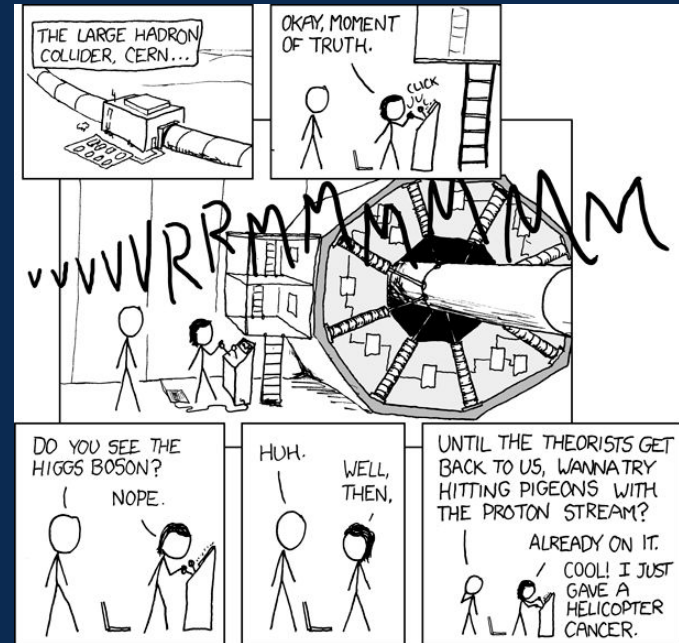


Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik,
TU Dresden

frank.siegert@tu-dresden.de



Emmy
Noether-
Programm

Deutsche
Forschungsgemeinschaft
DFG



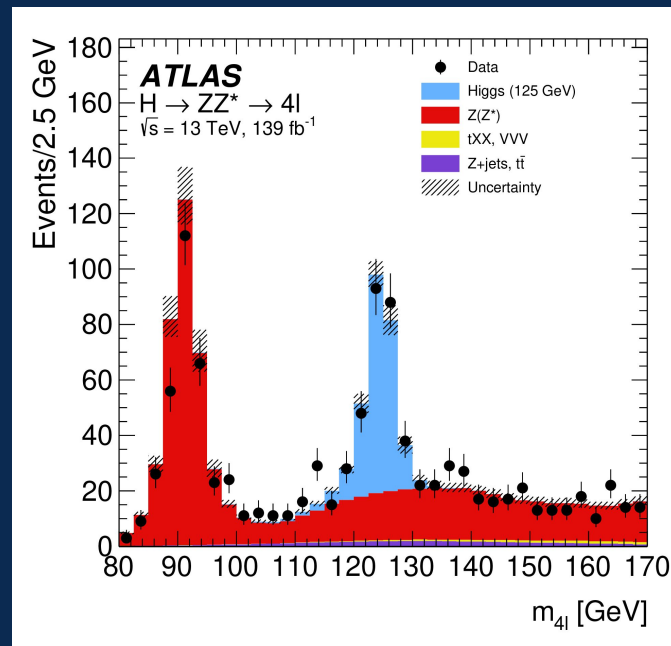
Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik,

TU Dresden

frank.siegert@tu-dresden.de



- ▶ Viele Prozesse/Größen im Alltag basieren auf Zufall:



Zahl der 6en bei
5 Würfeln



Zahl der Meteoriten, die pro Jahr
auf der Erde einschlagen



Zahl der Patienten, die zwischen
10 und 11 Uhr ankommen.



- ▶ Quantenphysikalische Prozesse sowieso (Gott würfelt doch!):
 - Exakter Zeitpunkt von An- oder Abregung von Atomen
 - Anzahl von radioaktiven Kernen, die in einem Zeitintervall zerfallen
 - Erzeugung eines Higgs-Bosons in einer Proton-Proton-Kollision am LHC

WANTED:

Zuverlässige Aussagen über die Gesetze der Natur!

▸ All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:

- N **unabhängige** Messungen ...
- der gleichen **Größe** X ...
- unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für
Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

▶ All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:

- N **unabhängige** Messungen ...
- der gleichen **Größe** X ...
- unter **identischen** Bedingungen

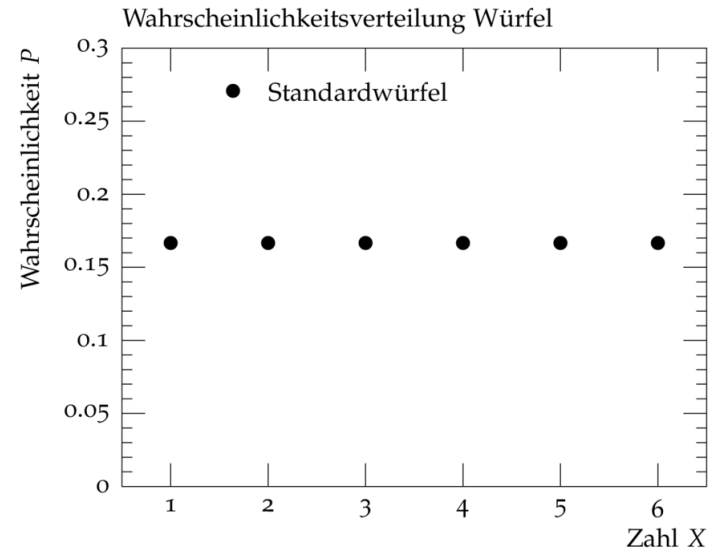
Wahrscheinlichkeitsverteilung für
Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

