

Первичные флуктуации плотности энергии как причина анизотропии эксцентриситета области перекрытия ядер

Primordial fluctuations as the source of eccentricity anisotropy in heavy-ion collisions

(Предварительные вычисления, повторение результатов arXiv:1907.10948,
и предложения дальнейших исследований)

В.Л. Коротких

- [1] F. Gelis, G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1907.10948>
Primordial fluctuations in heavy-ion collisions
- [2]. G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1902.07168>
New paradigm for fluctuations in heavy-ion collisions
- [3]. J. L. Albacete et al., <http://arxiv.org/abs/1808.007954>
Initial correlations of the Glasma energy-momentum tensor

Введение

1. Это сообщение является продолжением моего доклада 31 мая 2019 г.

Связь флуктуаций эксцентриситета с флуктуациями плотности потока энергии

(<https://indico.cern.ch/event/825099/>)

по предыдущей публикации тех же авторов G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1902.07168>

New paradigm for fluctuations in heavy-ion collisions

2. Авторы новой работы [1] продолжили разработку своего подхода и предложили

Монте-Карловскую модель флуктуаций начальной плотности энергии в столкновении тяжёлых ионов

Получено хорошее описание данных 5.02 ТэВ Pb+Pb для $v_2\{2\}$, $v_2\{4\}$ и $v\{3\}$ гармоник с 3-мя свободными параметрами k_2 , k_3 , and Q_{s0} .

[1] F. Gelis, G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1907.10948>

Primordial fluctuations in heavy-ion collision

Актуальность

--- философия дуализма

1. Идея гранул, капель (droplet) давно обсуждается в литературе, особенно после измерения гармоник в столкновениях несимметричных ионов на PHENIX (Nature Physics, 2018) (см. также, проявление пиков плотности энергии в модели AMPT)

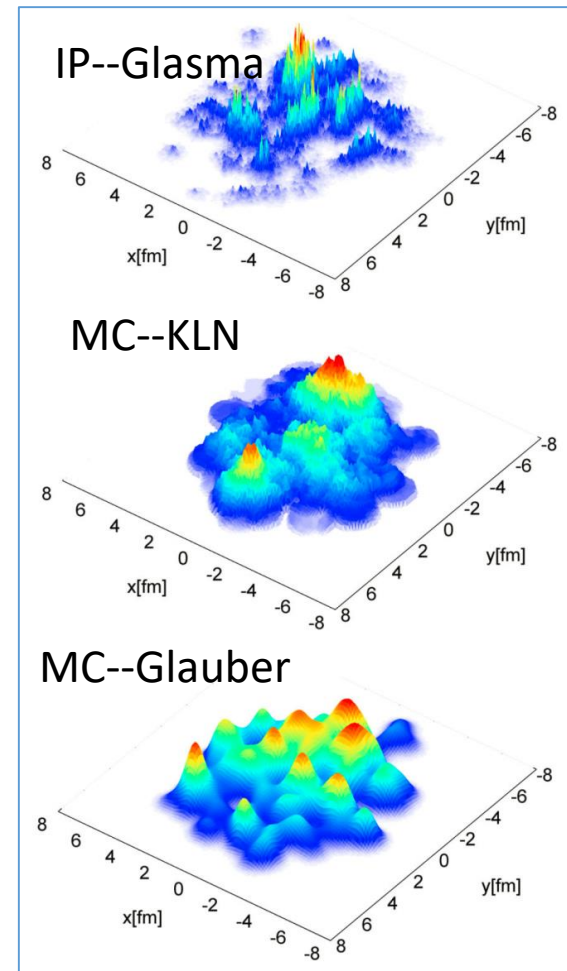
2. Описание гармонического потока с использованием первых принципов в подходе «Цветной стеклянный конденсат» (CGC) является актуальной задачей.

3. Предложенная MC модель точечных флуктуаций плотности энергии проста в реализации и может быть применена для ряда задач, например, для мало-нуклонных систем pPb, dAu, He³Au и для задач NICA

4. Полученную форму зависимости плотности энергии (или значения эксцентриситета) возможно использовать как входные начальные распределения в гидродинамических моделях, например, в HYDJET++.

5. Актуально использовать модель для анализа событийных событий CMS данных.

6. Можно попытаться объяснить неописанные нестандартные соотношения гармоник v_2 и v_3 для ультра центральных столкновений 0 – 0.2 %.



Идея модели

При ультрарелятивистских энергиях плотность энергии может быть определена из первых принципов в подходе «Цветной стекланный конденсат» (CGC) . Слабосвязанная КХД может быть использована в качестве «входа» для модельного описания непертурбативного явления такого, как коллективный поток . Пособытийные **флуктуации плотности энергии** существенны для феноменологии конечного состояния . Их величина и форма характеризуются двух точечной функцией плотности поля, которая была недавно получена аналитически в подходе CGC .

В этой статье предлагается простая модель «магма» пособытийных флуктуации плотности энергии которая использует результаты CGC.

Плотность энергии моделируется как сумма вкладов исходя из элементарных столкновений между локализованными партонами и гладким однородным ядром. Каждое взаимодействие создает очень узкий источник плотности энергии, уменьшающийся на больших расстояниях как $1/r^2$ аналогично двумерному кулоновскому полю точечного заряда.

Плотность энергии вычисляется как **сумма элементарных взаимодействий между локализованным цветовым зарядом и плотностью ядра**. Каждое элементарное столкновение дает источник плотности энергии, которая не зависит от быстроты и уменьшается с поперечным расстоянием r от точки взаимодействия.

Демонстрация модели на примере одного события

Предполагается, что в данном событии налетающее ядро содержит источники, как уже эффективно существующие в случайно разбросанных точках \vec{s}_j в этом ядре. И что плотность энергии $\rho(\vec{r}) = \rho(x, y)$ после столкновения является суперпозицией вкладов отдельных источников из обоих ядер.

Профиль источников $\Delta_{A/B}(\vec{r})$ в ядре A/B выбран авторами [1] в виде, удовлетворяющим 2-х частичным коротко-действующим корреляциям подхода CGC.

$$\rho_{AB}(\vec{r}, b) = \left(\sum_{j \in A} Q_B^2(\vec{s}_{A,j}, b) \Delta_A(\vec{r} - \vec{s}_{A,j}, b) + \sum_{j \in B} Q_A^2(\vec{s}_{B,j}, b) \Delta_B(\vec{r} - \vec{s}_{B,j}, b) \right)$$

$$\Delta_A(\vec{r} - \vec{s}) = \begin{cases} \frac{8}{g^2 N_c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2 + Q_A^{-2}}, & |\vec{r} - \vec{s}| < 1/m \\ 0, & |\vec{r} - \vec{s}| > 1/m \end{cases}$$

Здесь g – константа сильного взаимодействия, N_c – цветов

Параметры модели [1]

$$Q_{s0} = 1.24 \text{ GeV}$$

$$g^2 = \pi, \text{ что соответствует } \alpha_s = 0.25$$

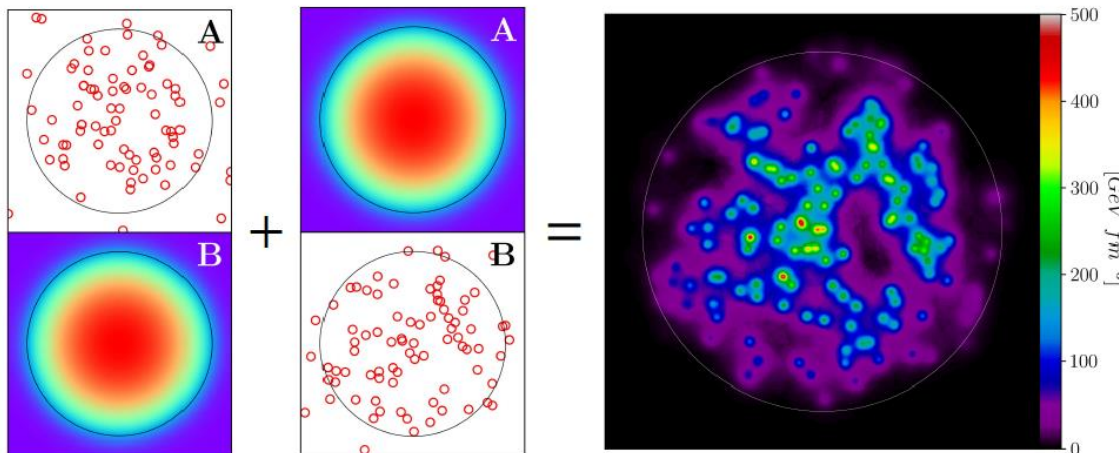
$$m = 0.14 \text{ GeV}$$

$$R(\text{Pb}) = 6.62 \text{ fm}$$

Для центральных столкновений авторы получили в центре столкновения среднюю плотность

$$\langle \rho(0) \rangle = 131 \text{ GeV/fm}^3$$

(произведение импульса насыщения одного ядра и случайной функции от расположения точек энергии другого ядра)



