamente, uma simetria contínua se expressa através de uma invariância da ação sob uma dada transformação induzida por elementos de uma álgebra de Lie.
- Exemplos simples:

- Invariância sob translações $(x \rightarrow x' = x + \delta x)$:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U_0 \;\Rightarrow\; \ddot{x} = 0 \;\Rightarrow p_x \equiv m\dot{x} = const.$$

- Invariância sob rotações $(\theta \rightarrow \theta' = \theta + \delta\theta)$:

$$L = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} = 0 \;\Rightarrow l_z \equiv mr^2\dot{\theta} = const.$$

# Simetrias e leis de conservação

- A relação entre simetria e leis de conservação também é válida para campos.
- Teorema de Noether (enunciado informal):

> *"Para cada simetria contínua da ação*
> *há uma quantidade conservada."*

# Simetrias e leis de conservação

- Exemplos de simetrias em teorias de campo:

- Translação (no espaço-tempo) $(x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu)$:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(x))(\partial^\mu \varphi(x)) + V[\varphi(x)]\right] \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \ \ (T^{\mu\nu} \text{é } conservado)$$

<u>Obs</u>.: $T^{\mu\nu}$ → Tensor energia-momento.

- Simetria de calibre (simetria interna) $\left(A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu \alpha(x); \psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)\right)$:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi\right) \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (Q_{elétrica} \text{ é } conservada)$$

# Simetrias e leis de conservação

- Em resumo:

**Simetrias ⟷ Leis de conservação**

- Simetrias são os principais guias para a construção de teorias.

Observação experimental de quantidades (“cargas”) conservadas → Teoria com simetria correspondente à carga conservada → Novas previsões teóricas (p.ex., novas partículas “exigidas” pela nova teoria) → Novos testes experimentais

# O Modelo Padrão

- Paradigma de construção de modelos: Modelo Padrão das Partículas Elementares (SM, "Standard Model").

- As operações de simetria do SM são representadas por álgebras de Lie
- Simetria de Lorentz: $SO(3,1)$ ("leis da natureza iguais ∀ refs. inerciais")
- Simetria de calibre $SU(3)$ (interação forte)
- Simetria de calibre $SU(2) \times U(1)$ (interação eletrofraca)

- Simetrias de calibre (gauge) locais → Interações [ver aula J. Borges]

# O Modelo Padrão

- As simetrias restringem os possíveis campos na teoria e suas interações.
- Logo, as simetrias restringem (e sugerem) os tipos possíveis de partículas.
- Lagrangeana do Modelo Padrão

Standard Model Lagrangian (including neutrino mass terms)
From *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, 2nd Edition,*
W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, Cambridge University Press, Cambridge, 2007,
Extracted by J.A. Shifflett, updated from Particle Data Group tables at pdg.lbl.gov, 25 Aug 2013.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}tr(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) && \text{(U(1), SU(2) and SU(3) gauge terms)} \\
& +(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\,\tilde{\sigma}^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix} + \bar{e}_R\sigma^\mu iD_\mu e_R + \bar{\nu}_R\sigma^\mu iD_\mu \nu_R + \text{(h.c.)} && \text{(lepton dynamical term)} \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v}\left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\,\phi M^e e_R + \bar{e}_R \bar{M}^e \bar{\phi}\begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix}\right] && \text{(electron, muon, tauon mass term)} \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v}\left[(-\bar{e}_L, \bar{\nu}_L)\,\phi^* M^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R \bar{M}^\nu \phi^T\begin{pmatrix}-e_L \\ \nu_L\end{pmatrix}\right] && \text{(neutrino mass term)} \\
& +(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\,\tilde{\sigma}^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix} + \bar{u}_R\sigma^\mu iD_\mu u_R + \bar{d}_R\sigma^\mu iD_\mu d_R + \text{(h.c.)} && \text{(quark dynamical term)} \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v}\left[(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\,\phi M^d d_R + \bar{d}_R \bar{M}^d \bar{\phi}\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix}\right] && \text{(down, strange, bottom mass term)} \\
& -\frac{\sqrt{2}}{v}\left[(-\bar{d}_L, \bar{u}_L)\,\phi^* M^u u_R + \bar{u}_R \bar{M}^u \phi^T\begin{pmatrix}-d_L \\ u_L\end{pmatrix}\right] && \text{(up, charmed, top mass term)} \\
& +\overline{(D_\mu\phi)}D^\mu\phi - m_h^2[\bar{\phi}\phi - v^2/2]^2/2v^2. && \text{(Higgs dynamical and mass term)} \quad (1)
\end{aligned}
$$