▶ Einfaches **Beispiel**: X =Zahl eines Würfels

- Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$$



▶ All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:

- N **unabhängige** Messungen ...
- der gleichen **Größe** X ...
- unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für
Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

▶ Einfaches **Beispiel**: X =Zahl eines Würfels

- Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
 $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$

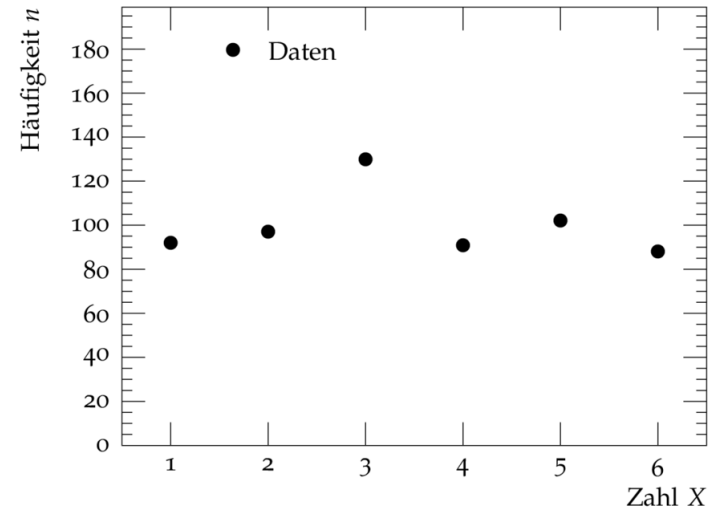
▶ **Messung** mit begrenzter Zahl von Versuchen

→ **Schätzung** des zugrundeliegenden $P(X)$

- Oft durch Histogramm dargestellt:
 - » x-Achse: Mögliche Werte der Zufallsvariable
 - » y-Achse: Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit

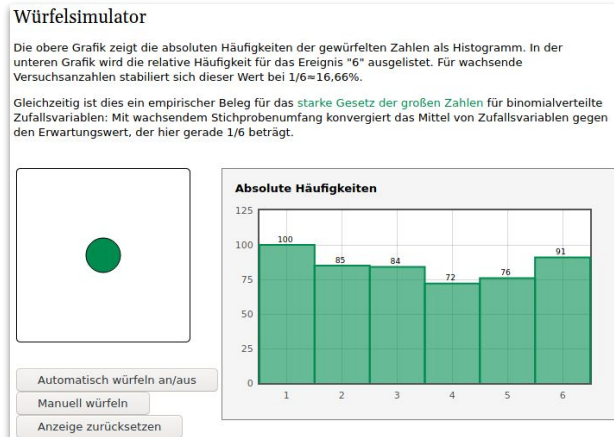
z.B. $n(6)=88 \rightarrow P(6) \approx 88/600$

Histogramm für 600 Würfelversuche



Selbst ausprobieren:

<https://www.mathematik.tu-clausthal.de/de/interaktiv/simulation/wuerfel/>



- ▶ All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:

- N **unabhängige** Messungen ...
- der gleichen **Größe** X ...
- unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

- ▶ Einfaches **Beispiel**: X =Zahl eines Würfels

- Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
 $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$

- ▶ **Messung** mit begrenzter Zahl von Versuchen

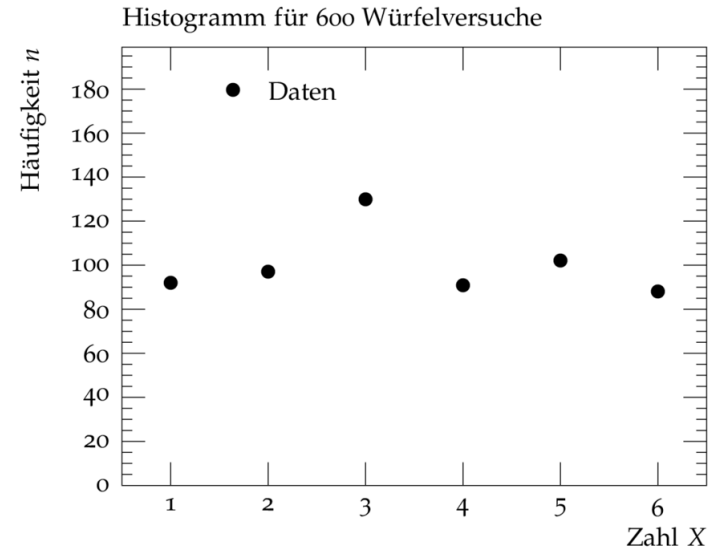
→ **Schätzung** des zugrundeliegenden $P(X)$

- Oft durch Histogramm dargestellt:
 - » x-Achse: Mögliche Werte der Zufallsvariable
 - » y-Achse: Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit

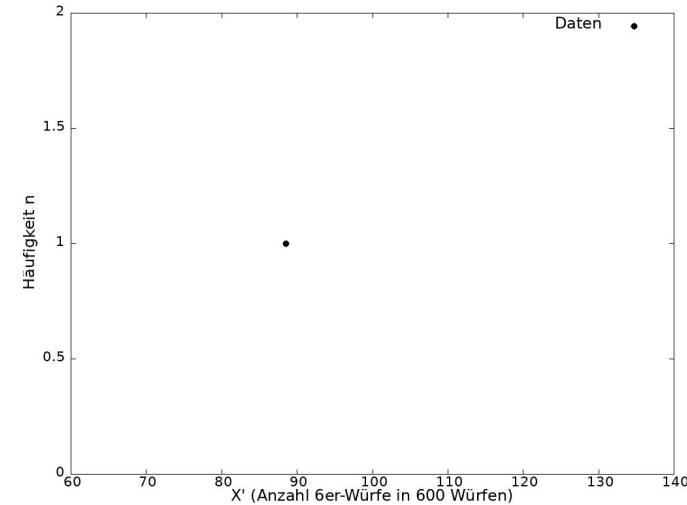
z.B. $n(6)=88 \rightarrow P(6) \approx 88/600$