Импульс насыщения в столкновении тяжёлых ионов

Функция $Q_A^2(\vec{s}_j) = Q_{s0}^2 \cdot T_A(\vec{s}_j, b) / T_A(0,0)$ – импульс насыщения в точке источника $\vec{s}_j = (x_j, y_j)$, Q_{s0}^2 – свободный параметр

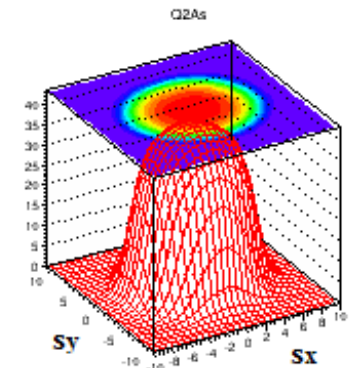
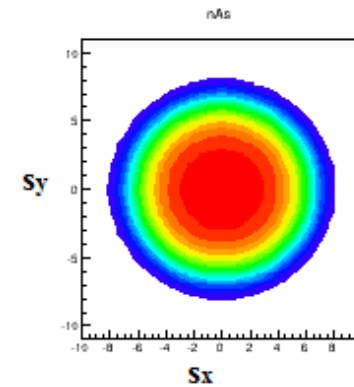
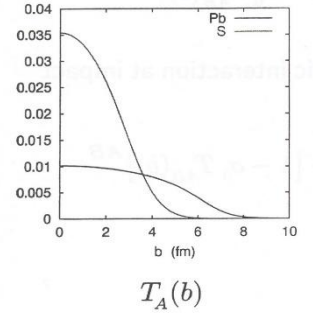
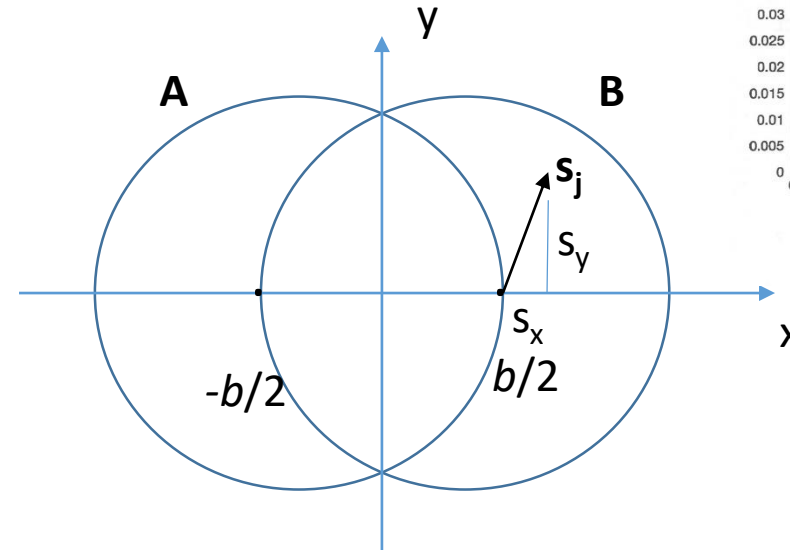
Однородное распределение импульса насыщения в каждом ядре плавно зависит от расстояния до центра ядра с максимумом Q_{s0}^2 в центре

$$Q_A^2(\vec{s}, b) = Q_{s0}^2 \cdot T_A(s_x - \frac{b}{2}, s_y) / T_A(-\frac{b}{2}, 0),$$

$$Q_B^2(\vec{s}, b) = Q_{s0}^2 \cdot T_B(s_x + \frac{b}{2}, s_y) / T_B(\frac{b}{2}, 0),$$

$$T_A(\vec{s}) = T_A(s_x, s_y) = \int dz \rho_A(s_x, s_y, z) = \int dz \rho_F(\sqrt{s^2 + z^2}),$$

$$\rho_F(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp((r-R)/d)}, \quad \rho_0 = \frac{1}{4/3\pi R^3} \frac{1}{1 + (\pi d/R)^2}$$



Эксцентриситет

До настоящего времени в моделях использовалась плотность нуклонов $\rho_{AB}(\mathbf{r})$ в области перекрытия

$$\vec{\varepsilon}_n = \varepsilon_{n,x} + i \varepsilon_{n,y} = \frac{1}{\int d\vec{r} r^n \rho(\vec{r})} \left\{ \int r dr d\phi [\cos(n\phi)] r^n \rho(\vec{r}) + i \int r dr d\phi [\sin(n\phi)] r^n \rho(\vec{r}) \right\};$$

$$(x+iy)^n = (r e^{i\phi})^n = r^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] \quad , \quad (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + ixy, \quad (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 - 3i(x^2y + xy^2)$$

$$\text{Re} \varepsilon_{2,x}(b) = \frac{\int dx dy x^2 \rho(x, y, b)}{\int dx dy (x^2 + y^2) \rho(x, y, b)};$$

$$\text{Re} \varepsilon_{2,y}(b) = \frac{\int dx dy y^2 \rho(x, y, b)}{\int dx dy (x^2 + y^2) \rho(x, y, b)};$$

$$\varepsilon_2(b) = \frac{\langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle + \langle x^2 \rangle}$$

$$\rho_{AB}(\vec{s}, b) = T_A\left(s_x - \frac{b}{2}, s_y\right) T_B\left(s_x + \frac{b}{2}, s_y\right) \quad (2)$$

Отношения, определяющие эксцентриситет, не зависят от $8/(g^2 N_c)$, входящего в $\Delta_{A/B}(r - s_j)$!!!!

Предлагается использовать плотность энергии $\rho_{AB}(\mathbf{r})$, выделившейся за счёт взаимодействия глюонов налетающего ядра с однородной средой встречного ядра

Профиль плотности энергии от источника и параметры

Профиль источника в ядре A/B источников в ядре A/B выбран авторами [1] в виде, удовлетворяющем 2-х частичным коротко-действующим корреляциям подхода CGC J. L. Albacete [3]

$$\Delta_A(\vec{r}-\vec{s}_{A,j}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{g^2 N_c} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}_{A,j}|^2 + Q_A^{-2}(\vec{r}, b)}, \quad |\vec{r}-\vec{s}_{A,j}| < 1/m \\ 0, \quad |\vec{r}-\vec{s}_{A,j}| > 1/m \end{array} \right\}$$

Каждое взаимодействие создает очень узкий источник плотности энергии, уменьшающаяся от точки источника как $1/r^2$ аналогично двумерному кулоновскому полю точечного заряда. Обрезание $|\mathbf{r} - \mathbf{s}_j| < 1/m$ - следствие короткодействующих корреляций двухточечной функции плотности энергии $S(s_1, s_2)$ модели CGC [2]. При этом в данной работе расхождение за счёт инфракрасного обрезания убирается через параметр m порядка массы пиона.

Размерность профиля $[\text{GeV}^2] = [\text{fm}^{-2}]$. Поэтому размерность плотности энергии $[\rho(r)] = [Q^2] \cdot [\Delta]$ равна $[\text{GeV}^2 \cdot \text{fm}^{-2}] = [\text{GeV} \cdot \text{fm}^{-3}]$, т.е. это энергия на единицу объёма.

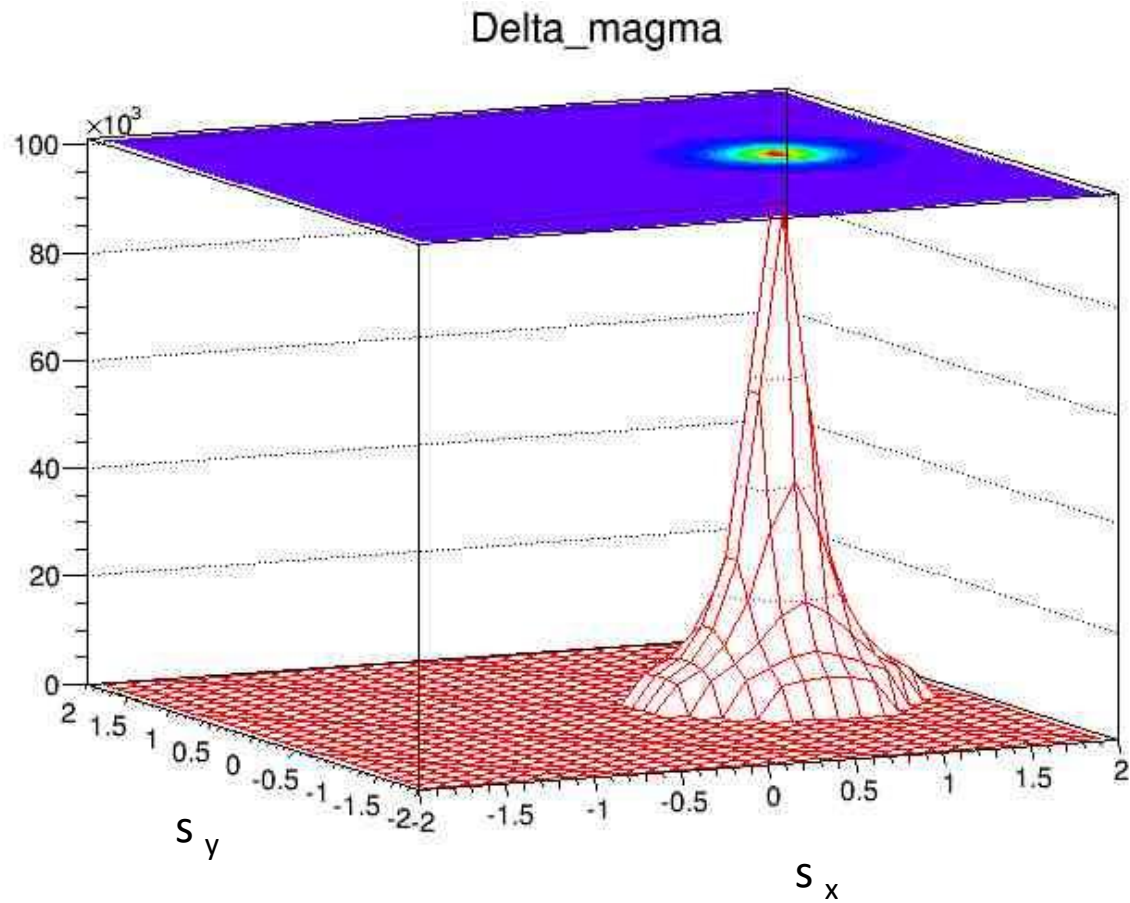
Параметры модели [1]