where (h.c.) means Hermitian conjugate of preceeding terms, $\bar{\psi} = \text{(h.c.)}\psi = \psi^\dagger = \psi^{*T}$, and the derivative operators are

$$D_\mu\begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix} = \left[\partial_\mu - \frac{ig_1}{2}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix}, \quad D_\mu\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix} = \left[\partial_\mu + \frac{ig_1}{6}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]\begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$D_\mu\nu_R = \partial_\mu\nu_R, \quad D_\mu e_R = [\partial_\mu - ig_1 B_\mu]\,e_R, \quad D_\mu u_R = \left[\partial_\mu + \frac{i2g_1}{3}B_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]u_R, \quad D_\mu d_R = \left[\partial_\mu - \frac{ig_1}{3}B_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]d_R, \quad (3)$$

$$D_\mu\phi = \left[\partial_\mu + \frac{ig_1}{2}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\phi. \quad (4)$$

$\phi$ is a 2-component complex Higgs field. Since $\mathcal{L}$ is $SU(2)$ gauge invariant, a gauge can be chosen so $\phi$ has the form

$$\phi^T = (0, v+h)/\sqrt{2}, \qquad <\phi>_0^T = (\text{expectation value of } \phi) = (0, v)/\sqrt{2}, \quad (5)$$

where $v$ is a real constant such that $\mathcal{L}_\phi = \overline{(\partial_\mu\phi)}\partial^\mu\phi - m_h^2[\bar{\phi}\phi - v^2/2]^2/2v^2$ is minimized, and $h$ is a residual Higgs field. $B_\mu$, $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are the gauge boson vector potentials, and $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are composed of $2\times2$ and $3\times3$ traceless Hermitian matrices. Their associated field tensors are

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu + ig_2(\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\mu)/2, \quad \mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{G}_\nu - \partial_\nu\mathbf{G}_\mu + ig(\mathbf{G}_\mu\mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu\mathbf{G}_\mu). \quad (6)$$

The non-matrix $A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm$ bosons are mixtures of $\mathbf{W}_\mu$ and $B_\mu$ components, according to the weak mixing angle $\theta_w$,

$$A_\mu = W_{11\mu} sin\theta_w + B_\mu cos\theta_w, \qquad Z_\mu = W_{11\mu} cos\theta_w - B_\mu sin\theta_w, \quad W_\mu^+ = W_\mu^{-*} = W_{12\mu}/\sqrt{2}, \quad (7)$$

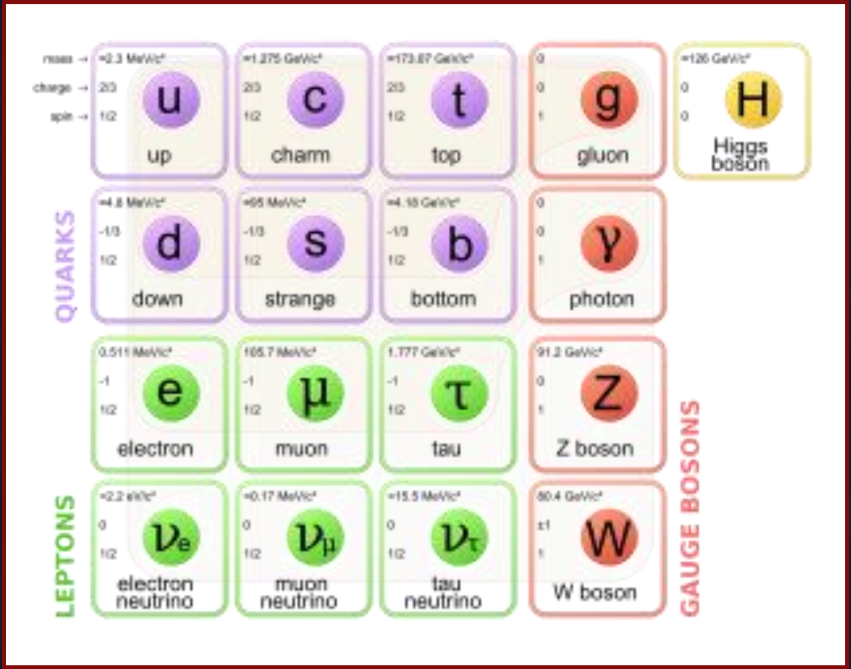
$$B_\mu = A_\mu cos\theta_w - Z_\mu sin\theta_w, \quad W_{11\mu} = -W_{22\mu} = A_\mu sin\theta_w + Z_\mu cos\theta_w, \quad W_{12\mu} = W_{21\mu}^* = \sqrt{2}\,W_\mu^+, \quad sin^2\theta_w = .2315(4). \quad (8)$$