- ▶ Zurück zur Anfangsfrage:

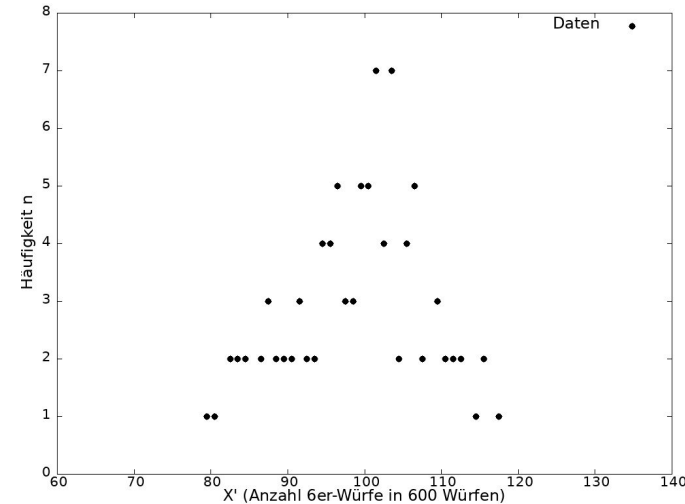
Zuverlässige Aussagen aus zufälliger Schätzung?



- ▶ Wir merken: “ $n(6)$ ” ist **wiederum eine Zufallsvariable!** Nennen wir sie X' :
 - Bei unserem einen Versuch ($N'=1$) hatte diese den Wert $X'=88$.



- ▶ Wir merken: “ $n(6)$ ” ist **wiederum eine Zufallsvariable!** Nennen wir sie X' :
 - Bei unserem einen Versuch ($N'=1$) hatte diese den Wert $X'=88$.
 - Wenn wir das Experiment $N'=100$ mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.



▸ Wir merken: “ $n(6)$ ” ist **wiederum eine Zufallsvariable!** Nennen wir sie X' :

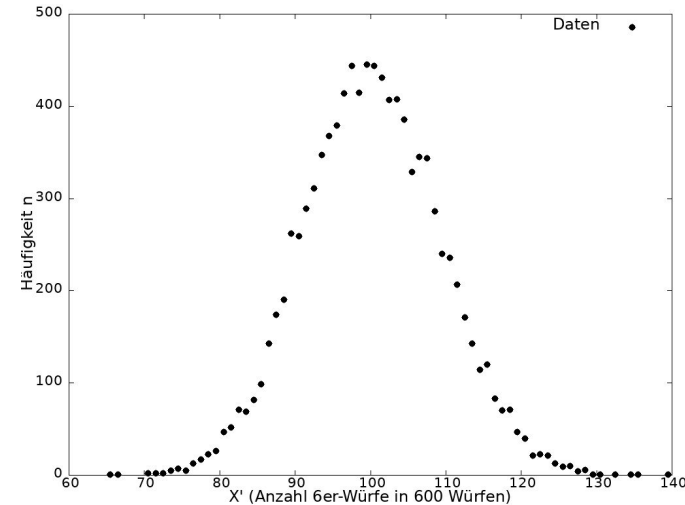
- Bei unserem einen Versuch ($N'=1$) hatte diese den Wert $X'=88$.
- Wenn wir das Experiment $N'=100$ mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.
- Nach $N'=10000$ wird die typische Wahrscheinlichkeitsverteilung sichtbar, die für Zählexperimente gilt:
 - » unabhängige Wiederholungen
 - » der gleichen Messgröße
 - » mit konstanten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit)

→ **Poissonverteilung** (hier: um $\lambda=100$)

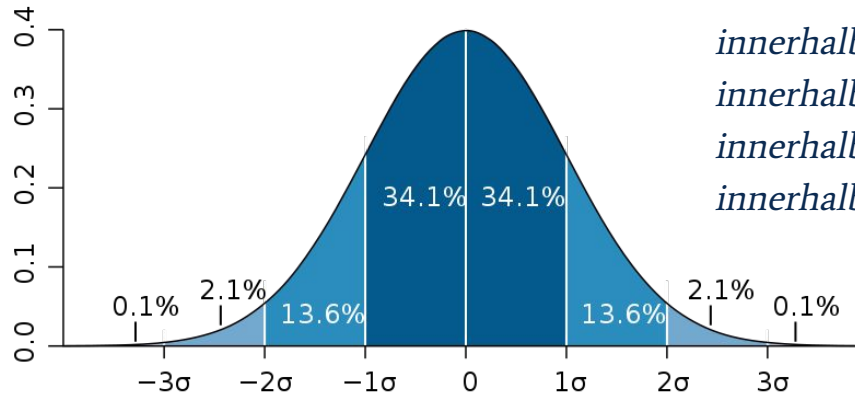
$$P'(X') = \frac{\lambda^{X'}}{X'!} e^{-\lambda}$$

bzw. für große λ (≥ 25) → annähernd Gauß-Normalverteilung mit $\mu=\lambda$ und $\sigma^2=\lambda$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