$Q_{s0} = 1.24 \text{ GeV}$ $g^2 = \pi$, что соответствует $\alpha_s = 0.25$

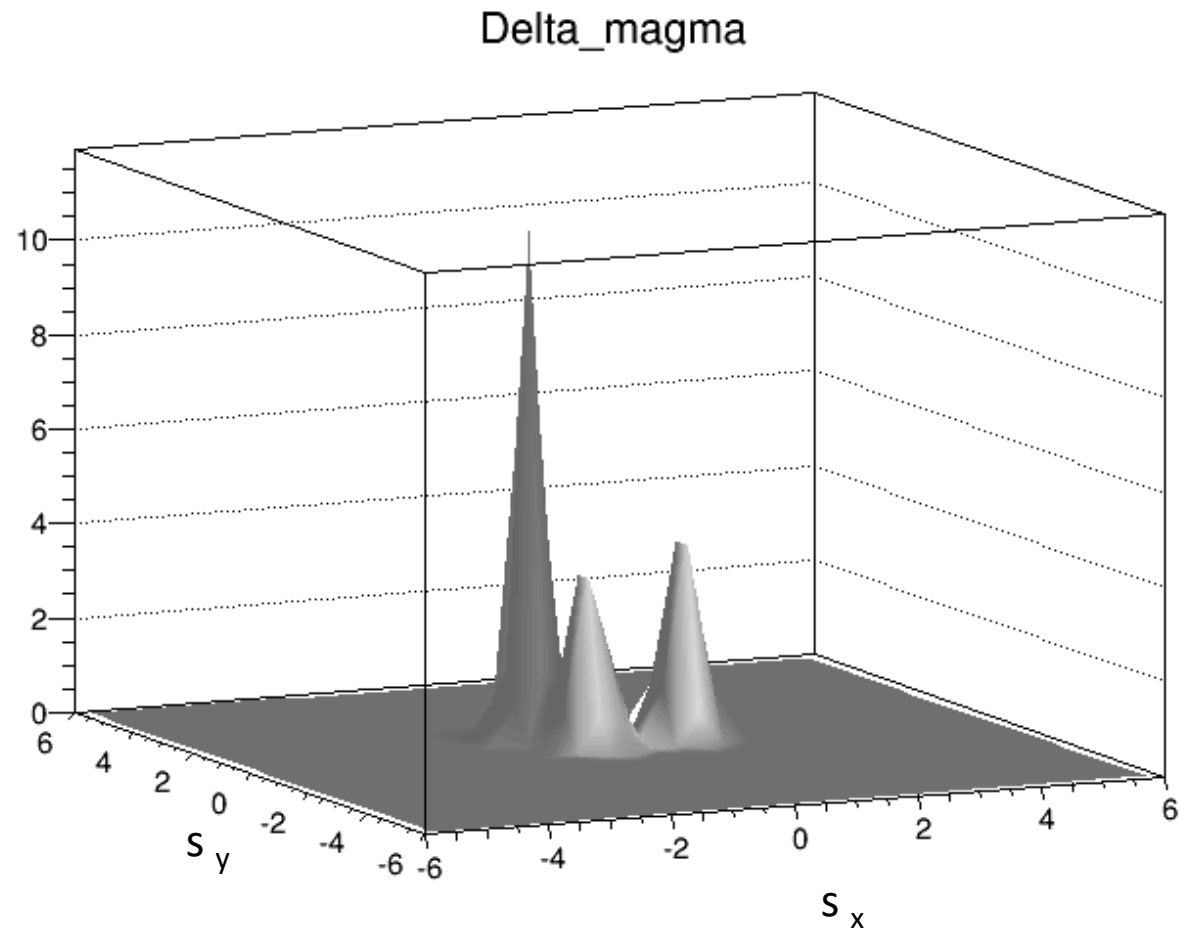
$m = 0.14 \text{ GeV}$ $R(\text{Pb}) = 6.62 \text{ fm}$

Для центральных столкновений авторы [1] получили в центре столкновения среднюю плотность $\langle \rho(0) \rangle = 131 \text{ GeV/fm}^3$

Профиль энергии от источника $\Delta_A(\mathbf{r}-\mathbf{s}_j)$ в ядре A



Один источник



Три источника

Процедура пособытийного вычисления плотности энергии $\rho(\mathbf{r})$

1. Для каждого иона случайным образом разыгрывается число и положение точек источников $\mathbf{s}=(s_x, s_y)$

$$n_A = \frac{N_c^2 - 1}{32\pi} \frac{Q_A^2(\vec{s}, b)}{\ln(1 + Q_A^2(\vec{s}, b)/m^2)}, \quad Q_{A/B}^2(\vec{s}, b) \equiv Q_{s0}^2 \cdot T_{A/B}(s_x \pm \frac{b}{2}, s_y) / T_{A/B}(\pm \frac{b}{2}, 0)$$

2. Положения \mathbf{s}_j источников случайным образом определяются в поперечной плоскости

отдельно для ядер А и В по распределению $n_{A/B}(\mathbf{s}_j) \sim Q_{s0}^2 T_{A/B}(\mathbf{s}_j)$

3. Набор положений источников сдвигается по оси x на $-b/2$ для ядра А и на $+b/2$ для ядра В

4. Зная координаты \mathbf{s}_j для каждого набора источников вычисляется функция $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ плотности энергии

в каждой точке \mathbf{r} , суммируя по \mathbf{j} отдельно для каждого ядра с одновременным вычислением $\Delta_A(\mathbf{r} - \mathbf{s}_j)$ и $\Delta_B(\mathbf{r} - \mathbf{s}_j)$.

$$\rho_{AB}(\vec{r}, b) = \left(\sum_{j \in A} Q_B^2(\vec{s}_{A,j}, b) \Delta_A(\vec{r} - \vec{s}_{A,j}, b) + \sum_{j \in B} Q_A^2(\vec{s}_{B,j}, b) \Delta_B(\vec{r} - \vec{s}_{B,j}, b) \right)$$

5. С этой функцией вычисляется эксцентриситет

Плотность энергии моделируется (аналог MC-Glauber) как сумма элементарных взаимодействий между **локализованным цветовым** зарядом и однородной **плотностью энергии** ядра. Каждое элементарное столкновение дает источник плотности энергии, которая не зависит от быстроты и уменьшается с поперечным расстоянием r .

Соответствующие флуктуации не являются флуктуациями самой плотности энергии, а определяются **флуктуациями количества источников энергии** по поперечной площади намного большей, чем $Q_{A/B}^{-2}$ (поперечный размер флуктуации)

Вывод формулы числа источников в модели “магма”

Средняя по многим событиям плотность энергии на ед. объёма (опускаем b)

$$\bar{\rho}(\vec{s}) = \frac{N_c^2 - 1}{2g^2 N_c} Q_{A,0}^2(\vec{s}) Q_{B,0}^2(\vec{s})$$

Плотность энергии, по положению всех источников и проинтегрированная по расстоянию от источника

$$\rho(\vec{s}) = Q_{B,0}^2(\vec{s}) n_A(\vec{s}) \sum_{j \subseteq A} \int d^2 s_{A,j} \Delta_A(\vec{s} - \vec{s}_{A,j}) + (A \leftrightarrow B)$$

Используя функцию профиля источника в виде

$$\Delta_A(\vec{r} - \vec{s}) = \frac{8}{g^2 N_c} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|^2 + Q_A^{-2}} \text{ at } |\vec{r} - \vec{s}| < 1/m$$