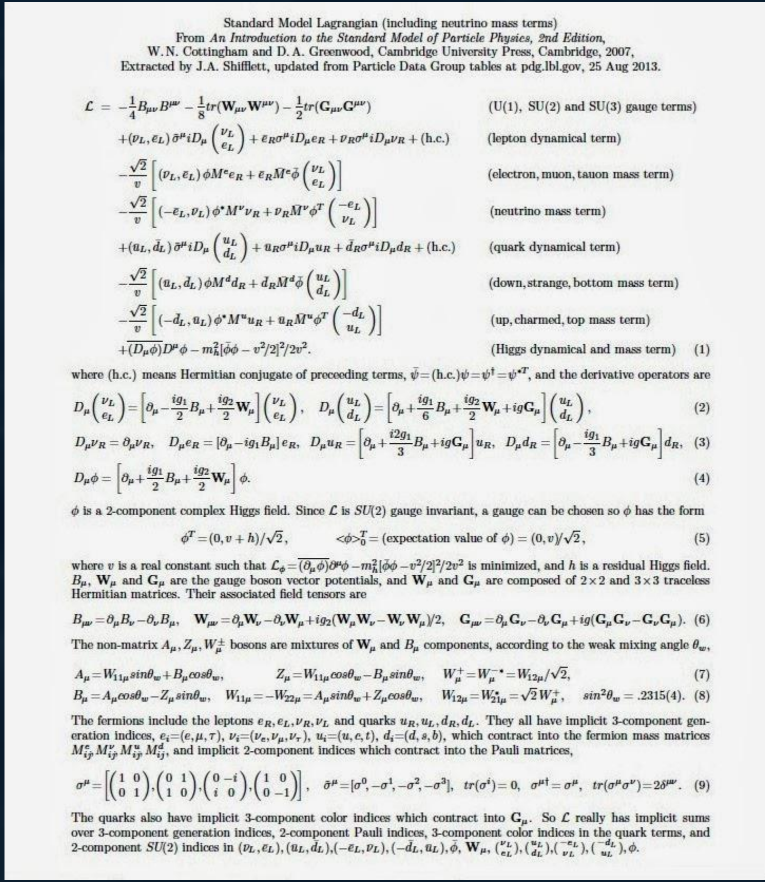
The fermions include the leptons $e_R, e_L, \nu_R, \nu_L$ and quarks $u_R, u_L, d_R, d_L$. They all have implicit 3-component generation indices, $e_i = (e, \mu, \tau)$, $\nu_i = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, $u_i = (u, c, t)$, $d_i = (d, s, b)$, which contract into the fermion mass matrices $M_{ij}^e, M_{ij}^\nu, M_{ij}^u, M_{ij}^d$, and implicit 2-component indices which contract into the Pauli matrices,

$$\sigma^\mu = \left[\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right], \quad \tilde{\sigma}^\mu = [\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3], \quad tr(\sigma^i) = 0, \quad \sigma^{\mu\dagger} = \sigma^\mu, \quad tr(\sigma^\mu\sigma^\nu) = 2\delta^{\mu\nu}. \quad (9)$$

The quarks also have implicit 3-component color indices which contract into $\mathbf{G}_\mu$. So $\mathcal{L}$ really has implicit sums over 3-component generation indices, 2-component Pauli indices, 3-component color indices in the quark terms, and 2-component $SU(2)$ indices in $(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L), (\bar{u}_L, \bar{d}_L), (-\bar{e}_L, \bar{\nu}_L), (-\bar{d}_L, \bar{u}_L), \bar{\phi}$, $\mathbf{W}_\mu$, $\binom{\nu_L}{e_L}, \binom{u_L}{d_L}, \binom{-e_L}{\nu_L}, \binom{-d_L}{u_L}, \phi$.