- ▶ Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
 → ablesbar, wie “selten” welche **Abweichungen** sind:

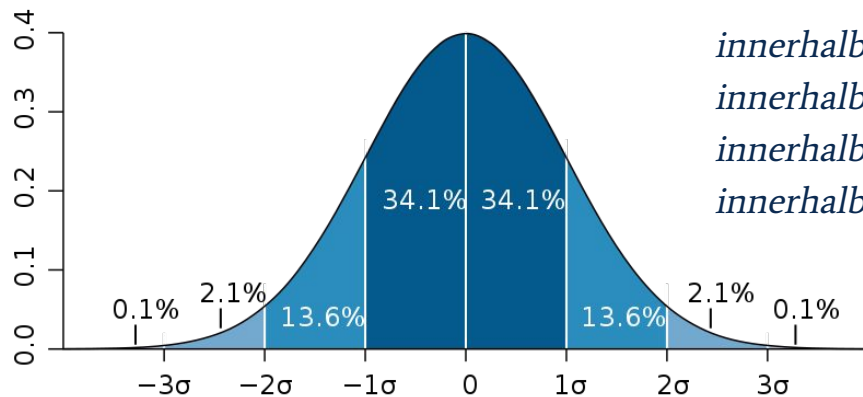


innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

Angestrebte Zuverlässigkeit einer Studie oft abhängig vom Fach:

- Sozialwissenschaften oft schon $\sim 2\sigma$ “signifikant”
- Teilchenphysik: “Entdeckung” ab 5σ

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
→ ablesbar, wie “selten” welche **Abweichungen** sind:



innerhalb $1\sigma \rightarrow 68\%$
innerhalb $2\sigma \rightarrow 95\%$
innerhalb $3\sigma \rightarrow 99,7\%$
innerhalb $5\sigma \rightarrow 99,99994\%$

Angestrebte Zuverlässigkeit einer Studie oft abhängig vom Fach:

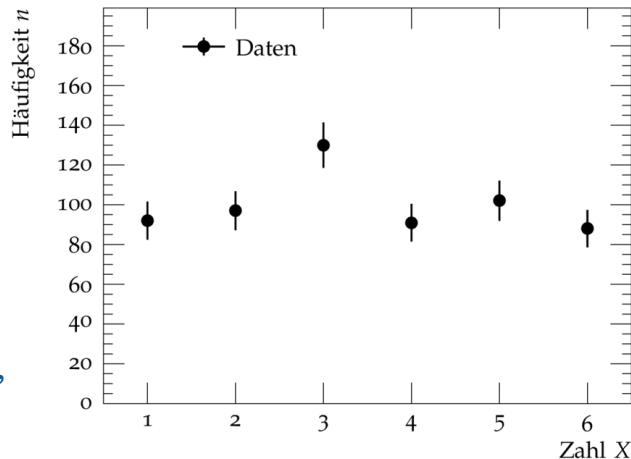
- Sozialwissenschaften oft schon $\sim 2\sigma$ “signifikant”
- Teilchenphysik: “Entdeckung” ab 5σ

- Umgekehrt können wir die 1σ -Unsicherheit für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei $X=6$ (mit $X'=88$):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9,4$$

“Das $88 \pm 9,4$ Intervall enthält zu 68% den wahren Wert.”

Histogramm für 600 Würfelversuche



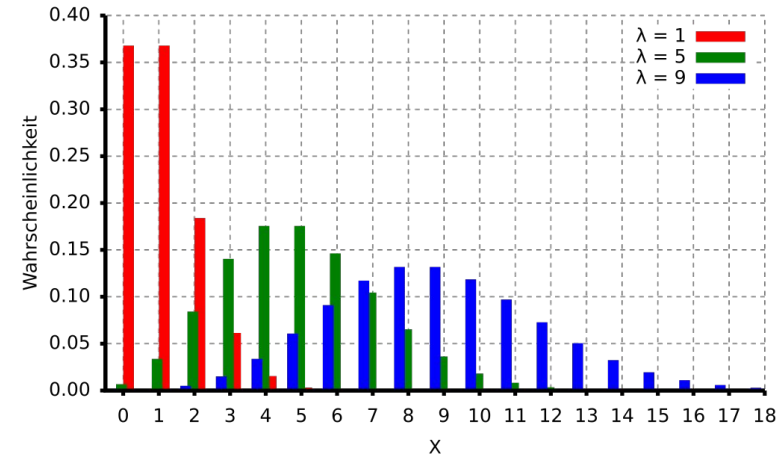
- ▶ (Statistische) Unsicherheit eines Zähl-experiments hängt also von Häufigkeit ab:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{n}$$