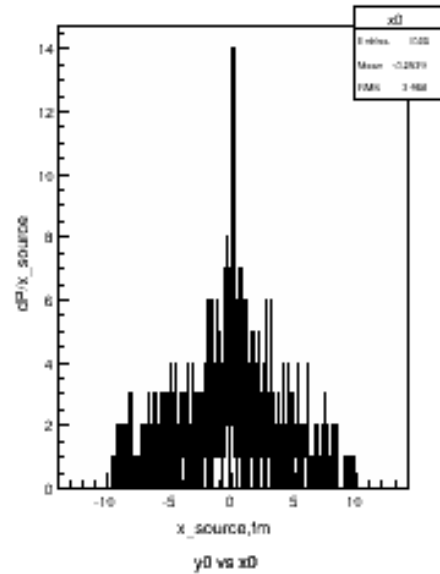
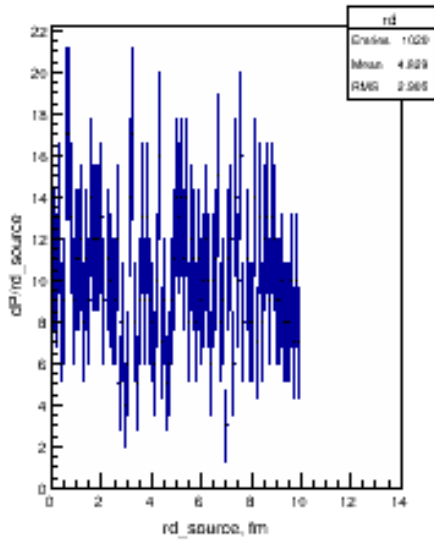
Получим из сравнения со средней плотностью

$$\frac{N_c^2 - 1}{2g^2 N_c} Q_{A,0}^2(\vec{s}) Q_{B,0}^2(\vec{s}) = Q_{B,0}^2(\vec{s}) n_A(\vec{s}) \frac{8}{g^2 N_c} \ln\left(1 + \frac{Q_A^2(\vec{s})}{m^2}\right)$$

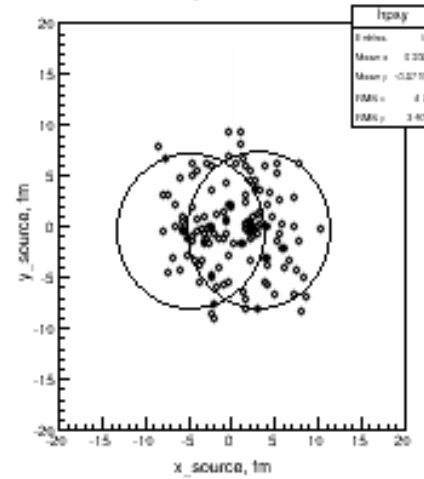
Сокращая одинаковые множители, найдем число источников на единицу поперечной площади

$$n_A(\vec{s}) = \frac{N_c^2 - 1}{16\pi} \frac{Q_{A,0}^2(\vec{s})}{\ln\left(1 + \frac{Q_{A,0}^2(\vec{s})}{m^2}\right)}$$

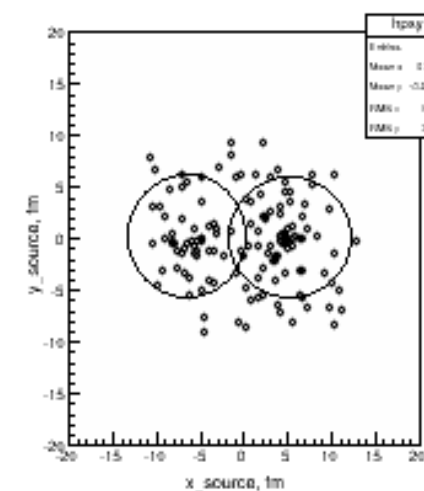
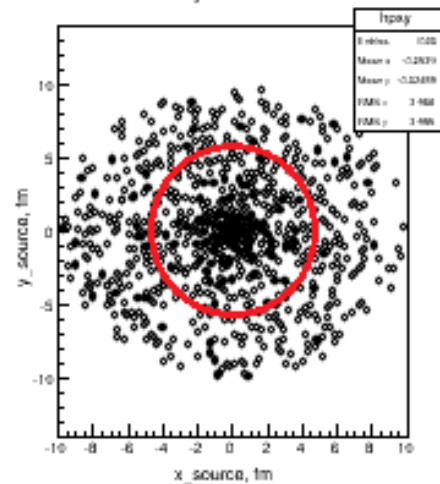
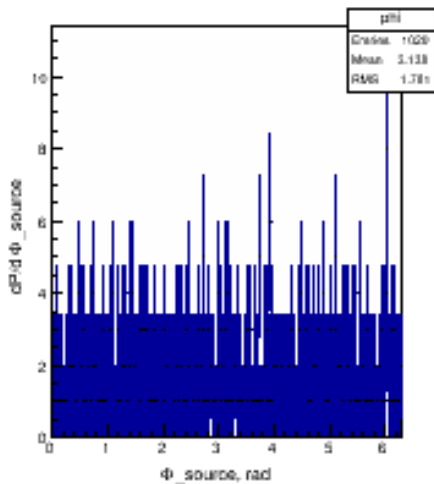
Примеры расположения точек источников, Pb+Pb R=6.62 fm



50 events
b = 0



1 event
b = 5



1 event
b = 10

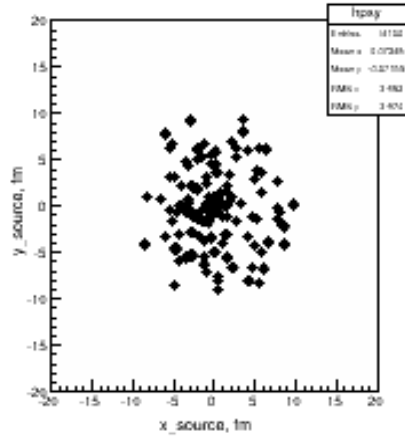
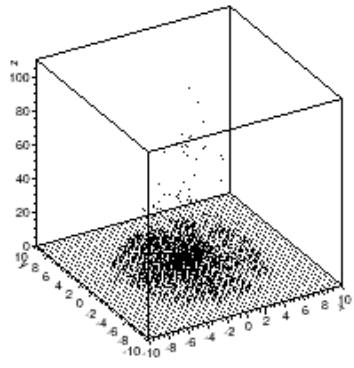
В области перекрытия ионов случайное расположение источников энергии может привести к анизотропии второй, третьей и других гармоник эксцентриситета.

Распределение плотности энергии $\rho(r)$, Pb+Pb $R=6.62$ fm

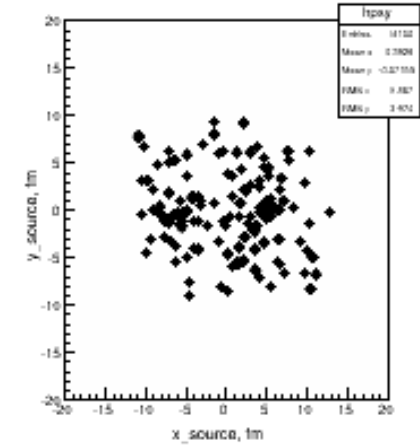
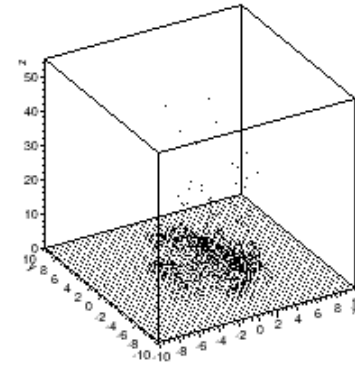
$$\rho_{AB}(\vec{r}, b) = \left(\sum_{j \in A} Q_B^2(\vec{s}_{A,j}, b) \Delta_A(\vec{r} - \vec{s}_{A,j}, b) + \sum_{j \in B} Q_A^2(\vec{s}_{B,j}, b) \Delta_B(\vec{r} - \vec{s}_{B,j}, b) \right)$$