# O Modelo Padrão



Standard Model Lagrangian (including neutrino mass terms)
From *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, 2nd Edition,*
W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, Cambridge University Press, Cambridge, 2007,
Extracted by J.A. Shifflett, updated from Particle Data Group tables at pdg.lbl.gov, 25 Aug 2013.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}tr(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) && \text{(U(1), SU(2) and SU(3) gauge terms)}\\
&+(\bar\nu_L,\bar e_L)\,\tilde\sigma^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} + \bar e_R\sigma^\mu iD_\mu e_R + \bar\nu_R\sigma^\mu iD_\mu \nu_R + \text{(h.c.)} && \text{(lepton dynamical term)}\\
&-\frac{\sqrt2}{v}\left[(\bar\nu_L,\bar e_L)\,\phi M^e e_R + \bar e_R \bar M^e \bar\phi \begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}\right] && \text{(electron, muon, tauon mass term)}\\
&-\frac{\sqrt2}{v}\left[(-\bar e_L,\bar\nu_L)\,\phi^* M^\nu \nu_R + \bar\nu_R \bar M^\nu \phi^T \begin{pmatrix}-e_L\\ \nu_L\end{pmatrix}\right] && \text{(neutrino mass term)}\\
&+(\bar u_L,\bar d_L)\,\tilde\sigma^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} + \bar u_R\sigma^\mu iD_\mu u_R + \bar d_R\sigma^\mu iD_\mu d_R + \text{(h.c.)} && \text{(quark dynamical term)}\\
&-\frac{\sqrt2}{v}\left[(\bar u_L,\bar d_L)\,\phi M^d d_R + \bar d_R \bar M^d \bar\phi \begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}\right] && \text{(down, strange, bottom mass term)}\\
&-\frac{\sqrt2}{v}\left[(-\bar d_L,\bar u_L)\,\phi^* M^u u_R + \bar u_R \bar M^u \phi^T \begin{pmatrix}-d_L\\ u_L\end{pmatrix}\right] && \text{(up, charmed, top mass term)}\\
&+\overline{(D_\mu\phi)}D^\mu\phi - m_h^2[\bar\phi\phi - v^2/2]^2/2v^2. && \text{(Higgs dynamical and mass term)} \quad (1)
\end{aligned}
$$

where (h.c.) means Hermitian conjugate of preceeding terms, $\bar\psi=\text{(h.c.)}\psi=\psi^\dagger=\psi^{*T}$, and the derivative operators are

$$D_\mu\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}=\left[\partial_\mu-\frac{ig_1}{2}B_\mu+\frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix},\quad D_\mu\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}=\left[\partial_\mu+\frac{ig_1}{6}B_\mu+\frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu+ig\mathbf{G}_\mu\right]\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$D_\mu\nu_R=\partial_\mu\nu_R,\quad D_\mu e_R=[\partial_\mu-ig_1B_\mu]\,e_R,\quad D_\mu u_R=\left[\partial_\mu+\frac{i2g_1}{3}B_\mu+ig\mathbf{G}_\mu\right]u_R,\quad D_\mu d_R=\left[\partial_\mu-\frac{ig_1}{3}B_\mu+ig\mathbf{G}_\mu\right]d_R, \quad (3)$$

$$D_\mu\phi=\left[\partial_\mu+\frac{ig_1}{2}B_\mu+\frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\phi. \quad (4)$$

$\phi$ is a 2-component complex Higgs field. Since $\mathcal{L}$ is $SU(2)$ gauge invariant, a gauge can be chosen so $\phi$ has the form

$$\phi^T=(0,v+h)/\sqrt2,\qquad <\phi>_0^T=(\text{expectation value of }\phi)=(0,v)/\sqrt2, \quad (5)$$

where $v$ is a real constant such that $\mathcal{L}_\phi=\overline{(\partial_\mu\phi)}\partial^\mu\phi-m_h^2[\bar\phi\phi-v^2/2]^2/2v^2$ is minimized, and $h$ is a residual Higgs field. $B_\mu$, $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are the gauge boson vector potentials, and $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are composed of $2\times2$ and $3\times3$ traceless Hermitian matrices. Their associated field tensors are

$$B_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu,\quad \mathbf{W}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathbf{W}_\nu-\partial_\nu\mathbf{W}_\mu+ig_2(\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}_\nu-\mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\mu)/2,\quad \mathbf{G}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathbf{G}_\nu-\partial_\nu\mathbf{G}_\mu+ig(\mathbf{G}_\mu\mathbf{G}_\nu-\mathbf{G}_\nu\mathbf{G}_\mu). \quad (6)$$

The non-matrix $A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm$ bosons are mixtures of $\mathbf{W}_\mu$ and $B_\mu$ components, according to the weak mixing angle $\theta_w$,

$$A_\mu=W_{11\mu}sin\theta_w+B_\mu cos\theta_w,\qquad Z_\mu=W_{11\mu}cos\theta_w-B_\mu sin\theta_w,\quad W_\mu^+=W_\mu^{-*}=W_{12\mu}/\sqrt2, \quad (7)$$