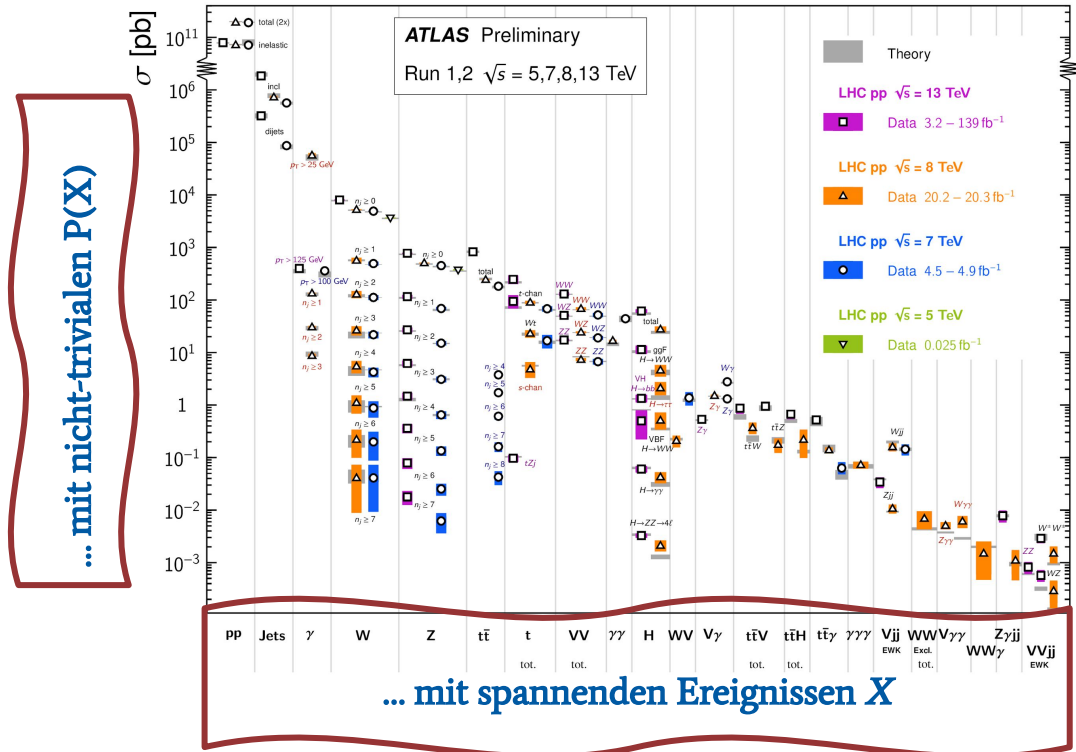
- Absolute Unsicherheit steigt mit mehr Versuchen!
- Aber relative Unsicherheit sinkt mit typischem Konvergenz-Verhalten:

$$\frac{\sigma}{n} \approx \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ Je häufiger gemessen, desto genauer.



- Was hat das (10000-fache) **Würfeln** von 600 Würfeln mit dem **LHC** zu tun?
- Der LHC ist eine riesige Würfelmaschine ...

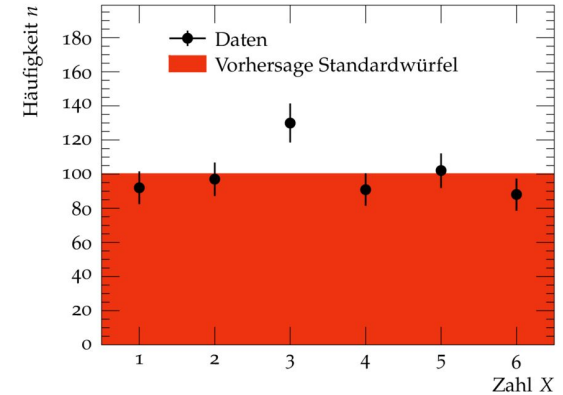


Quantity	Number
Circumference	26659 m
Dipole operating temperature	1.9 K (-271.3°C)
Number of magnets	9593
Number of main dipoles	1232
Number of main quadrupoles	392
Number of RF cavities	8 per beam
Nominal energy, protons	6.5 TeV
Nominal energy, ions	2.56 TeV/u (energy per nucleon)
Nominal energy, protons collisions	13 TeV
No. of bunches per proton beam	2808
No. of protons per bunch (at start)	1.2×10^{11}
Number of turns per second	11245
Number of collisions per second	1 billion

... mit unglaublich vielen Versuchen N gleichzeitig!

Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- ▶ **Experiment:**
 - 600 Würfel
- ▶ **Theorievorhersage:**
 - $n_i=100$



Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

▶ Experiment:

- 600 Würfel

▶ Theorievorhersage:

- $n_i = 100$

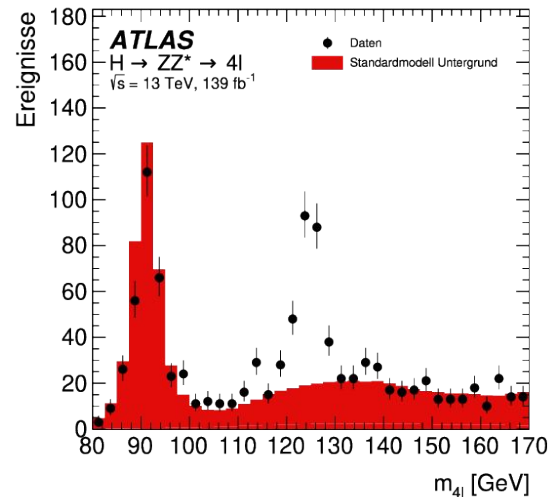
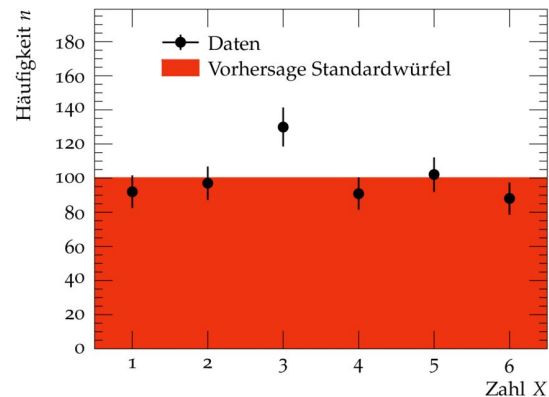
Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