Одно событие

$\rho(r) = \rho(x, y)$

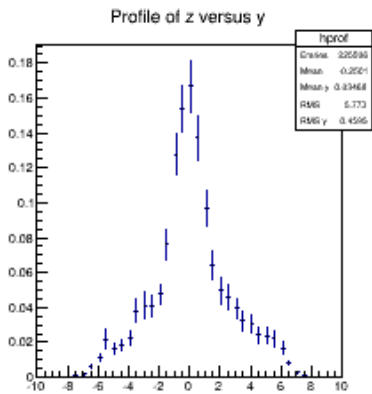


$\rho(r) = \rho(x, y)$

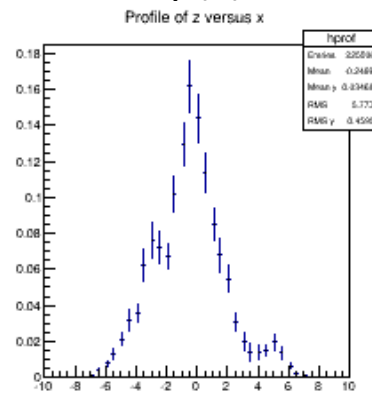


Распределения при $b = 0$

$\rho(y)$

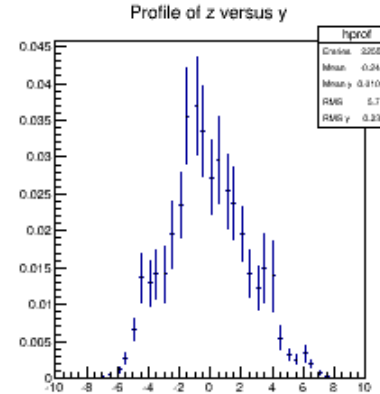


$\rho(x)$

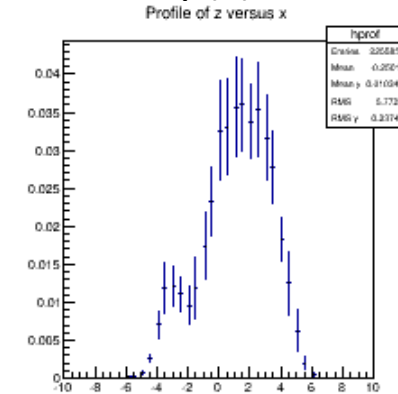


Распределения при $b = 10$

$\rho(y)$



$\rho(x)$



Результаты модели Magma в публикации

[1] F. Gelis, G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1907.10948>

$$\begin{aligned}v_2\{2\} &= \kappa_2 \varepsilon_2\{2\}, \\v_2\{4\} &= \kappa_2 \bar{\varepsilon}_2, \\v_3\{2\} &= \kappa_3 \varepsilon_3\{2\}.\end{aligned}$$

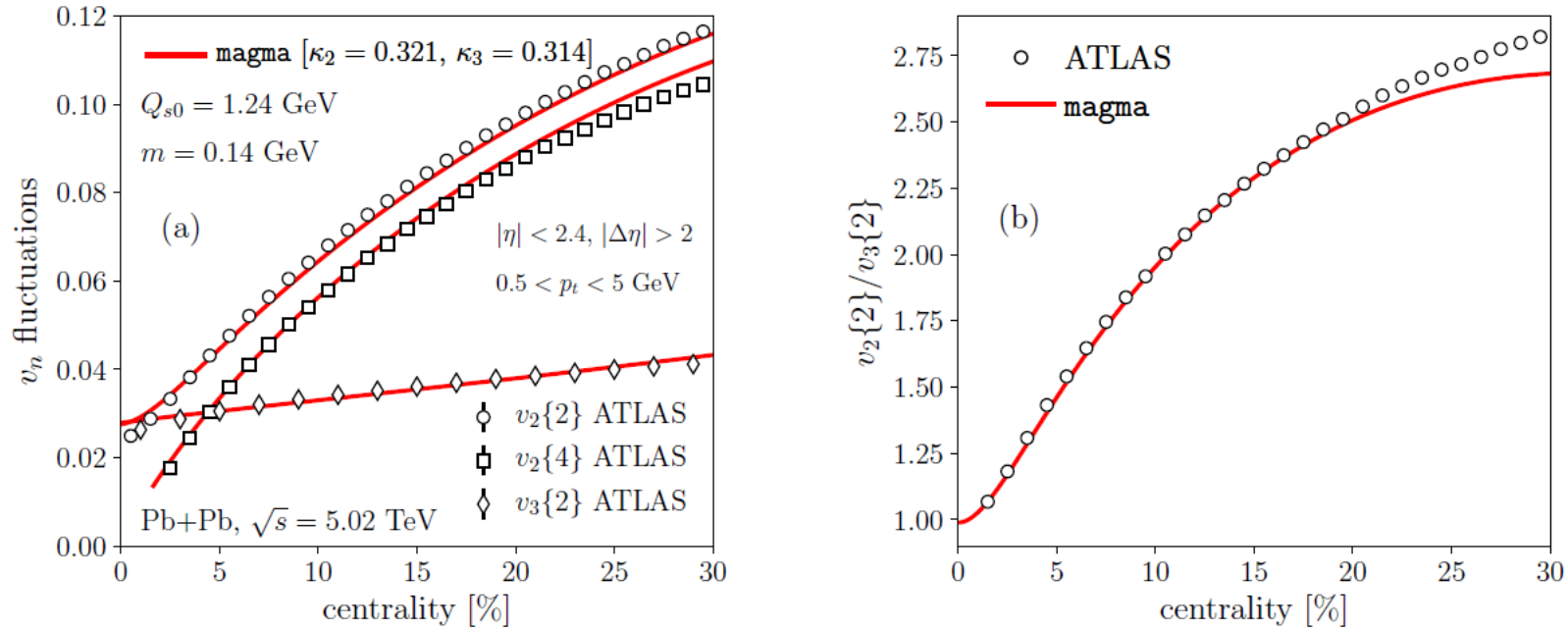


FIG. 2. Symbols: Experimental data on v_2 and v_3 , as function of centrality percentile, measured by the ATLAS Collaboration [20] in 5.02 TeV Pb+Pb collisions. Lines: results from the magma calculation. Panel (a) shows $v_2\{2\}$, $v_2\{4\}$ and $v_3\{2\}$, while panel (b) displays the ratio $v_2\{2\}/v_3\{2\}$.

Очень важный результат модели magma -- описание отношения второго и третьего эксцентриситета без дополнительных параметров

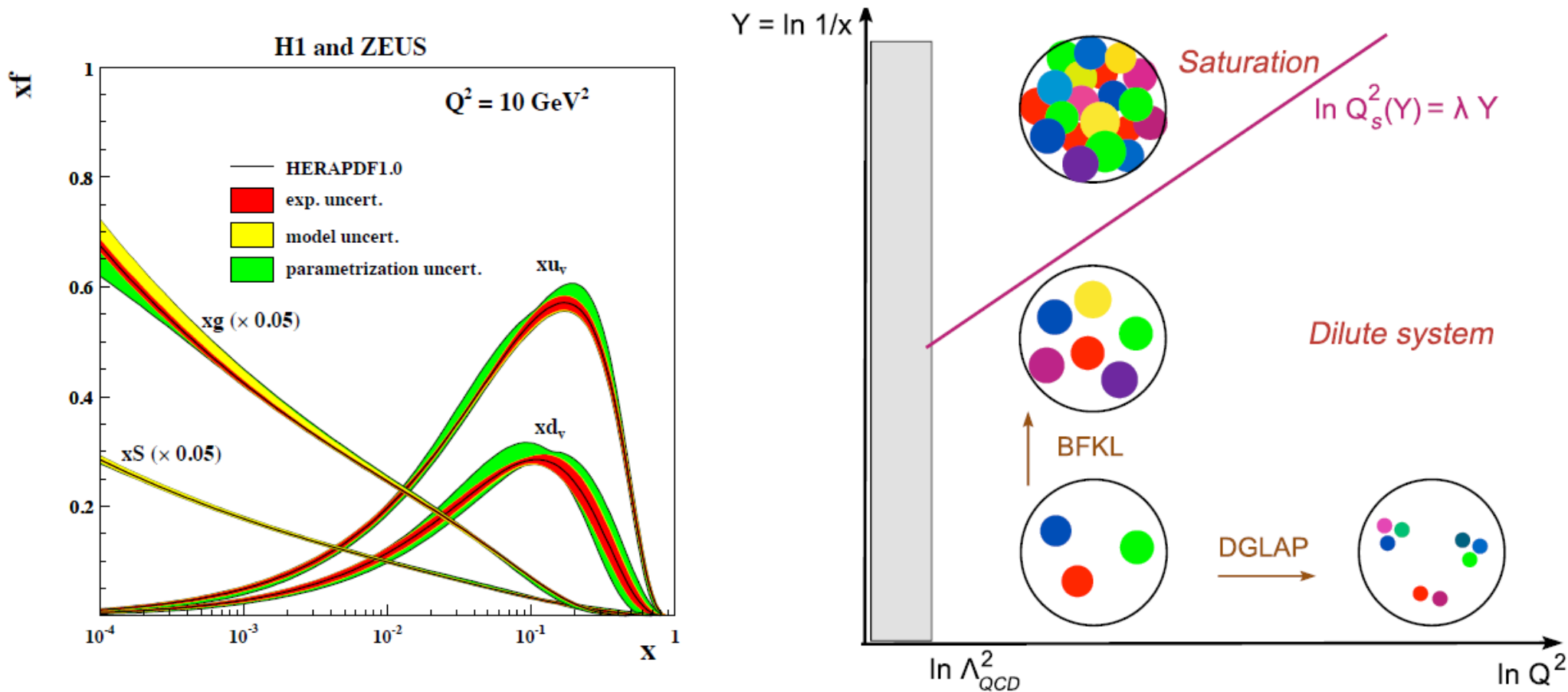
Предложения и пожелания

Предлагаю коллегам принять участие в этом исследовании:

1. Изучать статьи по применению CGC для описания гармоник потока.
2. Детально рассмотреть применение теории CGC в модели “magma”.
3. Проверить (теоретически) мой алгоритм вычислений.
4. Повторить для контроля мои вычисления эксцентриситетов (cross-checking)
5. Применить модель для столкновения несимметричных ионов (p+Pb, p+p CMS, ALICE) и (d,³He+Au RHIC)
6. «Распределения плотности вероятности эксцентриситета и гармоник потока в модели “magma”
7. Разработать новую версию модели HYDJET++ для анализа гармоник с заданием эксцентриситетов $\varepsilon_2(b)$ и $\varepsilon_3(b)$ в каждом событии из модели магма.
8. Предложить описание соотношения второй и третьей гармоники в ультра центральных столкновениях
9. Развить модель для сравнения с экспериментальными данными по переменным p_T , η , и по корреляциям гармоник $C(m,n)$
- ...

