Явное решение уравнения торможения протона в ядре в релятивистском случае

для силы торможения $\sim \frac{V^2}{1-V^2}$

$$\boxed{F = -\varepsilon S \frac{V^2}{1-V^2}}$$ (соотв. ф-ле (28) диплома В.Е.)

$\varepsilon = \frac{M_A}{V_A}$ – плотность энергии в ядре.

$S = \pi r_p^2$ – площадь поперечного сечения протона.

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = F, \quad p = \frac{mV}{\sqrt{1-V^2}}}$$ рел. ур. движение

m – масса протона

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m\dot{V}}{(1-V^2)\sqrt{1-V^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{m\dot{V}}{\cancel{(1-V^2)}\sqrt{1-V^2}} = -\varepsilon S \frac{V^2}{\cancel{(1-V^2)}}$$

$$(*) \quad \boxed{\dot{V} = -\frac{\varepsilon S}{m} V^2\sqrt{1-V^2} = -CV^2\sqrt{1-V^2}}$$

$$C \equiv \frac{\varepsilon S}{m}$$

Сравним это ур. движ. с дипломом В.Е.

В дипломе В.Е. есть ф-ла (30):

$$\dot{v} \equiv \frac{dv}{dt} = (-1)\left(\frac{\varepsilon S}{m}\right)\cdot v^2\gamma\left(1+\gamma^2 v^2\right)^{-1} \qquad (30)$$

Вера не сообразила, что: где $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

$$1+\gamma^2 v^2 = 1+\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 v^2 = 1+\frac{v^2}{1-v^2} = \frac{1}{1-v^2} = \gamma^2$$

$\boxed{\text{т.е. } 1+\gamma^2 v^2 = \gamma^2}$ Поэтому у неё

далее всё сложно, но если это учесть,

то:

$$\dot{v} = -C v^2 \gamma \left(\gamma^2\right)^{-1} = -C v^2 \gamma^{-1} =$$

$$= -C v^2/\gamma = -C v^2\sqrt{1-v^2}$$

~~и это~~ т.е. её уравнение (30)

совпадает с моим ур. $\otimes$

Явное решение уравн. ⊛

⊛ $$\boxed{\dot V = -C V^2 \sqrt{1-V^2}}$$

△0 $$-\frac{dV}{V^2\sqrt{1-V^2}} = C\,dt$$

△1 $$\boxed{-\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV}{V^2\sqrt{1-V^2}} = C\int_0^t dt}$$

$V(t=0) \equiv V_0$ — начальная скорость протона перед входом в ядро

Вычисление неопределённого интеграла:

$$\int \frac{dV}{V^2\sqrt{1-V^2}} =$$

$V \in [0, 1)$

$$\begin{cases} V = \cos\alpha \\ dV = -\sin\alpha\, d\alpha \\ \sqrt{1-V^2} = \sin\alpha \end{cases}$$

$$= \int \frac{-\cancel{\sin\alpha}\, d\alpha}{\cos^2\alpha\, \cancel{\sin\alpha}} =$$

$$= -\int \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{Const} =$$

$$= \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} + \mathrm{const} = \frac{-\sqrt{1-V^2}}{V} + \mathrm{const}$$

проверка: $\left(\frac{-\sqrt{1-V^2}}{V}\right)'_V = \frac{1}{V^2\sqrt{1-V^2}}$ $\boxed{\text{OK}}$

используя это в △1, получаем

$$\left.\frac{\sqrt{1-v^2}}{v}\right|_{v_0}^{v(t)} = ct$$

△2 $$\frac{\sqrt{1-v^2(t)}}{v(t)} - \frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_0} = ct$$

(**) $$\boxed{v(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(ct+\frac{\sqrt{1-v_0^2}}{v_0}\right)^2}}}$$

видим, что, если $p \gg m \Rightarrow$ $v_0 \to 1$

и Ответ перестаёт зависеть от p!

p – импульс налетающего протона

т.е. для $p = 10\,GeV$ и $p = 10$ ТэВ $= 10.000\,GeV$

имеем одну и ту же зависимость:

(***) $$\boxed{v(t) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2t^2}}}$$ $\boxed{\text{при } v_0 \simeq 1}$

△3 при этом: обратн. ф-ла $$ct = \frac{\sqrt{1-v^2(t)}}{v(t)}$$

Явное вычисление пути пройденного при торможении

$$l(t) \equiv \int_0^t v(\tau)\,d\tau$$

$l(t=0)=0$

$V(t=0) = V_0 = 1$

считаем, что $p \gg m$

но можно для $\forall V_0$ тоже

используем $\triangle_0$:

$$d\tau = -\frac{1}{c}\,\frac{dV}{V^2\sqrt{1-V^2}}$$

$$\triangle_4 \quad l(t) = -\frac{1}{c}\int_1^{V(t)} V\,\frac{dV}{V^2\sqrt{1-V^2}} = -\frac{1}{c}\int_1^{V(t)}\frac{dV}{V\sqrt{1-V^2}}$$

Неопр. интеграл $\int \frac{dV}{V\sqrt{1-V^2}}$ тоже берётся явно заменой $z=\sqrt{1-V^2}$

$$\boxed{\int\frac{dV}{V\sqrt{1-V^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-V^2}}{1+\sqrt{1-V^2}} + const}$$

проверка: $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-V^2}}{1+\sqrt{1-V^2}}\right)'_V = \frac{1}{V\sqrt{1-V^2}}$ $\boxed{OK}$

подставляя это в $\triangle_4$ находим:

$$(\star)\quad \boxed{l(t) = +\frac{1}{2c}\ln\frac{1+\sqrt{1-V(t)^2}}{1-\sqrt{1-V^2(t)}}}$$

Оценка константы C

$$C = \frac{\varepsilon S}{m} = \frac{M_A S}{V_A m} = \frac{A}{V_A} S = \frac{S}{V_A/A}$$

$$\varepsilon = \frac{M_A}{V_A}; \quad M_A = m A;$$

V_A/A — объём приходящейся на один нуклон ядра

S — поперечное сечение протона

$$\frac{V_A}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_A^3}{A} = 4{,}2\,\frac{(6{,}38\,fm)^3}{196} = 5{,}6\,fm^3$$

Другими методами, что для тяж. ядер

$R_A = C_0 A^{1/3}$ где $C_0 \simeq 1{,}1\,fm$

$$\frac{V_A}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_A^3}{A} = \frac{4}{3}\pi C_0^3 = 4{,}2\cdot(1{,}1)^3 fm^3 = 5{,}6\,fm^3$$

$S = 30$ мбн $= 3\,fm^2$ это соотв эффективн. радиусу вз. $r_p = 1\,fm$

$S = \pi r_p^2 \qquad r_p = 0{,}98\,fm$

$$\Rightarrow C = \frac{S}{V_A/A} = \frac{3\,fm^2}{5{,}6\,fm^3} = 0{,}54\,fm^{-1} = 0{,}54\cdot 0{,}2\,GeV = 0{,}11\,GeV$$

Численные оценки

при $p \gg m$, $V_0 = 1$

из $\triangle 3$ $\Rightarrow$ $$t = \frac{1}{C}\,\frac{\sqrt{1-V^2(t)}}{V(t)}$$

из ⍟ $\Rightarrow$ $$l = \frac{1}{2C}\ln\frac{1+\sqrt{1-V^2(t)}}{1-\sqrt{1-V^2(t)}}$$

$C = 0{,}54\ \mathrm{fm}^{-1} = 0{,}11\ \mathrm{GeV}$

$$\frac{1}{C} = 1{,}8\ \mathrm{fm} = 9\ \mathrm{GeV}^{-1}$$

Вычислим время t_1 и путь l_1 торможения протона до скорости $V=0{,}5$ от скорости $V=1$.

$$t_1 = \frac{1}{c}\,\frac{\sqrt{1-(1/2)^2}}{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{C} = 1{,}8\cdot\sqrt{3}\ \mathrm{fm} = 3{,}1\ \mathrm{fm} = 15{,}5\ \mathrm{GeV}^{-1}$$

$$l_1 = \frac{1}{2C}\ln\frac{1+\sqrt{1-1/4}}{1-\sqrt{1-1/4}} = \frac{1}{2C}\ln(7+4\sqrt{3}) = \frac{\frac{1}{2}\ln 13{,}9}{C} = \frac{1{,}32}{C} = 1{,}8\cdot 1{,}32\ \mathrm{fm} = 2{,}4\ \mathrm{fm}$$

Сравним это с графиком на рис. 11 в дипломной работе В.Е.

