Construction of degenerate higher order scalar-tensor theories

Autor: Nestor Alberto Granados Hernández (UIS)
Co-autor: Yeinzon Rodríguez García (UIS-UAN)
Co-autor: Carlos Mauricio Nieto Guerrero(UIS)

¿Por qué se trabaja con teorías que modifican la gravedad?

- Porque la Teoría de la Relatividad General es efectiva, por lo tanto se debe modificar a altas energías [1].

- Con una teoría modificada es posible dar explicaciones alternas a los problemas de inflación[2], energía oscura[3] o materia oscura[4].

[1] J. F. Donoghue, General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections, Phys. Rev. D 50, (1994).
[2] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, Generalized G-Inflation: Inflation with the Most General Second-Order Field Equations, Progress of Theoretical Physics 126, 511 (2011).
[3] R. Kase and S. Tsujikawa, Dark energy in scalar-vector-tensor theories, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 1811, 024 (2018).
[4] M. T. Meehan and I. B. Whittingham,Dark matter relic density in scalar-tensor gravity revisited, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 1512, 011 (2015).

¿Cómo se puede modificar la gravedad?

Teorema de Lovelock

Las ecuaciones de Einstein son las únicas ecuaciones de Euler-Lagrange de segundo orden posibles derivadas de una densidad escalar lagrangiana en cuatro dimensiones que se construye únicamente a partir de la métrica $L = L[g_{\mu\nu}]$ [a].[5]

La modificación se puede hacer

- Incrementando la dimensionalidad del espacio tiempo
- Aumentando el orden de las ecuaciones de movimiento
- Incluyendo campos extra a la métrica acoplados no mínimamente

[5] D. Lovelock, Four Dimensionality of Space and the Einstein Tensor, Journal of Mathematical Physics 13, 874 (1972

Teorías de gravedad modificada

Fíg. 1. teoría de gravedad modificada

Teorías tradicionales escalar tensor

- La teoría escalar tensor fue concebida originalmente por Jordan [6].

$$\mathcal{L}_{\mathrm{J}} = \sqrt{-g}\left[\varphi_{\mathrm{J}}^{\gamma}\left(R - \omega_{\mathrm{J}}\frac{1}{\varphi_{\mathrm{J}}^{2}}g^{\mu\nu}\,\partial_{\mu}\varphi_{\mathrm{J}}\,\partial_{\nu}\varphi_{\mathrm{J}}\right) + L_{\mathrm{matter}}(\cancel{\varphi_{\mathrm{J}}}, \Psi)\right] \quad (1)$$

Acople no mínimo

Fierz et al [7]

[6] P. Jordan (1955). *Schwerkraft und Weltall* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig.
[7] M. Fierz (1956). *Helv. Phys. Acta*, **29**, 128-134.

Teoría tradicionales escalar tensor

- La siguiente teoría fue el modelo prototipo de Brans-Dicke [8].

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BD}} = \sqrt{-g}\left(\varphi R - \omega\frac{1}{\varphi}g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + L_{\mathrm{matter}}(\Psi)\right) \quad (2)$$

- Forma canónica

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BD}} = \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}\xi\phi^2 R - \tfrac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi + L_{\mathrm{matter}}\right) \quad (3)$$

[8] C. Brans and R. H. Dicke (1961). Phys. Rev. 124, 925–935

Teoría de Horndeski

- Es la teoría más general escalar tensor con ecuaciones de campo, a lo sumo, de segundo orden en cuatro dimensiones [9].