Запасные

2.1 Модель CGC - глюонное насыщение



E. Lancu, QCD in heavy ion collisions, arXiv:1205.0579

McLerran_CGC.pdf

1-Kazunori_Itakura_Presentation_CGC.pdf

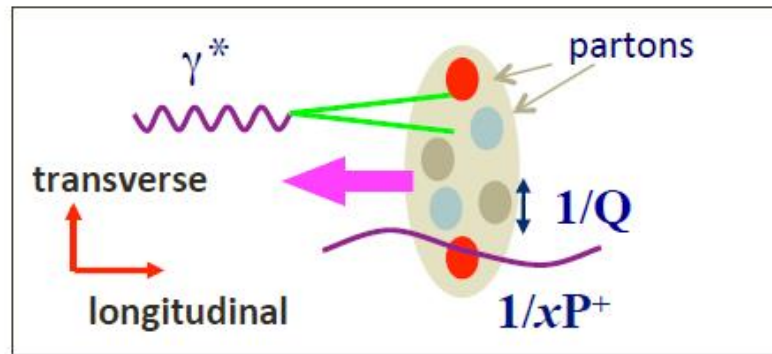
Семинар ЛСВ 31 мая 2019г. В.Л. Коротких

Proton composition changes with energy

Deep inelastic scattering (DIS: $ep \rightarrow eX$)

can probe quarks and gluons in a proton

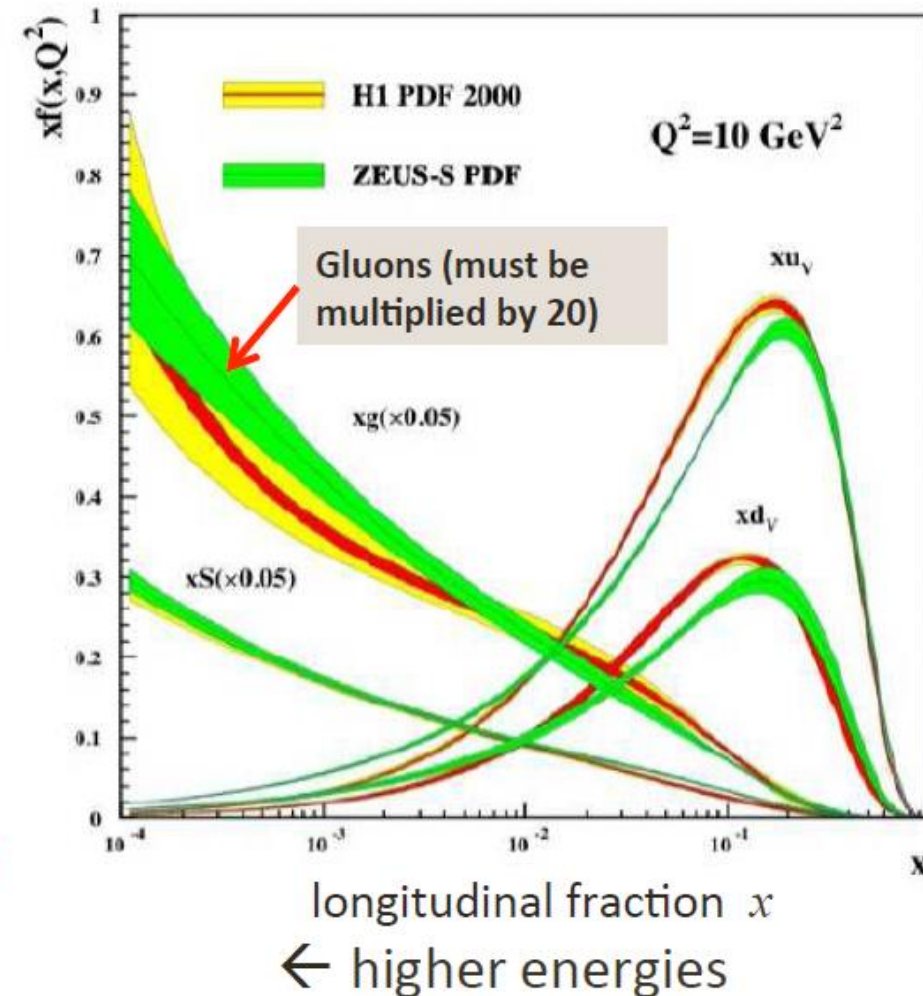
HERA @ DESY



Two kinematical variables

- Q^2 : transverse resolution
- x : longitudinal mom. fraction of partons

Glueons are the dominant component at high energy (small x)



2.2 Модель CGC - глюонное насыщение

$x = E_{\text{parton}} / E_p$, $G(x)$ - функция партонного распределения (pdf), $dN/dy d^2p_T = x G(x, Q^2)$ – плотность партонов,
Шкала разрешения поперечного импульса партона $Q^2 = (k - k')^2$

Константа сильного взаимодействия уменьшается на коротких расстояниях. Когда плотность увеличивается, типичное разделение между глюонами уменьшается, константа сильной связи становится меньше. Тогда при более высокой плотности глюоны взаимодействуют слабее.

Тем не менее, плотность не может быть увеличена до бесконечности, это приведет к бесконечному значению амплитуды рассеяния и нарушит границу унитарности (унитарная граница является ограничением на квантовую систему (сумма всех возможных результатов эволюции квантовой системы равна единице)). Утверждается, что с ростом плотности глюонов отталкивающие глюонное взаимодействие становится существенным и в результате баланса плотность глюонов насыщается.

Плотность насыщения будет соответствовать импульсу насыщения масштаба Q_{sat} , которая соответствует обратному значению наименьшего размера глюонов, плотно упакованных в протоне. Качественно можно утверждать следующее: представьте, что протон упакован глюонами фиксированного размера. Затем после определенной плотности насыщения отталкивающее взаимодействие вступит в силу и глюон больше не может быть добавлен. Происходит рекомбинация, глюоны слипаются в глюон. Естественно, плотность насыщения зависит от размера глюона. Для глюонов меньшего размера плотность насыщения будет увеличиваться.

Заметим, что шкала насыщения только говорит нам о том, что глюон размера $1/Q_{\text{sat}}$ перестаёт расти. Это не означает, что число глюонов перестаёт увеличиваться.

2.3 Граница насыщения глюонов в CGC

Число партонов на единицу поперечной площади
(при $\rho \sim 1$ глюоны покрывают всю площадь πR^2)

$$\rho \approx \frac{xG(x, Q^2)}{\pi R^2}$$

Сечение рекомбинации

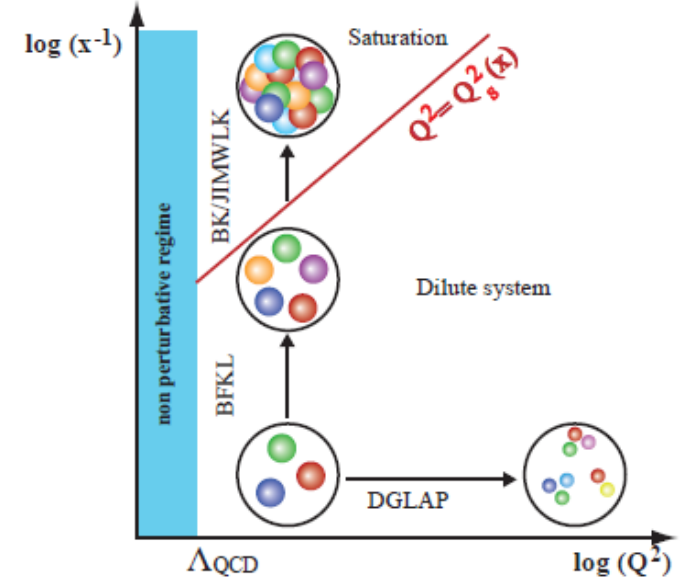
$$\sigma_{gg \rightarrow g} \approx \frac{\alpha_s}{Q^2}$$

Рекомбинация происходит при

$$\rho \sigma_{gg \rightarrow g} \geq 1, \quad \frac{\alpha_s xG(x, Q^2)}{Q^2 \pi R^2} \geq 1$$