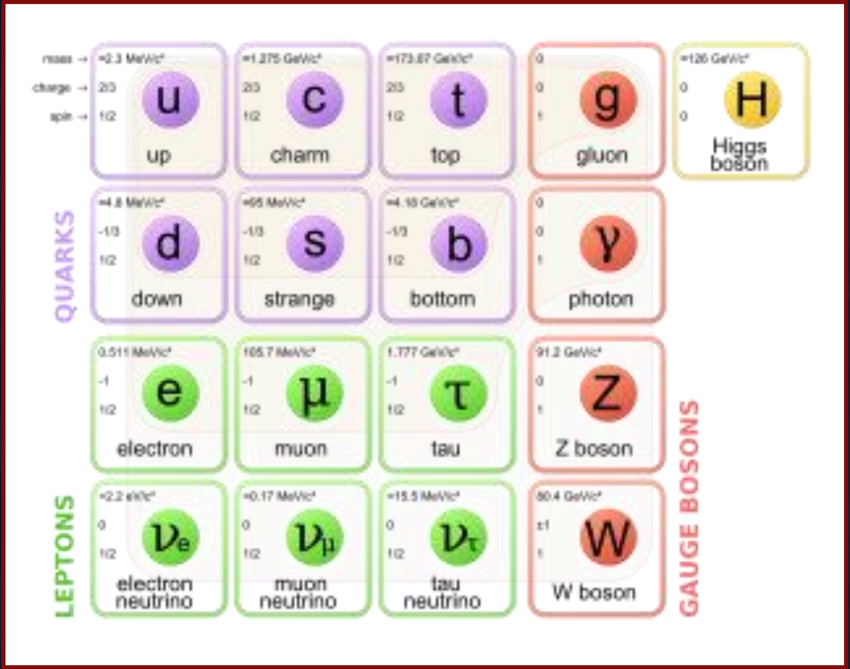
$$B_\mu=A_\mu cos\theta_w-Z_\mu sin\theta_w,\quad W_{11\mu}=-W_{22\mu}=A_\mu sin\theta_w+Z_\mu cos\theta_w,\quad W_{12\mu}=W_{21\mu}^*=\sqrt2\,W_\mu^+,\quad sin^2\theta_w=.2315(4). \quad (8)$$

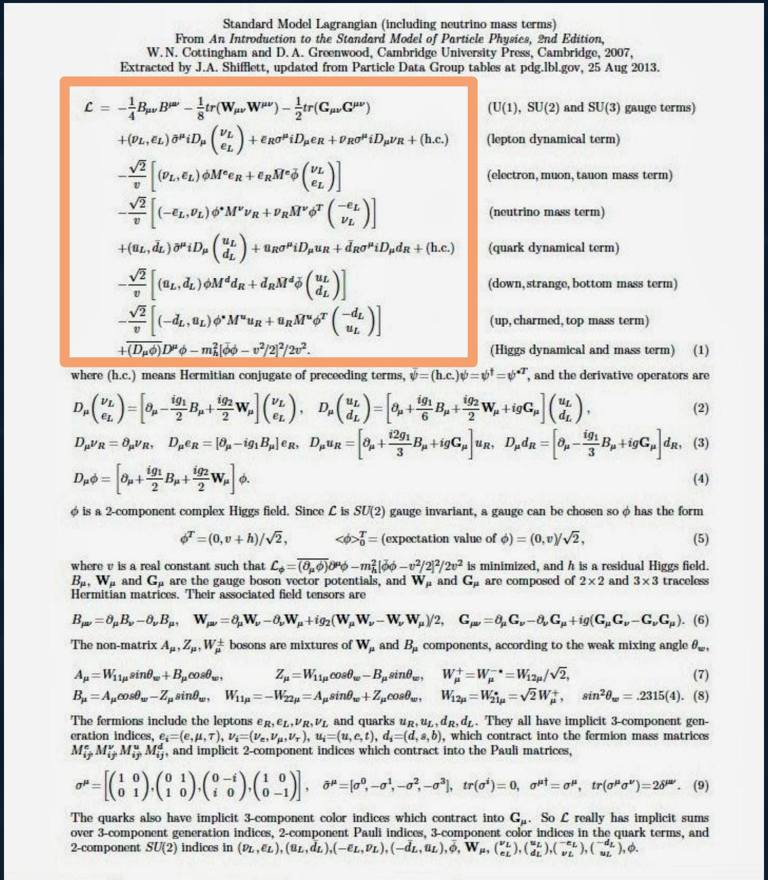
The fermions include the leptons $e_R, e_L, \nu_R, \nu_L$ and quarks $u_R, u_L, d_R, d_L$. They all have implicit 3-component generation indices, $e_i=(e,\mu,\tau)$, $\nu_i=(\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau)$, $u_i=(u,c,t)$, $d_i=(d,s,b)$, which contract into the fermion mass matrices $M_{ij}^e, M_{ij}^\nu, M_{ij}^u, M_{ij}^d$, and implicit 2-component indices which contract into the Pauli matrices,

$$\sigma^\mu=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right],\quad \tilde\sigma^\mu=[\sigma^0,-\sigma^1,-\sigma^2,-\sigma^3],\quad tr(\sigma^i)=0,\quad \sigma^{\mu\dagger}=\sigma^\mu,\quad tr(\sigma^\mu\sigma^\nu)=2\delta^{\mu\nu}. \quad (9)$$