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\sigma}\left[\kappa_1 \phi^{\mu}_{\alpha} R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + \frac{2}{3}\kappa_{1X}\phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma} + \kappa_3 \phi_{\alpha}\phi^{\mu} R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + 2\kappa_{3X}\phi_{\alpha}\phi^{\mu}\phi^{\nu}_{\beta}\phi^{\sigma}_{\gamma}\right] \\ & + \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\left[(F+2W)R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} + 2F_X \phi^{\mu}_{\alpha}\phi^{\nu}_{\beta} + 2\kappa_8 \phi_{\alpha}\phi^{\mu}\phi^{\nu}_{\beta}\right] \\ & - 6\left(F_{\phi} + 2W_{\phi} - X\kappa_8\right)\Box\phi + \kappa_9 .\end{aligned} \tag{4}$$

Con $F_X = 2\left(\kappa_3 + 2X\kappa_{3X} - \kappa_{1\phi}\right)$; $\delta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} := n!\,\delta^{[\alpha_1}_{\mu_1}\delta^{\alpha_2}_{\mu_2}\ldots\delta^{\alpha_n]}_{\mu_n}$; $\kappa_1, \kappa_3, \kappa_8,$ y κ_9 ; $W = W(\phi)$

[9] G. W. Horndeski, Second-order scalar-tensor eld equations in a four-dimensional space, International Journal of Theoretical Physics 10, 363 (1974).

Teoría de Horndeski

- En el 2011, se demuestra que la teoría generalizada del Galileon es equivalente a la teoría de Horndeski [10].
- Teoría del Galileon en espacio tiempo plano [11]

$$\mathcal{L} = c_1\phi + c_2 X - c_3 X\Box\phi + c_4 X\left[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi\right] - \frac{c_5}{3}X\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\nu\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\partial^\mu\phi\right]. \quad (5)$$

- Espacio tiempo curvo [12]

$$\mathcal{L} = c_1\phi + c_2 X - c_3 X\Box\phi + \frac{c_4}{2}X^2 R + c_4 X\left[(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right] + c_5 X^2 G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{c_5}{3}X\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi^{\mu}_{\lambda}\right] \quad (6)$$

[10] T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, Generalized G-Ination: Ination with the Most General Second-Order Field Equations, Progress of Theoretical Physics 126, 511 (2011).
[11] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, The Galileon as a local modification of gravity,Physical Review D 79, 064036 (2009).
[12] C. Deayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, Covariant Galileon, Physical Review D 79, 084003 (2009).

Teoría de Horndeski

- La teoría del Galileon generalizada [13]

$$\mathcal{L} = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\Box\phi + G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right]$$
$$+ G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{G_{5X}}{6}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi^{\mu}_{\lambda}\right], \quad (7)$$

donde $\phi_\mu := \nabla_\mu\phi$, $\phi_{\mu\nu} := \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$, además, G_2, G_3, G_4 y G_5 son funciones arbitrarias de ϕ y X ($X := -g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu/2$), y el subíndice en G_{iX} indica una derivada con respecto a X.

[13] Deffayet C, Gao X, Steer D A and Zahariade G 2011 From k-essence to generalised Galileons *Phys. Rev.* D **84** 064039

¿Es posible tener teorías de orden superior saludables sin necesidad de contra términos?

Teorías degeneradas

- Una teoría es degenerada si el determinante de la matriz cinética es cero.
- Modelo simplificado

$$L = \frac{a}{2}\ddot{\phi}^2 + b\ddot{\phi}\dot{q} + \frac{c}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}q^2, \qquad (8)$$

  donde a, b, c son constantes

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange son explícitamente de orden superior a dos:

$$a\ddddot{\phi} + b\dddot{q} - \ddot{\phi} - \phi = 0, \qquad (9)$$

$$b\dddot{\phi} + c\ddot{q} + q = 0. \qquad (10)$$

Teorías degeneradas

- La matriz Hessiana

$$\mathcal{M} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \tag{11}$$

- Se dice que un sistema es degenerado cuando det M= 0, implicando que $ac - b^2 = 0$.
- Se obtiene el sistema de ecuaciones de Euler-Lagrange que muestra que son implícitamente de hasta s

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{c}\dot{q} + \phi = 0, \tag{12}$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)\ddot{q} - \frac{b}{c}\dot{\phi} + \frac{1}{c}q = 0. \tag{13}$$

Teorías más allá de Horndeski

- La acción que gobierna a esta clase de teorías es

$$S[g_{\mu\nu},\phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{8\pi G_N}\mathcal{L}_i(g_{\mu\nu},\phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu},\Psi_M)\right] \qquad (14)$$