Таким образом, насыщение происходит при условии \rightarrow

$$Q^2 \leq Q_{sat}^2 = \frac{\alpha_s xG(x, Q^2)}{\pi R^2}$$

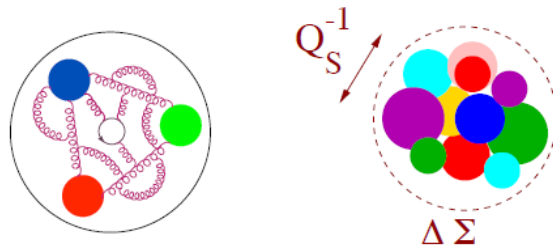


Увеличение по оси ординат, $Q^2 > Q_{sat}^2 \rightarrow$ эволюция к разжижению партонов

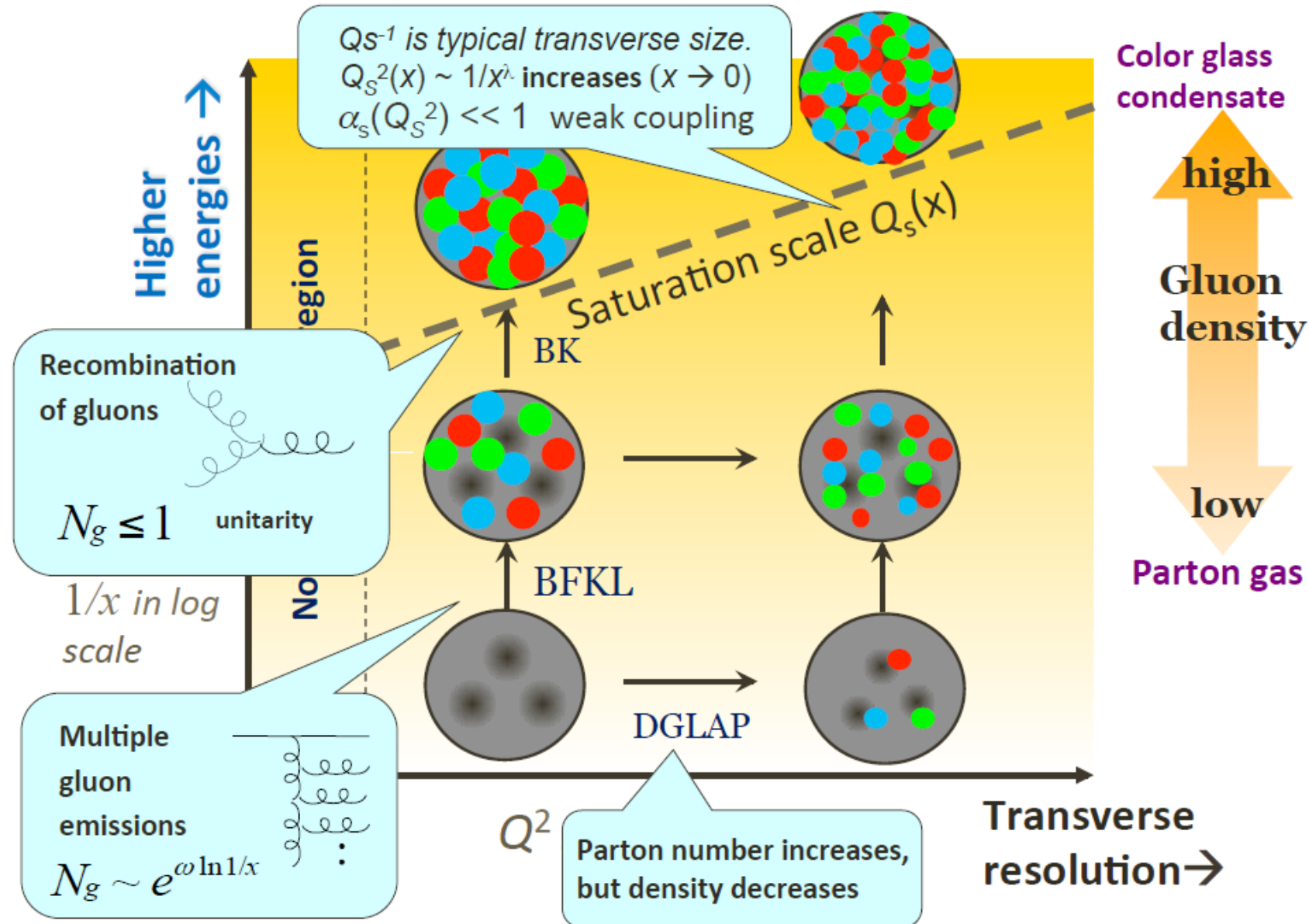
Увеличение по оси абсцисс, $Q^2 < Q_{sat}^2 \rightarrow$ эволюция к росту плотности партонов и их рекомбинации

Нуклоны переполняются глюонами и выходят за пределы размеров нуклона.

Области, занятые партонами, перекрываются и предпочтительным становится их рекомбинация $gg \rightarrow g$



Phase diagram of a proton as seen in DIS



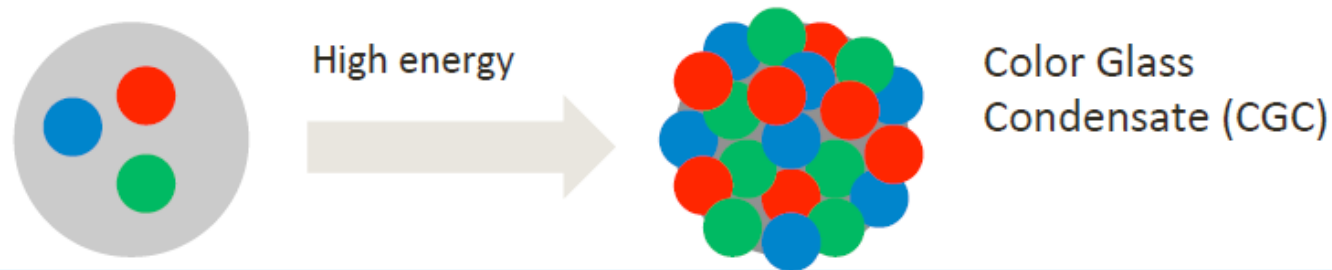
What is the CGC?

- **Dense gluonic states in hadrons which *universally* appear in the *high-energy limit* of scattering**

Color ... gluons have “colors”

Glass ... gluons with small longitudinal mom. fractions ($x \ll 1$) are created by long-lived partons that are distributed randomly on the transverse disk

Condensate ... gluon density is very high, and saturated



- **Most advanced (and still developing) theoretical picture of high energy scattering in QCD**

Based on QCD (weak coupling due to $Q_s \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, but non-perturbative)

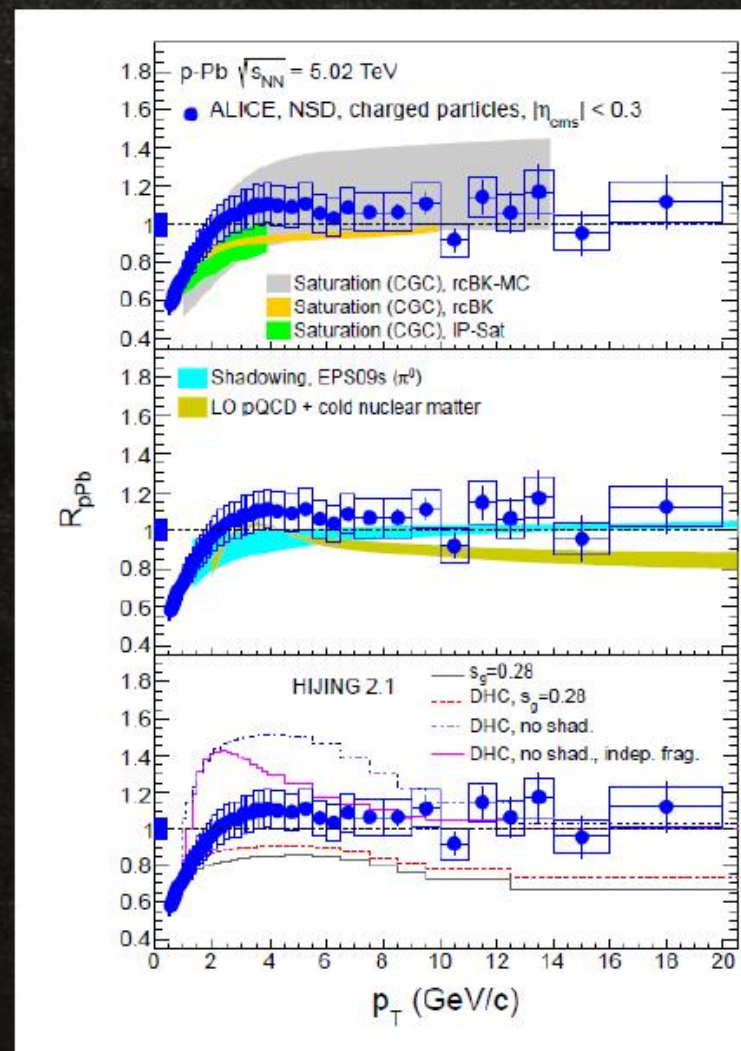
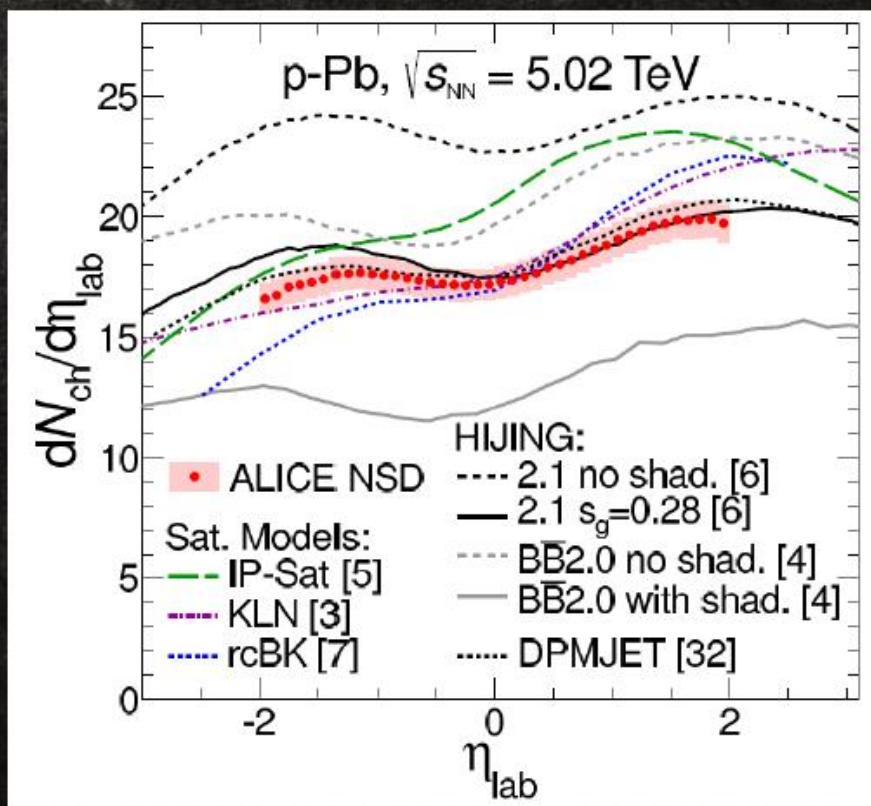
Unitarity effects (multiple scattering, nonlinear effects)