The quarks also have implicit 3-component color indices which contract into $\mathbf{G}_\mu$. So $\mathcal{L}$ really has implicit sums over 3-component generation indices, 2-component Pauli indices, 3-component color indices in the quark terms, and 2-component $SU(2)$ indices in $(\bar\nu_L,\bar e_L)$, $(\bar u_L,\bar d_L)$, $(-\bar e_L,\bar\nu_L)$, $(-\bar d_L,\bar u_L)$, $\bar\phi$, $\mathbf{W}_\mu$, $\binom{\nu_L}{e_L}$, $\binom{u_L}{d_L}$, $\binom{-e_L}{\nu_L}$, $\binom{-d_L}{u_L}$, $\phi$.

# O Modelo Padrão



Standard Model Lagrangian (including neutrino mass terms)
From *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, 2nd Edition*,
W. N. Cottingham and D. A. Greenwood, Cambridge University Press, Cambridge, 2007,
Extracted by J.A. Shifflett, updated from Particle Data Group tables at pdg.lbl.gov, 25 Aug 2013.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}tr(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) && \text{(U(1), SU(2) and SU(3) gauge terms)}\\
& +(\bar\nu_L,\bar e_L)\,\tilde\sigma^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} + \bar e_R\sigma^\mu iD_\mu e_R + \bar\nu_R\sigma^\mu iD_\mu \nu_R + \text{(h.c.)} && \text{(lepton dynamical term)}\\
& -\frac{\sqrt2}{v}\left[(\bar\nu_L,\bar e_L)\,\phi M^e e_R + \bar e_R \bar M^e \bar\phi \begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}\right] && \text{(electron, muon, tauon mass term)}\\
& -\frac{\sqrt2}{v}\left[(-\bar e_L,\bar\nu_L)\,\phi^* M^\nu \nu_R + \bar\nu_R \bar M^\nu \phi^T \begin{pmatrix}-e_L\\ \nu_L\end{pmatrix}\right] && \text{(neutrino mass term)}\\
& +(\bar u_L,\bar d_L)\,\tilde\sigma^\mu iD_\mu \begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} + \bar u_R\sigma^\mu iD_\mu u_R + \bar d_R\sigma^\mu iD_\mu d_R + \text{(h.c.)} && \text{(quark dynamical term)}\\
& -\frac{\sqrt2}{v}\left[(\bar u_L,\bar d_L)\,\phi M^d d_R + \bar d_R \bar M^d \bar\phi \begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}\right] && \text{(down, strange, bottom mass term)}\\
& -\frac{\sqrt2}{v}\left[(-\bar d_L,\bar u_L)\,\phi^* M^u u_R + \bar u_R \bar M^u \phi^T \begin{pmatrix}-d_L\\ u_L\end{pmatrix}\right] && \text{(up, charmed, top mass term)}\\
& +\overline{(D_\mu\phi)}D^\mu\phi - m_h^2[\bar\phi\phi - v^2/2]^2/2v^2. && \text{(Higgs dynamical and mass term)} \quad (1)
\end{aligned}
$$

where (h.c.) means Hermitian conjugate of preceeding terms, $\bar\psi = \text{(h.c.)}\psi = \psi^\dagger = \psi^{*T}$, and the derivative operators are

$$D_\mu\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} = \left[\partial_\mu - \frac{ig_1}{2}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix},\quad D_\mu\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix} = \left[\partial_\mu + \frac{ig_1}{6}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]\begin{pmatrix}u_L\\ d_L\end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$D_\mu\nu_R = \partial_\mu\nu_R,\quad D_\mu e_R = [\partial_\mu - ig_1B_\mu]\,e_R,\quad D_\mu u_R = \left[\partial_\mu + \frac{i2g_1}{3}B_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]u_R,\quad D_\mu d_R = \left[\partial_\mu - \frac{ig_1}{3}B_\mu + ig\mathbf{G}_\mu\right]d_R, \tag{3}$$

$$D_\mu\phi = \left[\partial_\mu + \frac{ig_1}{2}B_\mu + \frac{ig_2}{2}\mathbf{W}_\mu\right]\phi. \tag{4}$$