Donde cada Lagrangiano es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(\phi,X) \\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi,X)\Box\phi \\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\phi,X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\right] + F_4(\phi,X)\epsilon^{\mu\nu\rho}_{\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\phi_\mu\phi_\alpha\phi_{\nu\beta}\phi_{\rho\gamma} \\
\mathcal{L}_5 &= G_5(\phi,X)G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X}\left[(\Box\phi)^3 + 2\phi^{\nu}_{\mu}\phi^{\alpha}_{\nu}\phi^{\mu}_{\alpha} - 3\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\Box\phi\right] \\
&\quad + F_5(\phi X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\phi_\mu\phi_\alpha\phi_{\nu\beta}\phi_{\rho\gamma}\phi_{\sigma\theta}
\end{aligned}$$

Teoría más allá de Horndeski

- Para mantener las ecuaciones de movimiento a segundo orden, es necesario incluir la siguiente ligadura [14]

$$2XG_{5X}F_4 = -3F_5[G_4 + 4XG_{4X} + XG_{5\phi}], \qquad (15)$$

14] J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato, Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order, JHEP 12, 100 (2016).

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- La dinámica es gobernada por la acción

$$S[g,\phi] \equiv \int \sqrt{|g|}(f^{(4)}R + C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi), \qquad (16)$$

- Las ecuaciones de movimiento del campo ϕ son

$$\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta\phi}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} - \nabla_\alpha\left(\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta\phi_\alpha}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma}\right) + 2\nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\frac{\delta C^{\mu\nu\alpha\beta}}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\phi_{\mu\nu}\right) = 0 \qquad (17)$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- El tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ debe cumplir las siguientes simetrías

$$C^{\mu\nu\rho\sigma} = C^{\mu\nu\sigma\rho} = C^{\nu\mu\rho\sigma} = C^{\rho\sigma\mu\nu}. \tag{18}$$

Por lo tanto, se escribe como

$$\begin{aligned} C^{\nu\mu\sigma\rho} &= \frac{1}{2}\alpha_1 \left(g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}\right) + \alpha_2 g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \\ &+ \frac{1}{4}\alpha_3 \left(g^{\mu\sigma} \phi^\rho \phi^\nu + g^{\rho\nu} \phi^\mu \phi^\sigma + g^{\mu\rho} \phi^\nu \phi^\sigma + g^{\nu\sigma} \phi^\mu \phi^\rho\right) + \alpha_5 \phi^\mu \phi^\nu \phi^\rho \phi^\sigma. \end{aligned} \tag{19}$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Casos particulares

Término cuartico de Horndeski

$$f = G_4\,, \qquad \alpha_1 = -\alpha_2 = 2G_{4,X}$$
$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0\,.$$

$$L_4^{\mathrm{H}} = G_4(\phi, X)\,{}^{(4)}R - 2G_{4,X}(\phi, X)(\Box\phi^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}) \quad (20)$$

Término más allá de Horndeski

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = XF_4\,, \qquad \alpha_3 = -\alpha_4 = 2F_4$$
$$\alpha_5 = 0\,.$$

$$L_4^{\mathrm{bH}} = F_4(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\,\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'} \quad (21)$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Un acción equivalente es

$$S[g,\phi;A_\mu,\lambda^\mu] = \int \sqrt{|g|}\left(f^{(4)}R + C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\mu(\nabla_\mu\phi - A_\mu)\right) \quad (22)$$

- Las ecuaciones de movimiento son para el campo escalar ϕ y el campo vectorial A_μ