LO description completed around 2000

New ALICE data on pPb @ 5.02TeV

arXiv: 1210.4520

arXiv:1210.3615



Summary

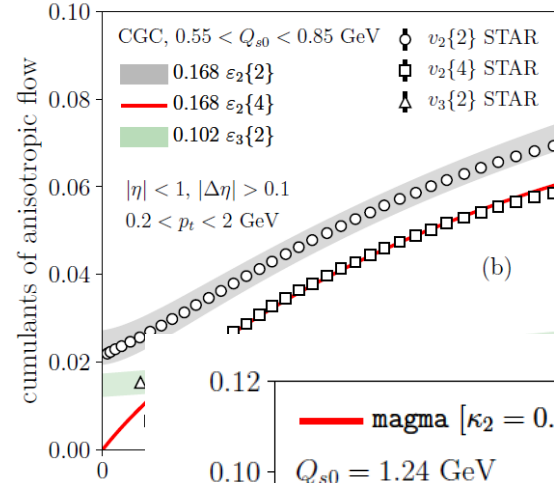
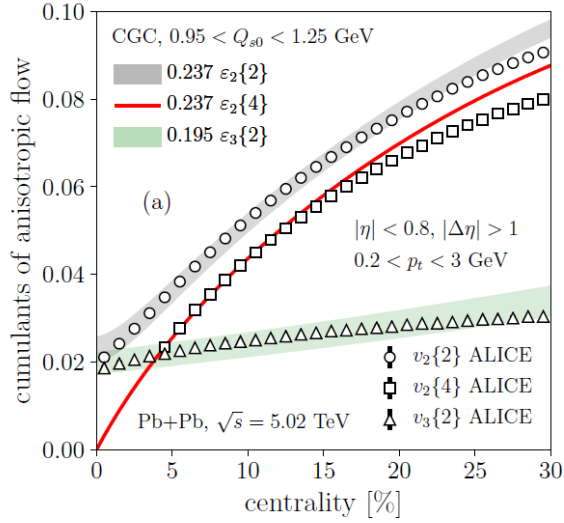
- CGC is the universal picture of hadrons at high energies, which appears as a result of gluon 3-point vertex. Its theoretical framework is established at the LO level, but is developing beyond the LO.
- CGC provides the initial conditions for the heavy ion collisions, and turns into Glasma. The Glasma is responsible for thermalization, but is not solved yet.
- CGC picture is getting precise and is now seriously compared with experimental data at RHIC (forward rapidity) and LHC. MC-DHJ/rcBK model works well in describing the forward dAu data.

Kazu Itakura
(KEK, Theory Center)
Oct.2012@Wuhan, China

Сравнение результатов модели Magma в 2-х публикациях

[1]. G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1902.07168>

5



$$v_2\{2\} = \kappa_2 \varepsilon_2\{2\},$$

$$v_2\{4\} = \kappa_2 \bar{\varepsilon}_2,$$

$$v_3\{2\} = \kappa_3 \varepsilon_3\{2\}.$$

[1] F. Gelis, G. Giacalone et al., <http://arxiv.org/abs/1907.10948>

FIG. 2. Symbols: Experimental data on v_2 and v_3 , as function of centrality [1] in 5.02 TeV Pb+Pb collisions [panel (a)], and by the STAR Collaboration in shaded bands represent results from our CGC formalism, rescaled according to the value of Q_{s0} .

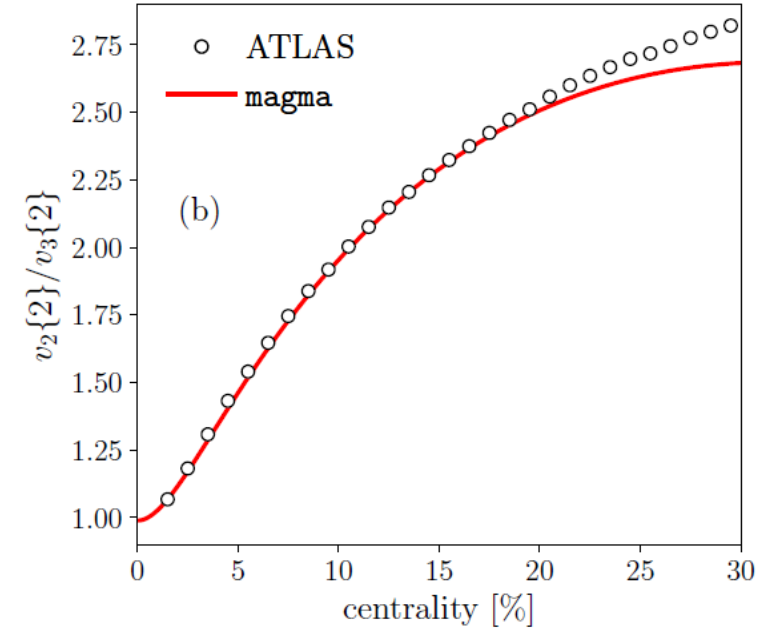
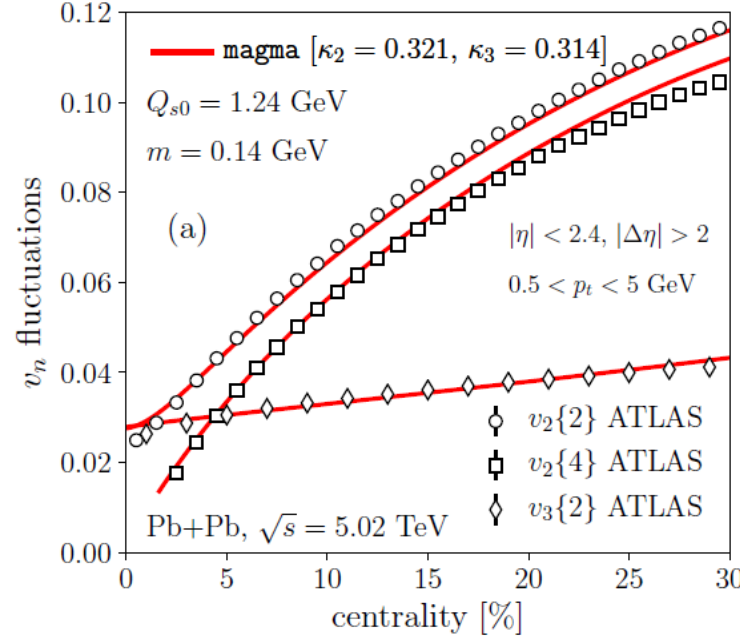


FIG. 2. Symbols: Experimental data on v_2 and v_3 , as function of centrality percentile, measured by the ATLAS Collaboration [20] in 5.02 TeV Pb+Pb collisions. Lines: results from the magma calculation. Panel (a) shows $v_2\{2\}$, $v_2\{4\}$ and $v_3\{2\}$, while panel (b) displays the ratio $v_2\{2\}/v_3\{2\}$.