▶ Experiment:

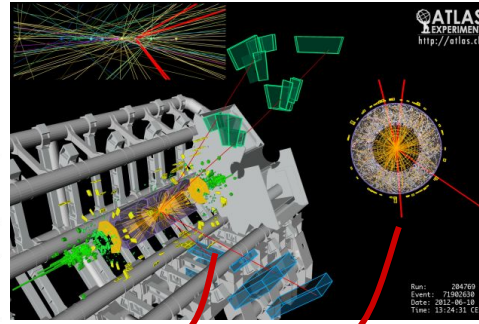
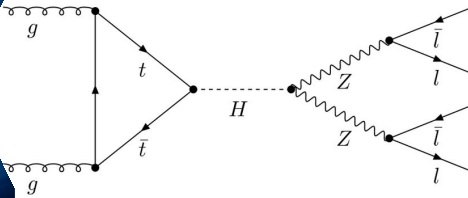
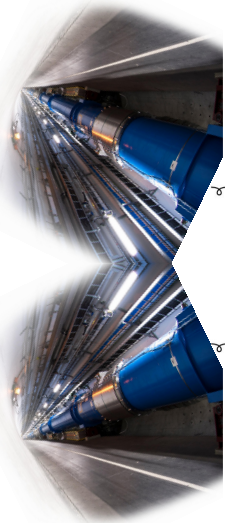
- 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
- aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
- selektiert und projiziert auf interessante Variablen

▶ Theorievorhersage ohne/mit Higgs?

- Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
- Aber nicht analytisch berechenbar!
 - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später

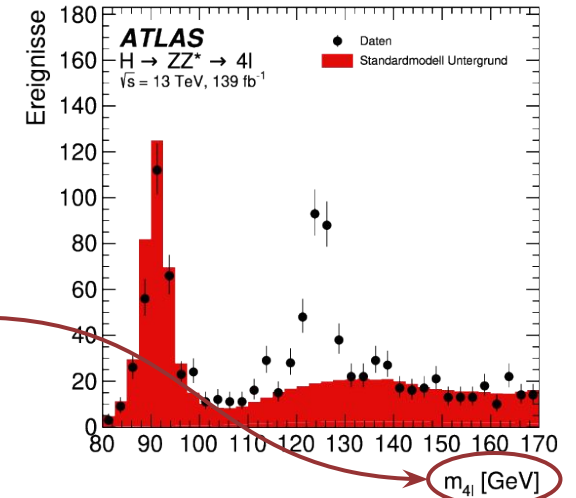
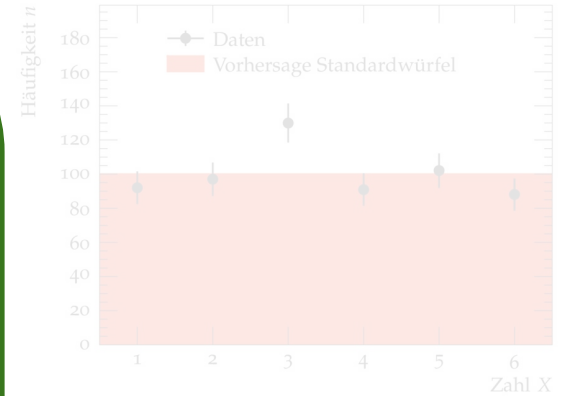


Crash-Kurs: Higgs-Suche im 4-Leptonen-Endzustand



Impulse

$$m_{4l} = \sqrt{(p_1+p_2+p_3+p_4)_\mu (p_1+p_2+p_3+p_4)^\mu} \rightarrow m_H \approx 125 \text{ GeV}$$



Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

Experiment:

- 600 Würfel

Theorievorhersage:

- $n_i = 100$

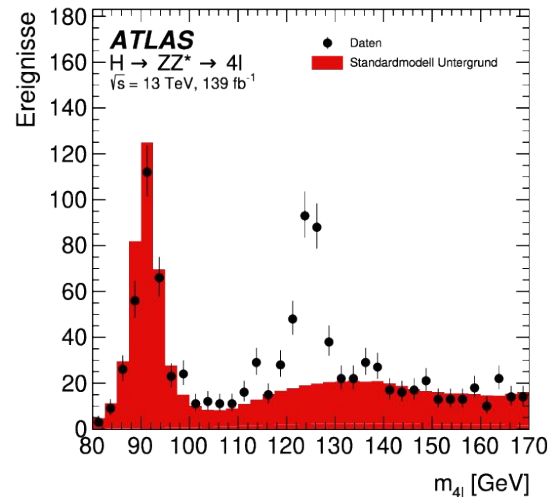
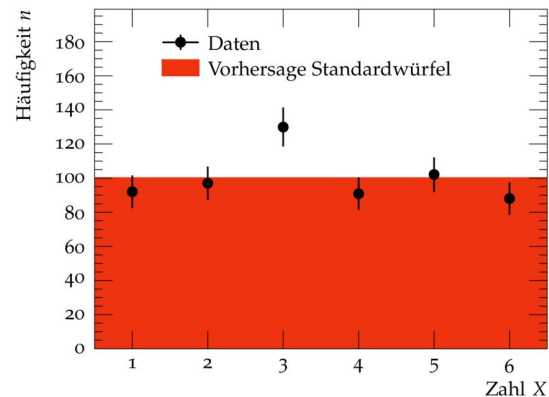
Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

Experiment:

- 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
- aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
- selektiert und projiziert auf interessante Variablen

Theorievorhersage ohne/mit Higgs?

- Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
- Aber nicht analytisch berechenbar!
 - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später



Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

Experiment:

- 600 Würfel

Theorievorhersage:

- $n_i = 100$

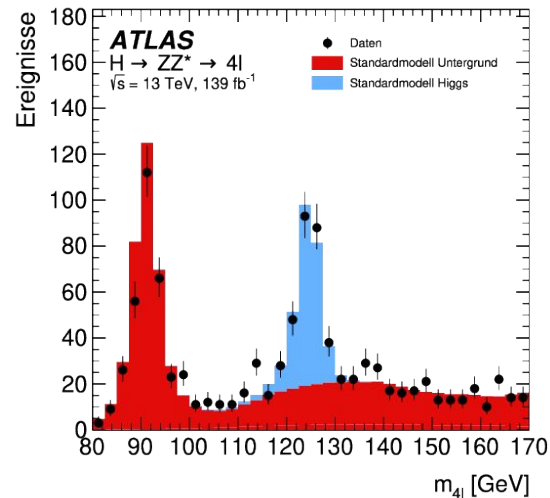
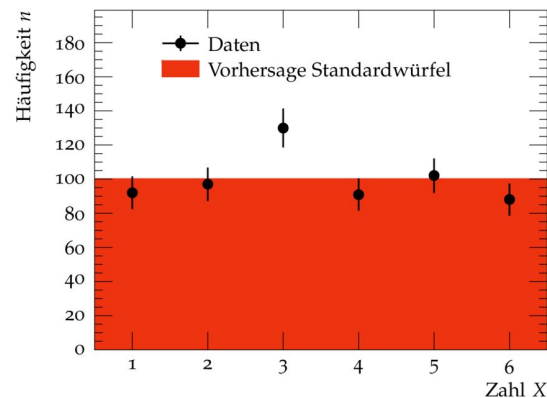
Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

Experiment:

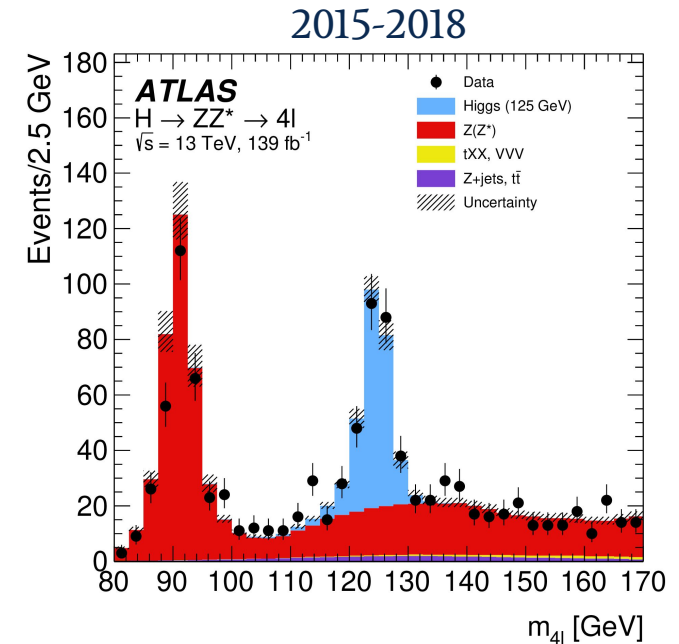
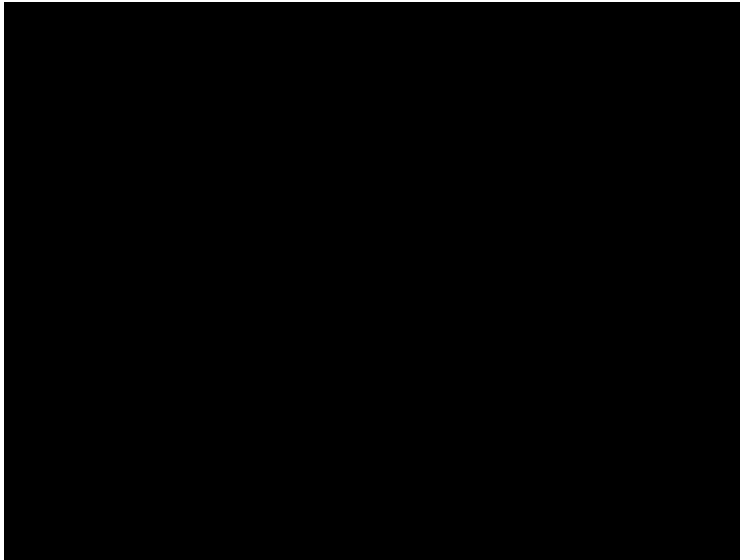
- 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
- aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
- selektiert und projiziert auf interessante Variablen