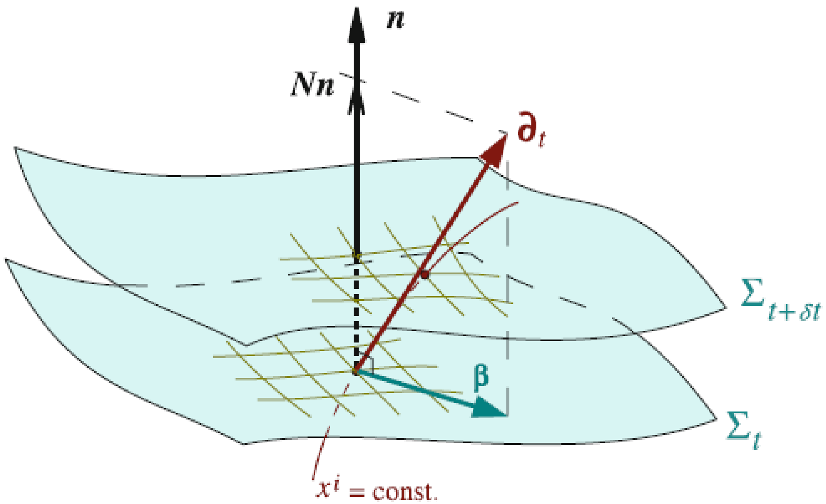
$$\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta\phi}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\mu \lambda^\mu = 0 \qquad A_\mu = \nabla_\mu \phi$$

$$\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta A_\alpha}\nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma - 2\nabla_\beta\left(C^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\mu A_\nu\right) = \lambda^\alpha \quad (23)$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

Degeneración

- Para utilizar las condiciones de degeneración es necesario, primero, encontrar la matriz cinética o Hessiana .
  - Por lo tanto, se debe separar las derivadas espaciales de las temporales, para tal fin se utiliza el formalismo 3+1.



Fíg. 2. Descomposición 3+1 [15]

[15] E. Gourgoulhon, 3+1 Formalism in General Relativity, volume 846, 01 2012.

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Descomposición 3+1 de la derivada covariante

$$\nabla_a A_b = D_a \hat{A}_b - A_* K_{ab} + n_a\left(K_{bc}\hat{A}^c - D_b A_*\right) + n_b\left(K_{ac}\hat{A}^c - D_a A_*\right) + \frac{1}{N} n_a n_b (\dot{A}_* - \beta^c D_c A_* - N\hat{A}^c a_c) \tag{24}$$

  - K_{ab} es el tensor de curvatura extrínseco, se puede expresar como

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - D_a\beta_n - D_b\beta_a) \tag{25}$$

  - a_c es el vector aceleración

- La parte cinética

$$(\nabla_a A_b)_{\rm kin} = \lambda_{ab}\,\dot{A}_* + \Lambda_{ab}{}^{cd}\,K_{cd}\,; \tag{26}$$

  - Con

$$\lambda_{ab} \equiv \frac{1}{N} n_a n_b\,, \qquad \Lambda_{ab}{}^{cd} = -A_*\,h^c_{(a} h^d_{b)} + 2\,n_{(a} h^{(c}_{b)} \hat{A}^{d)}\,. \tag{27}$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- El Lagrangiano cinético es

$$L_{kin}^{(\phi)} = C^{abcd}\lambda_{ab}\lambda_{cd}\dot{A}_*{}^2 + 2C^{abcd}\Lambda_{ab}^{ef}\lambda_{cd}\dot{A}_*K_{ef} + C^{abcd}\Lambda_{ab}^{ef}\Lambda_{cd}^{gh}K_{ef}K_{gh} \quad (28)$$

- Se encuentran los coeficientes
- $\mathcal{A} = C^{abcd}\lambda_{ab}\lambda_{cd} = \frac{1}{N^2}[\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_3 - \alpha_4)\dot{A}_*{}^2 + \alpha_5\dot{A}_*{}^4]$ (29)
- $\mathcal{B}^{ef} = C^{abcd}\Lambda_{ab}^{ef}\lambda_{cd} = \beta_1 h^{ef} + \beta_2 \hat{A}^e\hat{A}^f$ (30)
  - Con