$\phi$ is a 2-component complex Higgs field. Since $\mathcal{L}$ is $SU(2)$ gauge invariant, a gauge can be chosen so $\phi$ has the form

$$\phi^T = (0, v+h)/\sqrt2, \qquad <\phi>_0^T = (\text{expectation value of } \phi) = (0,v)/\sqrt2, \tag{5}$$

where $v$ is a real constant such that $\mathcal{L}_\phi = \overline{(\partial_\mu\phi)}\partial^\mu\phi - m_h^2[\bar\phi\phi - v^2/2]^2/2v^2$ is minimized, and $h$ is a residual Higgs field. $B_\mu$, $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are the gauge boson vector potentials, and $\mathbf{W}_\mu$ and $\mathbf{G}_\mu$ are composed of $2\times2$ and $3\times3$ traceless Hermitian matrices. Their associated field tensors are

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,\quad \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{W}_\nu - \partial_\nu\mathbf{W}_\mu + ig_2(\mathbf{W}_\mu\mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}_\nu\mathbf{W}_\mu)/2,\quad \mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{G}_\nu - \partial_\nu\mathbf{G}_\mu + ig(\mathbf{G}_\mu\mathbf{G}_\nu - \mathbf{G}_\nu\mathbf{G}_\mu). \tag{6}$$

The non-matrix $A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm$ bosons are mixtures of $\mathbf{W}_\mu$ and $B_\mu$ components, according to the weak mixing angle $\theta_w$,

$$A_\mu = W_{11\mu}sin\theta_w + B_\mu cos\theta_w,\qquad Z_\mu = W_{11\mu}cos\theta_w - B_\mu sin\theta_w,\quad W_\mu^+ = W_\mu^{-*} = W_{12\mu}/\sqrt2, \tag{7}$$

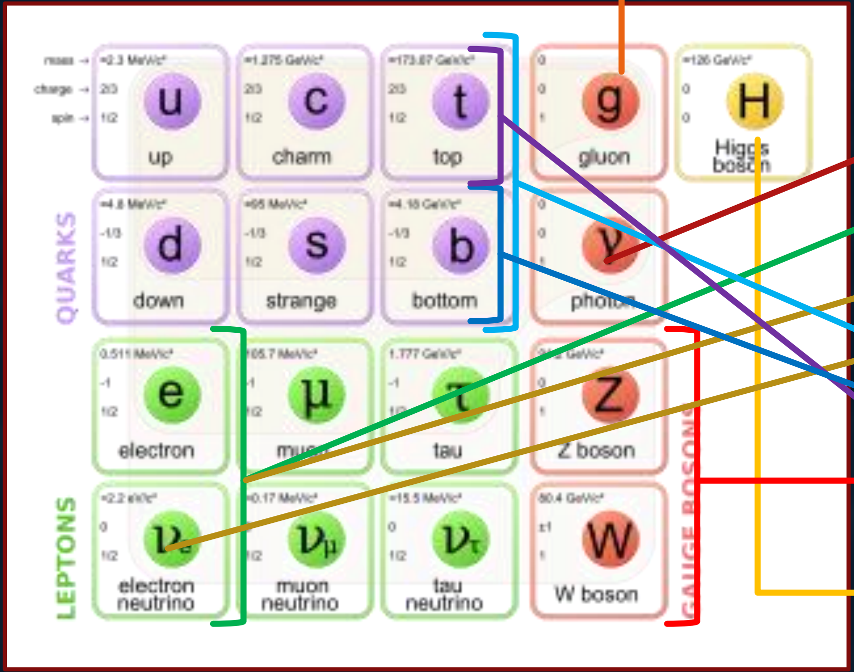
$$B_\mu = A_\mu cos\theta_w - Z_\mu sin\theta_w,\quad W_{11\mu} = -W_{22\mu} = A_\mu sin\theta_w + Z_\mu cos\theta_w,\quad W_{12\mu} = W_{21\mu}^* = \sqrt2\,W_\mu^+,\quad sin^2\theta_w = .2315(4). \tag{8}$$

The fermions include the leptons $e_R, e_L, \nu_R, \nu_L$ and quarks $u_R, u_L, d_R, d_L$. They all have implicit 3-component generation indices, $e_i = (e,\mu,\tau)$, $\nu_i = (\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau)$, $u_i = (u,c,t)$, $d_i = (d,s,b)$, which contract into the fermion mass matrices $M_{ij}^e, M_{ij}^\nu, M_{ij}^u, M_{ij}^d$, and implicit 2-component indices which contract into the Pauli matrices,

$$\sigma^\mu = \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right],\quad \tilde\sigma^\mu = [\sigma^0,-\sigma^1,-\sigma^2,-\sigma^3],\quad tr(\sigma^i) = 0,\quad \sigma^{\mu\dagger} = \sigma^\mu,\quad tr(\sigma^\mu\sigma^\nu) = 2\delta^{\mu\nu}. \tag{9}$$