(!) У нас $t_1 = 3{,}1\ \mathrm{fm} = 15{,}5\ \mathrm{GeV}^{-1}$

В её работе $t_1 = 96\ \mathrm{GeV}^{-1}$ (из графика на рис. 11)

(!) т.е. завышено в 6 раз

у нас $l_1 = 2{,}4\ \mathrm{fm}$ (а не $30\ \mathrm{fm}$ до $V=0{,}7$ как в докладе В.Е.)

	до $V_0=0,7$		до $V=0,5$	
	t	l	t	l
Мои вычисл.	1,8 fm	1,6 fm	3,1 fm=15,5 GeV^{-1}	2,4 fm
Диплом В.Е		30 fm	96 GeV^{-1}	

слайд доклада диплома

рис.11 диплома

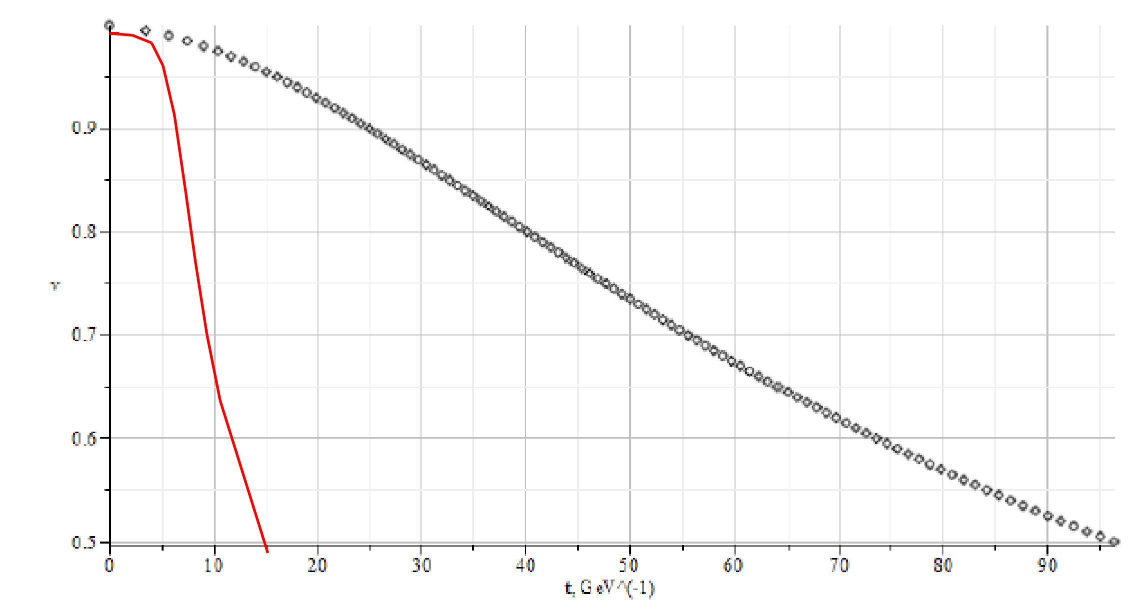

Рис. 11: Зависимость скорости projectile внутри ядра золота ($R = 6.38\ fm, a = 0.535\ fm, m_{0c} = 183.5\ GeV$) от времени при энергии столкновения в системе центра масс на нуклон-нуклонную пару $\sqrt{s_{NN}} = 10\ GeV (=> v_0 \approx 0.999)$. Такой же график для энергии ниже 10 GeV можно получить из этого, сдвинув вертикальную ось влево (то есть сдвинув пересечение графика с осью ординат, то есть сдвинув v_0 на меньшее значение).