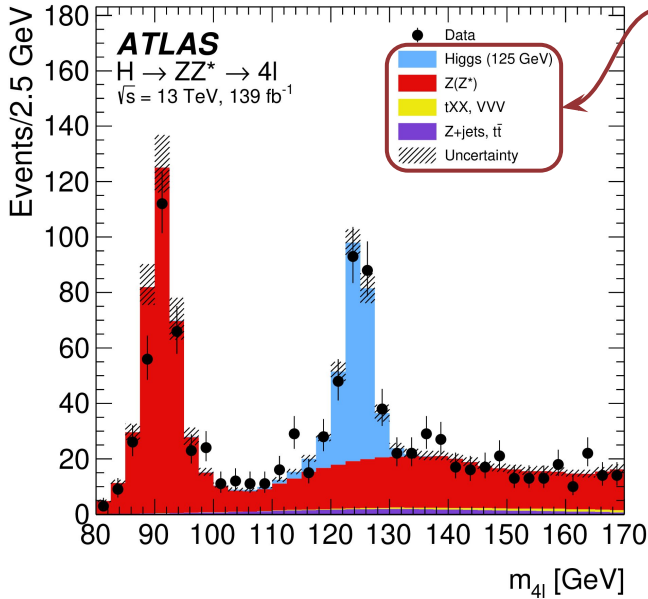
Theorievorhersage ohne/mit Higgs?

- Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
- Aber nicht analytisch berechenbar!
 - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später

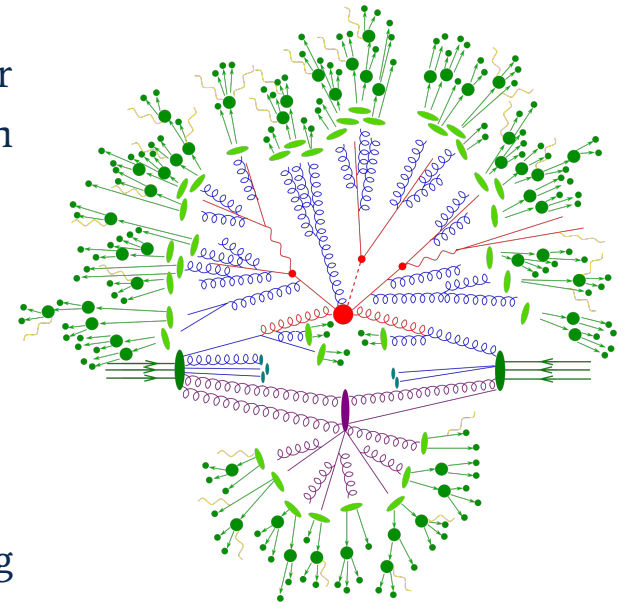


- ▶ ATLAS hat dieses spezielle Ergebnis als Zeitanimation 2011-2012 aufgearbeitet:
<https://cds.cern.ch/record/2230893/files/Higgs4l.gif>
- ▶ Klickt mal drauf (↑) und schaut es Euch an ...
 - Ab wann hättet ihr gewagt, eine Entdeckung bei $m_{4l} = 125$ GeV zu behaupten?



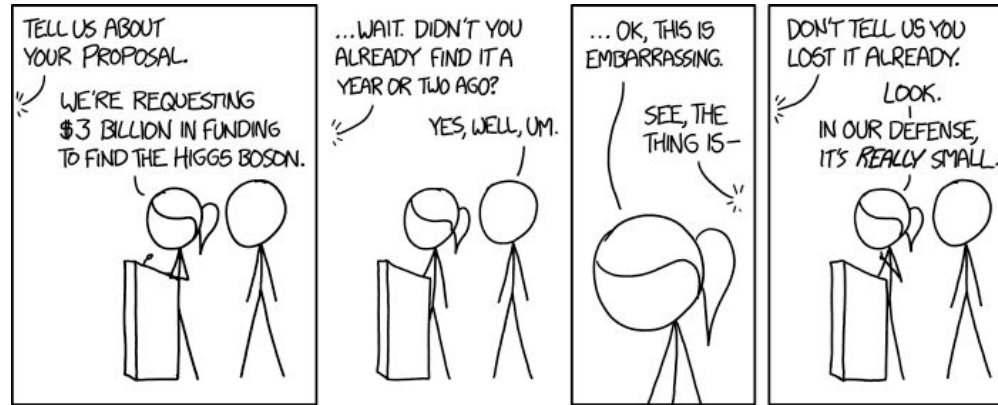


- ▶ **Theoretische Vorhersagen** v.a. der Untergründe kritisch fuer Interpretation der Messung
- ▶ Analytische Berechnung der gemessenen m_{4l} -Verteilung nicht möglich
- ▶ Stattdessen Simulation der Theorie-Prozesse in Stufen mit Hilfe von Zufall: **“Monte Carlo”-Methoden!**



- ▶ Schwerpunkt meiner Arbeitsgruppe an der TU Dresden:
 - Monte Carlo-Simulation für LHC-Kollisionen
 - Präzise Vorhersagen für Effekte der starken Wechselwirkung
 - Einsatz dieser Vorhersagen in Analysen des ATLAS-Experiments

- ▶ **Statistische Methoden sind essentiell**, um LHC-Messungen zu interpretieren
 - Zählexperimenten liegt die Poissonverteilung (~ Gauß-Normalverteilung) zugrunde
 - Deren bekannte Eigenschaften ermöglichen eine statistische Interpretation der Messwerte
→ Schwankungen und Konfidenzintervalle bestimmbar (mit komplizierteren Mitteln)
- ▶ Der LHC ist nicht nur ein Ring, sondern auch ein **Würfel**.
- ▶ **Ihr wisst jetzt alle, warum das hier Quatsch ist:**



Fragen?