$$\beta_1 = \frac{A_*}{2N}(2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2)\,, \qquad \beta_2 = -\frac{A_*}{2N}(\alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\,\alpha_5 A_*^2) \quad (31)$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- $$\mathcal{K}^{efgh} = C^{abcd}\Lambda_{ab}^{ef}\Lambda_{cd}^{gh} = \kappa_1 h^{a(c}h^{d)b} + \kappa_2\, h^{ab}h^{cd} + \frac{1}{2}\kappa_3\left(\hat{A}^a\hat{A}^b h^{cd} + \hat{A}^c\hat{A}^d h^{ab}\right) + \frac{1}{2}\kappa_4\left(\hat{A}^a\hat{A}^{(c}h^{d)b} + \hat{A}^b\hat{A}^{(c}h^{d)a}\right) + \kappa_5\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d, \tag{32}$$

  - Con

$$\kappa_1 = \alpha_1 A_*^2, \qquad \kappa_2 = \alpha_2 A_*^2, \qquad \kappa_3 = -\alpha_3 A_*^2, \qquad \kappa_4 = -2\alpha_1, \qquad \kappa_5 = \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4. \tag{33}$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Términos cinéticos gravitacionales
  - $\mathcal{B}^{ab}_{grav} = \frac{2 f_X\, A_* h^{ab}}{N}$ (34)
  - $\mathcal{K}^{abcd}_{grav} = \gamma_1 h^{a(c} h^{d)b} + \gamma_2\, h^{ab} h^{cd} + \frac{1}{2}\gamma_3 \left(\hat{A}^a \hat{A}^b h^{cd} + \hat{A}^c \hat{A}^d h^{ab} \right)$ (35)
    - tomando

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = f\,, \qquad \gamma_3 = 4 f_X\,. \tag{36}$$

- La parte cinética total de la acción
  - $\widetilde{\mathcal{B}}^{ab} = \mathcal{B}^{ab} + \mathcal{B}^{ab}_{grav}$ $\qquad \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ $\qquad \widetilde{\mathcal{K}}^{abcd} = \mathcal{K}^{abcd} + \mathcal{K}^{abcd}_{grav}$ (37)

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Condiciones de degeneración
  - Se debe considerar la matriz cinética completa

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \widetilde{\mathcal{B}}^{cd} \\ \widetilde{\mathcal{B}}^{ab} & \widetilde{\mathcal{K}}^{abcd} \end{pmatrix} \tag{38}$$

  - Está matriz es degenerada si se cumple

$$v_o\mathcal{A} + \widetilde{\mathcal{B}}^{cd}\mathcal{V}_{cd} = 0 \qquad v_o\widetilde{\mathcal{B}}^{ab} + \widetilde{\mathcal{K}}^{abcd}\mathcal{V}_{cd} = 0 \tag{39}$$

    - Con

$$\mathcal{V}_{cd} = v_1 h_{cd} + v_2 \hat{A}_c \hat{A}_d \tag{40}$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Condiciones de degeneración
  - Reescribiendo

$$\mathcal{M}\cdot\mathcal{V} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 3\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \hat{A}^2 & \tilde{\beta}_1 \hat{A}^2 + \tilde{\beta}_2 (\hat{A}^2)^2 \\ \tilde{\beta}_1 & \tilde{\kappa}_1 + 3\tilde{\kappa}_2 + \tilde{\kappa}_3 \hat{A}^2/2 & \tilde{\kappa}_2 \hat{A}^2 + \tilde{\kappa}_3 (\hat{A}^2)^2/2 \\ \tilde{\beta}_2 & 3\tilde{\kappa}_3/2 + \kappa_4 + \kappa_5 \hat{A}^2 & \tilde{\kappa}_1 + (\tilde{\kappa}_3/2 + \kappa_4)\hat{A}^2 + \kappa_5 (\hat{A}^2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{41}$$