The quarks also have implicit 3-component color indices which contract into $\mathbf{G}_\mu$. So $\mathcal{L}$ really has implicit sums over 3-component generation indices, 2-component Pauli indices, 3-component color indices in the quark terms, and 2-component $SU(2)$ indices in $(\bar\nu_L,\bar e_L)$, $(\bar u_L,\bar d_L)$, $(-\bar e_L,\bar\nu_L)$, $(-\bar d_L,\bar u_L)$, $\bar\phi$, $\mathbf{W}_\mu$, $\binom{\nu_L}{e_L}$, $\binom{u_L}{d_L}$, $\binom{-e_L}{\nu_L}$, $\binom{-d_L}{u_L}$, $\phi$.

# O Modelo Padrão




$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{8}tr(\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}tr(\mathbf{G}_{\mu\nu}\mathbf{G}^{\mu\nu}) \\
& + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\,\tilde{\sigma}^\mu i D_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R \sigma^\mu i D_\mu e_R + \bar{\nu}_R \sigma^\mu i D_\mu \nu_R + (\text{h.c.}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{v}\left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\,\phi M^e e_R + \bar{e}_R \bar{M}^e \bar{\phi} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}\right] \\
& - \frac{\sqrt{2}}{v}\left[(-\bar{e}_L, \bar{\nu}_L)\,\phi^* M^\nu \nu_R + \bar{\nu}_R \bar{M}^\nu \phi^T \begin{pmatrix} -e_L \\ \nu_L \end{pmatrix}\right] \\
& + (\bar{u}_L, \bar{d}_L)\,\tilde{\sigma}^\mu i D_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} + \bar{u}_R \sigma^\mu i D_\mu u_R + \bar{d}_R \sigma^\mu i D_\mu d_R + (\text{h.c.}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{v}\left[(\bar{u}_L, \bar{d}_L)\,\phi M^d d_R + \bar{d}_R \bar{M}^d \bar{\phi} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}\right] \\
& - \frac{\sqrt{2}}{v}\left[(-\bar{d}_L, \bar{u}_L)\,\phi^* M^u u_R + \bar{u}_R \bar{M}^u \phi^T \begin{pmatrix} -d_L \\ u_L \end{pmatrix}\right] \\
& + \overline{(D_\mu \phi)} D^\mu \phi - m_h^2[\bar{\phi}\phi - v^2/2]^2/2v^2.
\end{aligned}
$$

# Na próxima aula

- Interações fortes e o problema do confinamento
- Teorias efetivas para as interações fortes
- Teoria de campos a temperatura finita

# MATERIAL EXTRA

# Unidades naturais

- Muito utilizadas em TQC (e versões análogas são usadas em outras áreas. Ex.: gravitação, mec. estatística, ...).

$$\hbar = c = 1$$

- Ex. 1: $c = \lambda f \quad \Rightarrow^{(c=1)} \quad \lambda' = 1/f'$

$$\lambda' = \lambda; \quad f' = \frac{f}{c}; \quad [\lambda] = [\lambda'] = L; \quad [f'] = L^{-1}$$

$$f = 30MHz; \quad f' = 0{,}1m^{-1}; \quad \lambda = 10\ m$$

# Unidades naturais

Ex. 2: $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad \Rightarrow^{(\hbar=1)} \quad p' = \frac{2\pi}{\lambda'} = k' = k$

$$[p'] = [\lambda']^{-1} = L^{-1}$$

$$p = 2{,}1 \times 10^{-20} kg \cdot ms^{-1}; \quad p' = \frac{p}{\hbar} \simeq 2 \times 10^{14} m^{-1}$$

Ex. 3: $m = \frac{E}{c^2} \quad \Rightarrow^{(c=1)} \quad m' = E'$

$$[E'] = [m'] = [E]$$

$$E = 10\ MeV; \quad m' = 10 MeV \quad \Rightarrow \quad m \simeq$$

# Unidades naturais

Ex. 4: Parâmetro de massa

$$\mathcal{L}[\varphi,\partial_\mu\varphi]=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\tilde{m}^2}{2}\varphi^2$$

$$[\mathcal{L}]=\frac{E}{L^3};\quad [\varphi]=\sqrt{\frac{M\cdot L}{T^2}};\quad [\tilde{m}]=\frac{1}{L}$$

$$m:=\frac{\hbar\tilde{m}}{c};\qquad [m]=M\quad (massa)$$

# Exercício