Se toma

$$\hat{A}^2 = X + A_*^2.$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Condiciones de degeneración
  - Si se exige que el determinante de la matriz cinética sea cero, se obtiene

$$D_0(X) + D_1(X)A_*^2 + D_2(X)A_*^4 = 0\,; \tag{42}$$

Donde

$$D_0(X) \equiv -4(\alpha_2+\alpha_1)\left[Xf(2\alpha_1 + X\alpha_4 + 4f_X) - 2f^2 - 8X^2 f_X^2\right], \tag{43}$$

$$\begin{aligned} D_1(X) \equiv\ & 4\left[X^2\alpha_1(\alpha_1+3\alpha_2) - 2f^2 - 4Xf\alpha_2\right]\alpha_4 + 4X^2 f(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_5 + 8X\alpha_1^3 \\ & -4(f+4Xf_X - 6X\alpha_2)\alpha_1^2 - 16(f+5Xf_X)\alpha_1\alpha_2 + 4X(3f-4Xf_X)\alpha_1\alpha_3 \\ & -X^2 f\alpha_3^2 + 32f_X(f+2Xf_X)\alpha_2 - 16ff_X\alpha_1 - 8f(f-Xf_X)\alpha_3 + 48ff_X^2\,, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} D_2(X) \equiv\ & 4\left[2f^2 + 4Xf\alpha_2 - X^2\alpha_1(\alpha_1+3\alpha_2)\right]\alpha_5 + 4\alpha_1^3 + 4(2\alpha_2 - X\alpha_3 - 4f_X)\alpha_1^2 + 3X^2\alpha_1\alpha_3^2 \\ & -4Xf\alpha_3^2 + 8(f+Xf_X)\alpha_1\alpha_3 - 32f_X\alpha_1\alpha_2 + 16f_X^2\alpha_1 + 32f_X^2\alpha_2 - 16ff_X\alpha_3 \end{aligned} \tag{45}$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Clasificación de las teorías degeneradas
  - Primera clase $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$
    - La condición $D_0(X) = 0$ es cumplida
    - La condición $D_1(X) = 0$, genera

$$\alpha_4 = \frac{1}{8(f+X\alpha_2)^2}\left[16X\alpha_2^3 + 4(3f+16Xf_X)\alpha_2^2 + (16X^2f_X - 12Xf)\alpha_3\alpha_2 - X^2f\alpha_3^2 + 16f_X(3f+4Xf_X)\alpha_2 + 8f(Xf_X - f)\alpha_3 + 48ff_X^2\right]. \quad (46)$$

    - La condición $D_2(X) = 0$, genera

$$\alpha_5 = \frac{(4f_X + 2\alpha_2 + X\alpha_3)\left(-2\alpha_2^2 + 3X\alpha_2\alpha_3 - 4f_X\alpha_2 + 4f\alpha_3\right)}{8(f+X\alpha_2)^2}. \quad (47)$$

Teorías degeneradas de orden superior (DHOST)

- Clasificación de las teorías degeneradas
  - Segunda clase $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$
    - La condición $D_0(X) = 0$ es cumplida si

$$2X\alpha_1 + X^2\alpha_4 = 2\,. \tag{48}$$

    - Resolviendo $D_1(X) = 0$ y $D_2(X) = 0$ para expresar α_4 y α_5 en términos de otras tres funciones, se genera

$$(X\alpha_1 - 1)^2(4 + 8X\alpha_2 + 2X\alpha_1 + X^2\alpha_3)^2 = 0\,. \tag{49}$$

      - Se generan 2 subclases
        - Primera subclase

$$\alpha_1 = \frac{1}{X}\,, \qquad \alpha_4 = 0\,, \qquad \alpha_5 = \frac{-4 - 8X\alpha_2 - 4X^2\alpha_3 + X^4\alpha_3^2}{4X^3(1 + X\alpha_2)} \tag{50}$$

        - Segunda subclase

$$\alpha_1 = -\frac{2}{X} - 4\alpha_2 - \frac{X}{2}\alpha_3\,, \qquad \alpha_4 = \frac{6}{X^2} + \frac{8}{X}\alpha_2 + \alpha_3, \qquad \alpha_5 = -\frac{4 + 8X\alpha_2 + 3X^2\alpha_3}{X^3} \tag{51}$$

GRACIAS